MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

72. BAND

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT†
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR† A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

72. BAND

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1959/60

Alle Rechte, einschließlich das der Übersetzung in fremde Sprachen und das der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung, vorbehalten. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0,30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Unveränderter Nachdruck 1974
Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Inhalt des 72. Bandes

Seite

ERHARD SCHMIDT † . . . . . vor 205

BAGEMIHL, F., Planar sections of spatial sets 362

BERGMAN, S., The number of intersection points of two analytic surfaces in the space of two complex variables 294

BRAUER, R., Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung. II 25

CARLITZ, L., Congruences (mod 2^r) for the Coefficients of the Jacobi Elliptic Functions 307

DEMBOWSKI, P., Freie und offene projektive Ebenen 410

FLEISCHER, I., Über Dualität in lineartopologischen Moduln 439

GEIRINGER, H., On a limit theorem leading to a compound Poisson distribution . . 229

GILBARG, D., Some Hydrodynamic Applications of Function Theoretic Properties of Elliptic Equations 165

GILLMAN, L., and C. W. KOHLS, Convex and pseudoprime ideals in rings of continuous functions 399

HEINZ, E., Über die Differentialungleichung $0<\alpha\leqq rt-s^2\leqq\beta<\infty$ 107

HILLE, E., An Application of Prüfer's Method to a Singular Boundary Value Problem 95

HODGES, J. H., Some Determinantal Equations Over a Finite Field 355

HÖLDER, E., Extremale geschlossene Differentialformen. Unterschallströmungen im Großen 235

HOPF, E., Zur Kennzeichnung der Euklidischen Norm 76

JARNÍK, V., Eine Bemerkung über diophantische Approximationen 187

KARLIN, S., and G. SZEGÖ, On certain differential-integral equations 205

KASCH, F., und B. VOLKMANN, Metrische Sätze über transzendente Zahlen in P-adischen Körpern 367

KURATOWSKI, K., Un critère de coupure de l'espace euclidien par un sous-ensemble arbitraire 88

LOEWNER, C., A theorem on the partial order derived from a certain transformation semigroup 53

MALGRANGE, B., Sur une inégalité de F. Treves 184

MORREY jr., CH. B., Second Order Elliptic Equations in Several Variables and Hölder Continuity 146

MOSER, J., The Order of a Singularity in Fuchs' Theory 379

NEHARI, Z., On a class of nonlinear integral equations 175

OSTROWSKI, A., Über Produkte Hermitescher Matrizen und Büschel Hermitescher Formen 1

PERRON, O., Über lineare Differenzengleichungen und eine Anwendung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynomkoeffizienten 16

Seite

RADEMACHER, H., On the Phragmén-Lindelöf theorem and some applications . . . 192

RHOADES, B. E., Total Comparison among some totally Regular Hausdorff Methods 463

SABIDUSSI, G., Graph Multiplication 446

SALIÉ, H., Zum Wertevorrat der Dedekindschen Summen 61

SCHMEIDLER, W., Die Navier-Stokesschen Gleichungen der Hydrodynamik als System quadratischer Integralgleichungen 279

SPECHT, W., Freie Untergruppen der binären unimodularen Gruppe 319

STEINHAUS, H., und K. URBANIK, Poissonsche Folgen 127

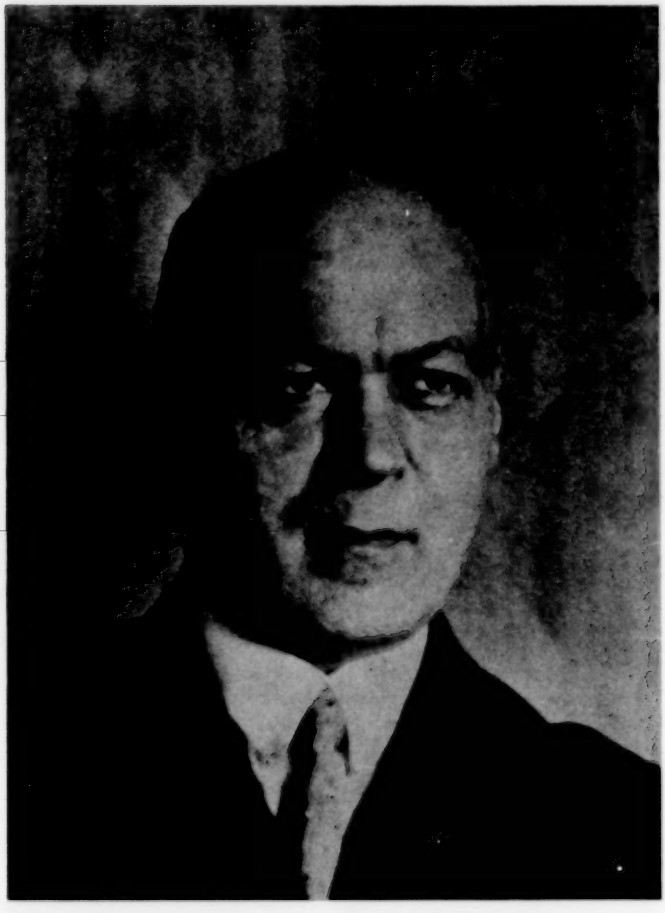
SYNGE, J. L., A theory of elasticity in general relativity 82

THOMPSON, J. G., Normal p-complements for Finite Groups 332

THOMPSON, J. G., A Special Class of Non-Solvable Groups 458

WALFISZ, A., Über Gitterpunkte in vierdimensionalen Ellipsoiden 259

WALSH, J. L., Note on approximation by bounded analytic functions (Problem α) 47



Dem Andenken des Begründers dieser Zeitschrift

LEON LICHTENSTEIN

sind die folgenden Arbeiten gewidmet

Springer-Verlag Berlin · Göttingen · Heidelberg

OSTROWSKI, A.
Math. Zeitschr. 72, 1–15 (1959)

Über Produkte Hermitescher Matrizen und Büschel Hermitescher Formen

Dem Andenken an LEON LICHTENSTEIN gewidmet
(16. 5. 1878 bis 21. 8. 1933)

Von

ALEXANDER OSTROWSKI

1. In einer kürzlich veröffentlichten Arbeit [9] habe ich unter anderem bewiesen, daß wenn eine Hermitesche Matrix H der Ordnung n mit einer positiv definiten Matrix D derselben Ordnung multipliziert wird, ihre Signatur dabei unverändert bleibt, so daß also DH genau so viele positive Eigenwerte hat wie H und dasselbe auch für negative Eigenwerte gilt. Es wurde, etwas schärfer, bewiesen, daß wenn D eine definite Matrix ist mit $\underline{p}$ als kleinstem und P als größtem Eigenwert, die Eigenwerte von DH sich aus denen von H durch Multiplikation mit gewissen Faktoren erhalten lassen, die zwischen $\underline{p}$ und P liegen[1]).

Es liegt nun nahe zu erwarten, daß wenn die Matrix D zwar nicht definit ist, also nicht lauter Eigenwerte gleichen Vorzeichens hat, dafür aber nur „wenig Eigenwerte abweichenden Vorzeichens" aufweist, dann vom obigen Satz zumindest eine gewisse Annäherung an die Tatsache der Realität sämtlicher Fundamentalwurzeln von DH gerettet werden könnte. Und dies ist in der Tat der Fall. Wir wollen allgemein für eine Hermitesche Matrix A mit π_A die Anzahl der positiven und mit ν_A die Anzahl der negativen Eigenwerte von A sowie für eine beliebige Matrix B mit K_B die Anzahl der nicht reellen Fundamentalwurzeln von B bezeichnen. Dann gilt der

Satz 1. *Sind A, B zwei Hermitesche Matrizen gleicher Ordnung, so ist K_{AB} gerade und es gilt*

$$K_{AB} \leqq 2 \operatorname{Min}(\pi_A, \nu_A, \pi_B, \nu_B). \tag{1}$$

2. Die Aussage des Satzes 1 liefert natürlich auch eine *untere* Schranke für die *Anzahl der reellen Fundamentalwurzeln* von AB. Wird diese Aussage in der entsprechenden Weise umgeschrieben, so läßt sie sich, wenn eine der Matrizen A, B regulär ist, insofern verschärfen, als man für die Anzahlen der positiven und der negativen Fundamentalwurzeln von AB einzeln untere Schranken angeben kann[2]).

[1]) Durch eine freundliche Mitteilung von OLGA TAUSSKY-TODD bin ich nachträglich darauf aufmerksam gemacht worden, daß in der kürzlich erschienenen Arbeit von AMIR-MOÉZ [1] *im Spezialfall, daß auch H eine definite Form ist*, der obige Sachverhalt als eine Folgerung aus recht allgemeinen und sehr scharfen Abschätzungen hergeleitet wird.

[2]) Es sei daran erinnert, daß die Eigenwerte von AB und BA die gleichen sind.

Um diese Formulierungen angeben zu können, erinnern wir daran, daß unter der *Signatur* einer Hermiteschen Form A die Differenz $\sigma_A = \pi_A - \nu_A$ verstanden wird. Wir bezeichnen ferner den *Rang* der Matrix A mit r_A und mit δ_A den *„Defekt"* von A, d.h. die Differenz $n - r_A$[3]). Dann ergibt sich aus dem Satz 1 als eine untere Schranke für die Anzahl der reellen Fundamentalwurzeln von AB

$$\begin{aligned}&\operatorname{Max}(n - 2\pi_A, n - 2\pi_B, n - 2\nu_A, n - 2\nu_B)\\ &= \operatorname{Max}(\delta_A + \nu_A - \pi_A,\ \delta_B + \nu_B - \pi_B,\ \delta_A + \pi_A - \nu_A,\ \delta_B + \pi_B - \nu_B)\\ &= \operatorname{Max}(|\sigma_A| + \delta_A,\ |\sigma_B| + \delta_B).\end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun allgemein die Gesamtanzahl der reellen Eigenwerte einer Matrix A mit R_A, so ist der Satz 1 äquivalent mit

Satz 1°. *Sind A, B zwei Hermitesche Matrizen gleicher Ordnung, so gilt*

$$R_{AB} \geqq \operatorname{Max}(|\sigma_A| + \delta_A,\ |\sigma_B| + \delta_B), \tag{2}$$

wobei die Differenz der beiden Seiten von (2) *gerade ist.*

3. Wir bezeichnen ferner die Gesamtanzahl der positiven Eigenwerte einer Matrix A allgemein mit R_A^+ und analog die Anzahl ihrer negativen Eigenwerte mit R_A^-.

Als Pendant zum Satz 1° beweisen wir in Nr. 21 den

Satz 2. *Sind A, B zwei Hermitesche Matrizen gleicher Ordnung und ist A regulär, so gilt*

$$R_{AB}^+ \geqq \tfrac{1}{2}|\sigma_A + \sigma_B| - \tfrac{1}{2}\delta_B, \tag{3}$$

$$R_{AB}^- \geqq \tfrac{1}{2}|\sigma_A - \sigma_B| - \tfrac{1}{2}\delta_B. \tag{4}$$

Sind die Matrizen A, B *beide regulär*, so ergeben sich im Satze 2 die beiden unteren Schranken

$$\tfrac{1}{2}|\sigma_A + \sigma_B|, \quad \tfrac{1}{2}|\sigma_A - \sigma_B|,$$

deren Summe in diesem Falle gerade gleich dem Ausdruck (2) ist.

4. Lassen wir im Satze 2 die Voraussetzung fallen, daß eine der Matrizen A, B regulär ist, so lassen sich an Stelle der Relationen (3) und (4) geeignet abgeschwächte Relationen angeben.

Wir bezeichnen für eine Matrix A mit $\overline{R}_A^+$ die Anzahl der *nicht negativen* reellen Eigenwerte von A und analog mit $\overline{R}_A^-$ die Anzahl der *nicht positiven* reellen Eigenwerte von A. Dann werden wir in Nr. 23 beweisen:

Satz 3. *Sind A, B zwei Hermitesche Matrizen gleicher Ordnung, so gilt*

$$\overline{R}_{AB}^+ \geqq \tfrac{1}{2}|\sigma_A + \sigma_B| + \tfrac{1}{2}(\delta_A + \delta_B), \tag{5}$$

$$\overline{R}_{AB}^- \geqq \tfrac{1}{2}|\sigma_A - \sigma_B| + \tfrac{1}{2}(\delta_A + \delta_B). \tag{6}$$

[3]) Bekanntlich ist bei einer Hermiteschen Matrix der Defekt gleich der Mehrfachheit der Null als Fundamentalwurzel, während sonst der Defekt einer quadratischen Matrix gleich der Anzahl der im Nullpunkt verschwindenden Elementarteiler und damit der Anzahl der zum Eigenwert Null gehörenden linear unabhängigen Eigenvektoren ist.

5. Der Satz 1° hängt eng zusammen mit einem Satz, der in der Inauguraldissertation von FELIX KLEIN 1868 ausgesprochen und bewiesen wurde ([5], p. 32). Der Kleinsche Satz bezieht sich, in unseren Bezeichnungen und unter der heute fast selbstverständlichen Verallgemeinerung auf Hermitesche statt reelle symmetrische Matrizen (vgl. [10], Fußnote pp. 47–49), auf Büschel Hermitescher Matrizen n-ter Ordnung:

$$M_\lambda = B - \lambda C \tag{7}$$

und die zugehörige Gleichung in λ:

$$|B - \lambda C| = 0. \tag{8}$$

Und zwar lautet er (der Beweis ergibt sich mit in Nr. 18):

Satz 4 (von FELIX KLEIN). *Sind B und C zwei Hermitesche Matrizen n-ter Ordnung und ist die Matrix C regulär, so hat* (8) *wenigstens $|\sigma_C|$ reelle Wurzeln. Allgemeiner hat die Determinante $|B - \lambda C|$ wenigstens $|\sigma_C|$ reelle Elementarteiler ungerader Ordnung*[4]).

Wir werden darüber hinaus in Nr. 18 beweisen:

Zusatz zum Satz 4. *Unter den Voraussetzungen des F. Kleinschen Satzes sind die Differenzen zwischen den Anzahlen der reellen Wurzeln von* (8) *und der reellen Elementarteiler ungerader Ordnung von $B - \lambda C$ einerseits und $|\sigma_C|$ andererseits gerade.*

6. Setzen wir $C^{-1} = A$ im Satz 4 und beachten, daß für reguläre C sicher $\sigma_A = \sigma_C$ ist, so folgt aus

$$|B - \lambda C| = |C|\,|AB - \lambda E|, \tag{9}$$

daß

$$R_{AB} \geqq |\sigma_A|$$

ist, wobei A eine beliebige reguläre Hermitesche Matrix n-ter Ordnung und $R_{AB} - |\sigma_A|$ gerade ist. Daraus folgt weiter nach Definition von K_{AB} wegen $\sigma_A = 2\pi_A - n$:

$$K_{AB} \leqq n - |2\pi_A - n|.$$

Da aber der Ausdruck rechts $\leqq 2\pi_A$ ist, folgt

$$K_{AB} \leqq 2\pi_A, \tag{10}$$

wobei $2\pi_A - K_{AB}$ gerade ist.

Von dieser Relation ausgehend, beweisen wir in Nr. 22 den Satz 1.

Es gilt ferner, analog zum Satz 4, der in Nr. 18 zu beweisende

[4]) Eine mit einem Teil der im Text angegebenen Kleinsche Aussage in den meisten Fällen äquivalente Formulierung findet sich bereits 1853 bei SYLVESTER ([11], p. 635), allerdings ohne Beweis und nur mit einer Beweisandeutung, die sich, wie uns scheint, ohne Hinzufügung weiterer Gedanken nicht ausführen läßt. Bei der bekannten Arbeitsweise des großen englischen Mathematikers muß daher wohl eher angenommen werden, daß er die fragliche Formulierung durch „unvollständige Induktion" gewonnen hat.

Satz 4°. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4 hat* (8) *wenigstens* $|\sigma_B|$ *reelle Wurzeln. Allgemeiner ist* $|\sigma_B|$ *höchstens gleich der Summe* S *der Anzahl der Elementarteiler ungerader Ordnung von* (7), *die reelle von* 0 *verschiedene Nullstellen haben, und der Anzahl der Elementarteiler gerader Ordnung von* (7), *die im Ursprung verschwinden. Dabei ist die Differenz* $S-|\sigma_B|$ *gerade.*

7. Die Sätze 4 und 4° lassen sich so umschreiben, daß darin statt σ die Größen π, ν vorkommen. So erhält man die Formulierung:

Satz 5. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4 liegen* π_C, ν_C *zwischen den Grenzen*

$$k+\sum\left[\frac{e}{2}\right], \quad k+\sum\left[\frac{e+1}{2}\right] \tag{11}$$

und π_B, ν_B *zwischen den Grenzen*

$$k+\sum\left[\frac{e'}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0-1}{2}\right], \quad k+\sum\left[\frac{e'+1}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0}{2}\right], \tag{12}$$

wo k *die halbe Gesamtanzahl der nicht reellen Wurzeln von* (8) *ist, die* e *die Exponenten sämtlicher reeller Elementarteiler von* (7), *die* e' *die Exponenten sämtlicher reeller nicht im Ursprung verschwindender Elementarteiler und die* e_0 *die Exponenten sämtlicher im Ursprung verschwindender Elementarteiler durchlaufen.*

Wir leiten in der Nr. 20 als den Satz 5° eine etwas verallgemeinerte Fassung des Satzes 5 her.

Die unteren Schranken des Satzes 5 sind von A. LOEWY ([6], [7], vgl. auch [2]) aufgestellt worden, wobei aber zu bemerken ist, daß die Gültigkeit der oberen Schranken dieses Satzes aus derjenigen der unteren Schranken sich direkt vermöge der Relationen

$$n=\pi_C+\nu_C, \qquad n=\pi_B+\nu_B+\delta_B$$

herleiten läßt.

8. Wird unter Benutzung von (9) der Satz 5 auf das Produkt AB übertragen, so ergibt sich sofort die folgende Formulierung:

Satz 6. *Sind* A, B *zwei Hermitesche Matrizen, von denen wenigstens eine regulär ist, so gelten die Relationen*

$$\begin{cases} \operatorname{Max}(\pi_B, \nu_B) \leqq k+\sum\left[\frac{e'+1}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0}{2}\right], \\ \operatorname{Min}(\pi_B, \nu_B) \geqq k+\sum\left[\frac{e'}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0-1}{2}\right]; \end{cases} \tag{13a}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Max}(\pi_A, \nu_A) \leqq k+\sum\left[\frac{e'+1}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0+1}{2}\right], \\ \operatorname{Min}(\pi_A, \nu_A) \geqq k+\sum\left[\frac{e'}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0}{2}\right]. \end{cases} \tag{13b}$$

Dabei ist $2k=K$ *die* (gerade) *Gesamtanzahl nicht reeller Eigenwerte von* AB, *während* e' *die Exponenten aller reellen Elementarteiler von* AB *durchläuft, die im Ursprung nicht verschwinden, und* e_0 *die Exponenten der im Ursprung verschwindenden Elementarteiler.*

9. Der Übergang von den die Signatur enthaltenden Ungleichungen der Sätze 4 und 4° zu den π und ν enthaltenden Relationen des Satzes 5 hat natürlich den Vorteil, daß in den letzteren *sämtliche* Elementarteiler auftreten. Andererseits bedeutet dies aber einen *Rückschritt*, da dadurch die Möglichkeit einer wichtigen Verallgemeinerung verloren geht.

Wir wollen allgemein setzen:

$$\sigma(\lambda) = \sigma_{M_\lambda}, \quad \pi(\lambda) = \pi_{M_\lambda}, \quad \nu(\lambda) = \nu_{M_\lambda}. \tag{14}$$

Mit $R(\lambda)$ bezeichnen wir die Gesamtanzahl der reellen Wurzeln der Gl. (8), die $\leqq \lambda$ sind (natürlich mehrfache mehrfach gezählt). Ferner soll $R^*(\lambda)$ die Anzahl der reellen Elementarteiler ungerader Ordnung von (7) bedeuten, deren Nullstellen $\leqq \lambda$ sind. Dann läßt sich der Satz 4 dahin auffassen, daß die Zuwächse $\Delta R^*(\lambda)$, $\Delta R(\lambda)$ für das Intervall $(-\infty, \infty)$ wenigstens gleich den absolut genommenen entsprechenden Zuwächsen von $\pi(\lambda)$, $\nu(\lambda)$, $\frac{1}{2}\sigma(\lambda)$ sind:

$$\Delta R(\lambda) \geqq \Delta R^*(\lambda) \geqq |\Delta\pi(\lambda)| = |\Delta\nu(\lambda)| = \tfrac{1}{2}|\Delta\sigma(\lambda)|. \tag{15}$$

10. Da es sich nun aber bei den Δ-Ausdrücken in (15) offenbar um spezielle Werte von *Intervallfunktionen* handelt, wird man sich fragen, ob die Relation (15) auch dann richtig ist, wenn die Δ-Zuwächse in (15) Zuwächse über ein allgemeines Intervall $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ sind. Wir werden nun in Nr. 17 und Nr. 24 beweisen, daß (15) in der Tat auch für ein allgemeines Intervall (λ_1, λ_2) gilt, sofern λ_1 und λ_2 selbst keine Wurzeln von (8) sind:

Satz 7. *Sind B, C zwei Hermitesche Matrizen gleicher Ordnung und sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 < \lambda_2$, keine Wurzeln von (8), so gilt in den obigen Bezeichnungen*

$$\Delta R^*(\lambda) \geqq \tfrac{1}{2}|\Delta\sigma(\lambda)| = |\Delta\pi(\lambda)| = |\Delta\nu(\lambda)|, \tag{16}$$

unter Δ jeweils der Zuwachs der betreffenden Größe von λ_1 bis λ_2 verstanden. Setzt man für das Intervall $J = (\lambda_1, \lambda_2)$:

$$\Delta R^* - \tfrac{1}{2}|\Delta\sigma| = D(J), \tag{17}$$

so ist $D(J)$ eine nicht negative, ganzzahlige, gerade, superadditive Intervallfunktion, d.h. sie genügt der Ungleichung

$$D(J_1 + J_2) \geqq D(J_1) + D(J_2), \tag{18}$$

wenn J_1 und J_2 zwei aneinanderstoßende Intervalle sind, die den obigen Bedingungen genügen.

Insbesondere folgt aus dem Satz 7, daß wenn $D(-\infty, \infty) = 0$, dann D für jedes Intervall verschwindet und daher in (16) stets das Gleichheitszeichen gilt.

11. Die Beweise der oben angegebenen Sätze beruhen auf der Reduktionstheorie von Büscheln Hermitescher Formen, wie sie sich seit den ersten Arbeiten von WEIERSTRASS im Laufe einer 75-jährigen Entwicklung ausgebildet hat. Wir brauchen dabei nur das in der Nr. 16 angegebene Hauptresultat dieser Theorie, wonach jedes „reguläre" Büschel Hermitescher Formen sich durch eine reelle Variablentransformation auf eine Summe von gewissen

„Einzelformen" mit getrennten Variablen bringen läßt, wobei diese Einzelformen einerseits den reellen Elementarteiler des Büschels und andererseits den Paaren konjugiert komplexer Elementarteiler des Büschels entsprechen. Die Signaturen dieser Einzelformen werden in den Nrn. 12—15 diskutiert und aus den Resultaten dieser Diskussion, die vor allem in der Tabelle (23) der Nr. 12 zusammengefaßt sind, lassen sich dann unsere Sätze ziemlich leicht ablesen, solange $|C| \neq 0$ vorausgesetzt werden kann.

Der Satz 7 läßt sich dann durch die relativ einfache algebraische Überlegung der Nr. 24 auch auf den Fall $|C| = 0$ ausdehnen. Was aber die Sätze über das Matrizenprodukt AB anbetrifft, so müssen wir Stetigkeitsbetrachtungen anstellen, um sie auf den Fall $|A| = |B| = 0$ (vgl. die Nrn. 22, 23) zu verallgemeinern.

12. Wir werden im folgenden gewisse spezielle Hermitesche Formen zu untersuchen haben, die von einem reellen Parameter λ, einer reellen Zahl ϱ sowie von e konjugiert-komplexen Variablenpaaren abhängen, wo e einen der Werte 1, 2, ... hat. Es sind dies die Formen

$$(19) \quad K_{\varrho,e}(\lambda) = (\varrho - \lambda)[x_1\bar{x}_e + x_2\bar{x}_{e-1} + \cdots + x_e\bar{x}_1] + [x_1\bar{x}_{e-1} + \cdots + x_{e-1}\bar{x}_1].$$

Wir stellen uns die Aufgabe, für die Form K die Signatur, sowie die Anzahl der positiven und der negativen Eigenwerte in Abhängigkeit von λ zu bestimmen.

Offenbar ist die zu (19) gehörende Matrix durch die folgende Matrix der Ordnung e gegeben,

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 & \varrho - \lambda \\ & & & 1 & \varrho - \lambda & \\ & & \iddots & \iddots & & \\ & 1 & & & & 0 \\ 1 & \varrho - \lambda & & & & \\ \varrho - \lambda & & & & & \end{pmatrix},$$

wo die erste Nebendiagonale nur $\varrho - \lambda$ als Elemente hat, die erste Supernebendiagonale dazu nur lauter 1 enthält, und alle anderen Elemente verschwinden. Man erkennt sofort, daß die zugehörige Determinante den Wert

$$(20) \qquad (-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} (\varrho - \lambda)^e$$

hat.

Setzen wir zuerst $\lambda = \varrho$, so reduziert sich unsere Form auf

$$K_{\varrho,e}(\varrho) = x_1\bar{x}_{e-1} + \cdots + x_{e-1}\bar{x}_1,$$

und dies ist für *ungerade* $e = 2m + 1$ gleich

$$(21) \quad (x_1\bar{x}_{2m} + x_{2m}\bar{x}_1) + (x_2\bar{x}_{2m-1} + x_{2m-1}\bar{x}_2) + \cdots + (x_m\bar{x}_{m+1} + x_{m+1}\bar{x}_m),$$

während für *gerade* $e=2m+2$ wir die Darstellung

$$(22) \qquad (x_1\bar{x}_{2m+1}+x_{2m+1}\bar{x}_1)+\cdots+(x_m\bar{x}_{m+2}+x_{m+2}\bar{x}_m)+|x_{m+1}|^2$$

bekommen. In beiden Fällen enthalten die Klammerausdrücke nur getrennte Variablensysteme, so daß man die Eigenwerte erhält, wenn man für jeden der Klammerausdrücke seine Eigenwerte bestimmt. Diese einzelnen Klammerausdrücke haben aber alle den Typus $x\bar{y}+y\bar{x}=2\Re x\bar{y}$ und dies geht durch die unitär-orthogonale Substitution

$$x=\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}, \qquad y=\frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}$$

über in

$$2\Re x\bar{y}=|\xi|^2-|\eta|^2.$$

Daher entspricht jedem unserer Klammerausdrücke ein Eigenwert $=1$ und ein Eigenwert $=-1$. Damit haben wir im Falle (21) $(e=2m+1)$ m mal den Eigenwert 1, m mal den Eigenwert -1, $\sigma=0$, sowie einen verschwindenden Eigenwert, da die Determinante für $\lambda=\varrho$ verschwindet. Im Falle (22) $(e=2m+2)$ haben wir, unter Berücksichtigung des letzten Terms, $m+1$ mal den Eigenwert 1 und m mal den Eigenwert -1, $\sigma=1$, wozu wiederum der eine verschwindende Eigenwert hinzukommt.

13. Lassen wir nun λ gegen ϱ konvergieren, so folgt aus der obigen Betrachtung, daß m Eigenwerte gegen -1 konvergieren, sowie, je nachdem ob $e=2m+1$ oder $e=2m+2$ ist, m oder $m+1$ Eigenwerte gegen 1 streben. Das Produkt aller dieser Eigenwerte konvergiert also in beiden Fällen gegen $(-1)^m$. Der übrigbleibende Eigenwert $E(\lambda)$ strebt dann gegen Null. Und da das Produkt sämtlicher Eigenwerte den Wert (20) besitzt, folgt leicht, daß $E(\lambda)\sim-(\lambda-\varrho)^e$ ist.

Da aber die Determinante unserer Form nur für $\lambda=\varrho$ verschwinden kann, können ihre Eigenwerte ihre Vorzeichen nur für $\lambda=\varrho$ wechseln. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache sehen wir, daß im Falle ungerader e wir, für $\lambda>\varrho$, m positive und $m+1$ negative Eigenwerte haben, $\sigma=-1$, während für $\lambda<\varrho$ man $m+1$ positive und m negative Eigenwerte hat, $\sigma=1$. Für gerade e dagegen ist $E(\lambda)$ immer $\leqq 0$ und wir haben daher, für $\lambda\gtrless\varrho$, $m+1$ positive und $m+1$ negative Eigenwerte, $\sigma=0$. Wir können die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammenfassen:

(23)

e	$\lambda<\varrho$	$\lambda>\varrho$	$\lambda=\varrho$
$2m+1$	$\sigma=1$	$\sigma=-1$	$\sigma=0$
$2m+2$	$\sigma=0$	$\sigma=0$	$\sigma=1$

14. Wir betrachten ferner gewisse spezielle Hermitesche Formen in den $2e$ konjugiert-komplexen Variablenpaaren $x_1, x_2, \ldots, x_e; \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_e; y_1, y_2, \ldots, y_e; \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_e$. Diese Formen werden zugeordnet einer beliebigen *nicht reellen* Zahl ϱ, einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl γ, sowie der natürlichen

Zahl e, und sind definiert durch:

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} K_{\varrho,\gamma,e}(\lambda) &= \gamma(\varrho-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}(x_\nu+iy_\nu)(\bar{x}_{e-\nu+1}+i\bar{y}_{e-\nu+1}) + \\ &+\gamma\sum_{\nu=1}^{e-1}(x_\nu+iy_\nu)(\bar{x}_{e-\nu}+i\bar{y}_{e-\nu})+\bar{\gamma}(\bar{\varrho}-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}(x_\nu-iy_\nu)\times \\ &\times(\bar{x}_{e-\nu+1}-i\bar{y}_{e-\nu+1})+\bar{\gamma}\sum_{\nu=1}^{e-1}(x_\nu-iy_\nu)(\bar{x}_{e-\nu}-i\bar{y}_{e-\nu}). \end{aligned}\right.$$

Dieser Ausdruck ist offenbar ein reelles Polynom in bezug auf die $x_\nu, y_\nu, \bar{x}_\nu, \bar{y}_\nu$. Und da es zugleich linear in den x_ν, y_ν ist und ebenso linear in den $\bar{x}_\nu, \bar{y}_\nu$, stellt dieser Ausdruck eine Hermitesche Form der Ordnung $2e$ dar. Wir wollen nun beweisen, daß diese Hermitesche Form *für jeden reellen Wert von λ die Signatur Null hat.* Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die Form (24), um ihre Abhängigkeit von Variablen zum Ausdruck zu bringen, mit $K(x_\nu, y_\nu)$. Man übe nun auf die Variablen in dieser Form die Transformation aus, die nach dem Trägheitssatz die Signatur nicht ändern:

$$x_\nu=\eta_\nu,\quad y_\nu=-\xi_\nu,\quad \bar{x}_\nu=\bar{\eta}_\nu,\quad \bar{y}_\nu=-\bar{\xi}_\nu.$$

Dann gilt offenbar:

$$x_\nu+iy_\nu=-i(\xi_\nu+i\eta_\nu),\qquad x_\nu-iy_\nu=i(\xi_\nu-i\eta_\nu),$$
$$\bar{x}_\nu+i\bar{y}_\nu=-i(\bar{\xi}_\nu+i\bar{\eta}_\nu),\qquad \bar{x}_\nu-i\bar{y}_\nu=i(\bar{\xi}_\nu-i\bar{\eta}_\nu).$$

Dann ergibt sich offenbar:

$$(25)\qquad K(x_\nu, y_\nu)=-K(\xi_\nu,\eta_\nu).$$

Ist nun σ die Signatur von $K(x_\nu, y_\nu)$, so folgt aus (25) $\sigma=-\sigma$, $\sigma=0$.

15. Wir wollen nunmehr die Determinante Δ der Hermiteschen Form (24) bestimmen. Diese Determinante ist offenbar die gleiche, wie diejenige der Bilinearform

$$\gamma(\varrho-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}(x_\nu+iy_\nu)(\xi_{e-\nu+1}+i\eta_{e-\nu+1})+\gamma\sum_{\nu=1}^{e-1}(x_\nu+iy_\nu)(\xi_{e-\nu}+i\eta_{e-\nu})+$$
$$+\bar{\gamma}(\bar{\varrho}-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}(x_\nu-iy_\nu)(\xi_{e-\nu+1}-i\eta_{e-\nu+1})+\bar{\gamma}\sum_{\nu=1}^{e-1}(x_\nu-iy_\nu)(\xi_{e-\nu}-i\eta_{e-\nu}).$$

Üben wir nun die Variablentransformation aus:

$$(26)\qquad x_\nu+iy_\nu=X_\nu,\qquad x_\nu-iy_\nu=Y_\nu,$$
$$(27)\qquad \xi_\nu+i\eta_\nu=\Xi_\nu,\qquad \xi_\nu-i\eta_\nu=H_\nu,\qquad (\nu=1,\ \ldots e)$$

so geht unsere Bilinearform über in

$$(28)\quad \gamma(\varrho-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}X_\nu\Xi_{e-\nu+1}+\gamma\sum_{\nu=1}^{e-1}X_\nu\Xi_{e-\nu}+\bar{\gamma}(\bar{\varrho}-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}Y_\nu H_{e-\nu+1}+\bar{\gamma}\sum_{\nu=1}^{e-1}Y_\nu H_{e-\nu}.$$

Bezeichnen wir die Determinante der Bilinearform (28) mit Δ_1, so gilt offenbar, da die Determinanten der Substitutionen (26) und (27) beide den Wert $(-2i)^e$ haben,

$$\Delta = 2^{2e}(-1)^e \Delta_1 .$$

Anderseits zerfällt aber die Bilinearform (28) in eine Summe von 2 Bilinearformen mit getrennten Variablen, zu denen die beiden Matrizen gehören

$$\gamma \begin{pmatrix} & & & 1 & \varrho-\lambda \\ & & & \varrho-\lambda & \\ & 0 & \iddots & \iddots & \\ & & 1 & & 0 \\ & 1 & \varrho-\lambda & & \\ \varrho-\lambda & & & & \end{pmatrix}, \qquad \bar{\gamma} \begin{pmatrix} & & & 1 & \bar{\varrho}-\lambda \\ & & & \bar{\varrho}-\lambda & \\ & 0 & \iddots & \iddots & \\ & & 1 & & 0 \\ & 1 & \bar{\varrho}-\lambda & & \\ \bar{\varrho}-\lambda & & & & \end{pmatrix}.$$

Daher ergibt sich $\Delta_1 = \gamma^e(\varrho-\lambda)^e\bar{\gamma}^e(\bar{\varrho}-\lambda)^e$, und daher schließlich

$$\Delta = \left[-4|\gamma|^2(\varrho-\lambda)(\bar{\varrho}-\lambda)\right]^e. \tag{29}$$

Das für uns wesentliche an der Formel (29) ist, daß die Determinante von (24) für kein reelles λ verschwindet. Daher gilt für die Form (24) für jeden reellen Wert von λ

$$\pi_K = \nu_K = e \qquad \left(K = K_{\varrho,\gamma,e}(\lambda)\right). \tag{30}$$

16. Man kann nun als das Hauptresultat der Reduktionstheorie der Büschel (7) Hermitescher Matrizen mit regulärer Matrix C bezeichnen[5]), daß ein solches Büschel Hermitescher Formen sich durch eine *reelle* Variablentransformation auf die folgende Gestalt bringen läßt

$$\sum K_{\varrho,\gamma,e}(\lambda) + \sum \varepsilon_i K_{\varrho_i,e_i}(\lambda) + \sum \delta_\rho K_{\varrho_\rho,e_\rho}(\lambda). \tag{31}$$

Dabei entsprechen die einzelnen Terme der ersten Summe den Paaren konjugiert komplexer Elementarteiler von (7) $(\lambda-\varrho)^e$, $(\lambda-\bar{\varrho})^e$, während die Konstanten γ gewisse nicht verschwindende Werte haben. Die Glieder der

[5]) Im Falle reeller quadratischer Formen ist die Zerlegung (31) im Prinzip 1858 und 1868 von WEIERSTRASS ([*15*], [*16*]) hergeleitet worden, wobei eine beim Weierstraßschen Beweis verbliebene Lücke erst 1894 durch FROBENIUS [*3*] ausgefüllt wurde. Inzwischen gelang es aber 1879 L. STICKELBERGER [*12*], die fragliche Schwierigkeit auf einem sehr scharfsinnig erdachten Umweg zu überwinden und damit eigentlich den ersten vollständig einwandfreien Beweis der Zerlegung (31) zu geben. WEIERSTRASS nimmt allerdings die Vorzeichenfaktoren $\varepsilon_i, \delta_\rho$ in die Variablen auf, womit sich eine etwas einfachere Gestalt der Darstellung (31) ergibt, die Transformation aber *komplex* wird. Für die von uns benutzte Gestalt der Zerlegung (31) vgl. im Falle quadratischer Formen KLEIN [*5*], pp. 27—30. Der Invarianzcharakter der Vorzeichenfaktoren $\varepsilon_i, \delta_\rho$ gegenüber reellen Transformationen wurde erst 1905 von MUTH [*8*] präzisiert und erhärtet. Die Übertragung der ganzen Diskussion auf Hermitesche Formen wurde zwar bereits 1890 von SEGRE [*10*] und 1900 von LOEWY [*7*] ins Auge gefaßt, vollständig einwandfrei wurde indessen die ganze Diskussion erst 1934/1935 durchgeführt von TROTT [*13*], TURNBULL [*14*] sowie von INGRAHAM and WEGNER [*4*]. Für (31) vgl. z. B. [*14*], p. 234.

zweiten Summe entsprechen sämtlichen reellen Elementarteilern von (7), $(\lambda-\varrho_i)^{e_i}$, mit *ungeraden* e_i, während jedes der ε_i einen der Werte ± 1 hat. Analog entsprechen die Terme der dritten Summe den reellen Elementarteilern von (7), $(\lambda-\varrho_\rho)^{e_\rho}$, mit *geraden* e_ρ, und die δ_ρ haben wiederum die Werte ± 1. Alle in (31) auftretenden Einzelformen haben dabei getrennte Variablen.

17. Wir setzen nun für die in (7) definierten Matrizen M_λ, wie in (14),

$$\sigma(\lambda)=\sigma_{M_\lambda},\quad \pi(\lambda)=\pi_{M_\lambda},\quad \nu(\lambda)=\nu_{M_\lambda},\quad \delta(\lambda)=\delta_{M_\lambda} \tag{32}$$

und wollen für $\lambda_1<\lambda_2$ aus der Darstellung (31) einen Ausdruck für den Zuwachs von $\sigma(\lambda)$ beim Übergang von λ_1 zu λ_2 herleiten. Dabei sollen auch $\lambda_1=-\infty$ und $\lambda_2=+\infty$ zugelassen werden.

Nun haben die in der ersten Summe von (31) auftretenden Einzelformen $K_{\varrho,\gamma,e}(\lambda)$, nach dem in Nr. 15 Bewiesenen, durchwegs die Signatur Null und tragen daher nichts zum Zuwachs von $\sigma(\lambda)$ bei.

Für die in der zweiten Summe von (31) vorkommenden $K_{\varrho_i,e_i}(\lambda)$ mit *ungeraden* e_i erhält man aus der Tabelle (23) der Nr. 13 beim Durchgang durch ϱ_i den Wert -2 als Zuwachs von σ. Daher liefern die im *offenen* Intervall (λ_1,λ_2) liegenden ϱ_i insgesamt den Zuwachs $-2\sum_{\lambda_1<\varrho_i<\lambda_2}\varepsilon_i$ für σ. Ist λ_1 eines der ϱ_i, so ergibt sich das zugehörige $-\varepsilon_i$ als Zuwachs von σ. Ist λ_2 eines der ϱ_i, so erfährt an dieser Stelle σ den entsprechenden Zuwachs $-\varepsilon_i$. Daher ergibt sich als der Beitrag der zweiten Teilsumme in (31) zu dem Zuwachs von σ:

$$-2\sum_{\lambda_1<\varrho_i<\lambda_2}\varepsilon_i-\sum_{\varrho_i=\lambda_1}\varepsilon_i-\sum_{\varrho_i=\lambda_2}\varepsilon_i.$$

Was aber die Terme der dritten Summe in (31) anbetrifft, so ergibt sich aus der Tabelle (23) der Nr. 13, daß sie für die im offenen Intervall (λ_1,λ_2) liegenden ϱ_ρ keinen Beitrag zum Zuwachs von σ liefern. Ferner erhält man, wenn $\lambda_1=\varrho_\rho$ ist, $-\delta_\rho$ als den entsprechenden Zuwachs von σ, während, wenn λ_2 ein ϱ_ρ ist, der entsprechende Zuwachs von σ gleich δ_ρ ist. Zusammenfassend erhalten wir daher

$$\Delta\sigma=\sigma(\lambda_2)-\sigma(\lambda_1)=-2\sum_{\lambda_1<\varrho_i<\lambda_2}\varepsilon_i-\sum_{\varrho_i=\lambda_1}\varepsilon_i-\sum_{\varrho_i=\lambda_2}\varepsilon_i-\sum_{\varrho_\rho=\lambda_1}\delta_\rho+\sum_{\varrho_\rho=\lambda_2}\delta_\rho. \tag{33}$$

Nehmen wir nun an, daß weder für λ_1 noch für λ_2 die Gl. (8) erfüllt ist, so reduziert sich (33) auf die Relation

$$\sigma(\lambda_2)-\sigma(\lambda_1)=-2\sum_{\lambda_1<\varrho_i<\lambda_2}\varepsilon_i. \tag{34}$$

Schätzt man hier den Ausdruck rechts durch $2\Delta R^*(\lambda)$ ab, wobei er mod 4 unverändert bleibt, so ergibt sich die auf die Formel (16) des Satzes 7 bezügliche Behauptung unter der Annahme $|C|\neq 0$.

Wir bezeichnen das Intervall (λ_1,λ_2) mit J. Es sei $p(J)$ die Anzahl der positiven ε_i unter den ε_i in der Summe rechts in (34) und $n(J)$ die Anzahl der negativen. Dann gilt

$$\Delta R^*=n(J)+p(J),\quad \tfrac{1}{2}|\Delta\sigma|=|p(J)-n(J)|$$

und in den Bezeichnungen des Satzes 7

$$D(J) = n(J) + p(J) - |p(J) - n(J)| = 2\,\mathrm{Min}\,(n(J), p(J)).$$

Daraus folgt aber sofort, daß $D(J)$ ganzzahlig, gerade und nicht negativ ist. Die Superadditivität von $D(J)$ folgt aus der allgemeinen Relation

$$\mathrm{Min}\,(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \geqq \mathrm{Min}\,(a_1, b_1) + \mathrm{Min}\,(a_2, b_2).$$

Damit ist der Satz 7 *unter der Annahme* $|C| \neq 0$ bewiesen.

18. Beachtet man, daß $\sigma(-\infty) = \sigma_C$, $\sigma(\infty) = -\sigma_C$ ist, so ergibt sich aus (33) für $\lambda_1 = -\infty$, $\lambda_2 = \infty$

$$\sigma_C = \sum_{\varrho_i} \varepsilon_i. \tag{35}$$

Schätzt man in (35) die rechte Seite durch die ihr mod 2 kongruente Anzahl der ϱ_i ab, so folgt der Satz 4 und der Zusatz dazu.

Setzen wir in (33) $\lambda_1 = -\infty$ und ersetzen λ_2 durch λ, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (35) für $\sigma(\lambda)$ den Ausdruck

$$\sum_{-\infty<\varrho<\infty} \varepsilon_i - 2\sum_{\varrho_i<\lambda} \varepsilon_i - \sum_{\varrho_i=\lambda} \varepsilon_i + \sum_{\varrho_p=\lambda} \delta_p = \sum_{\varrho_i>\lambda} \varepsilon_i - \sum_{\varrho_i<\lambda} \varepsilon_i + \sum_{\varrho_p=\lambda} \delta_p.$$

Das können wir zusammenfassen in

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\varrho_i \neq \lambda} \varepsilon_i \,\mathrm{sgn}\,(\varrho_i - \lambda) + \sum_{\varrho_p=\lambda} \delta_p. \tag{36}$$

Für $\lambda = 0$ ergibt sich nunmehr der Satz 4° ohne weiteres.

19. Aus der Formel (33) wollen wir nunmehr Ausdrücke und Schranken von $\pi(\lambda)$ und $\nu(\lambda)$ herleiten, indem wir von den Relationen Gebrauch machen:

$$2\pi(\lambda) = n - \delta(\lambda) + \sigma(\lambda), \qquad 2\nu(\lambda) = n - \delta(\lambda) - \sigma(\lambda).$$

Ist $2k$ die Gesamtanzahl komplexer Wurzeln von (8), so kann man offenbar unter der Benutzung der Zerlegung (31) und der in ihr verwendeten Bezeichnungen schreiben:

$$n - 2k = \sum_{\varrho_i \neq \lambda} e_i + \sum_{\varrho_p \neq \lambda} e_p + \sum_{\varrho_i=\lambda} e_i + \sum_{\varrho_p=\lambda} e_p.$$

Beachtet man, daß $\delta(\lambda)$ die Gesamtanzahl der $\varrho_i = \lambda$ und $\varrho_p = \lambda$ ist, so folgt weiter

$$n - 2k - \delta(\lambda) = \sum_{\varrho_i \neq \lambda} e_i + \sum_{\varrho_p \neq \lambda} e_p + \sum_{\varrho_i=\lambda} (e_i - 1) + \sum_{\varrho_p=\lambda} (e_p - 1).$$

Addieren bzw. subtrahieren wir hiervon die entsprechenden Therme von (36) und dividieren die entstehenden Relationen durch 2, so ergibt sich:

$$\pi(\lambda) - k = \sum_{\varrho_i>\lambda} \frac{e_i + \varepsilon_i}{2} + \sum_{\varrho_i<\lambda} \frac{e_i - \varepsilon_i}{2} + \sum_{\varrho_i=\lambda} \frac{e_i - 1}{2} + \sum_{\varrho_p \neq \lambda} \frac{e_p}{2} + \sum_{\varrho_p=\lambda} \frac{e_p + \delta_p - 1}{2}; \tag{37}$$

$$\nu(\lambda) - k = \sum_{\varrho_i>\lambda} \frac{e_i - \varepsilon_i}{2} + \sum_{\varrho_i<\lambda} \frac{e_i + \varepsilon_i}{2} + \sum_{\varrho_i=\lambda} \frac{e_i - 1}{2} + \sum_{\varrho_p \neq \lambda} \frac{e_p}{2} + \sum_{\varrho_p=\lambda} \frac{e_p - \delta_p - 1}{2}. \tag{38}$$

20. Aus diesen Darstellungen ergibt sich als die gemeinsame *obere Schranke* von $\pi(\lambda)-k$ und $\nu(\lambda)-k$:

$$\sum_{\varrho_i \neq \lambda} \frac{e_i+1}{2} + \sum_{\varrho_i=\lambda}\left[\frac{e_i}{2}\right] + \sum_{\varrho_p \neq \lambda}\left[\frac{e_p+1}{2}\right] + \sum_{\varrho_p=\lambda}\frac{e_p}{2},$$

und dies läßt sich in der Form zusammenschreiben,

$$\sum_{\varrho \neq \lambda}\left[\frac{e+1}{2}\right] + \sum_{\varrho=\lambda}\left[\frac{e_0}{2}\right], \tag{39}$$

wo e die Ordnungen aller reellen Elementarteiler durchläuft, die nicht für $\varrho=\lambda$ verschwinden, während e_0 durch die Ordnungen aller für $\varrho=\lambda$ verschwindender Elementarteiler läuft.

Analog erhält man aus (37) und (38) die gemeinsame *untere Schranke* für $\pi(\lambda)-k$ und $\nu(\lambda)-k$:

$$\sum_{\varrho_i \neq \lambda}\left[\frac{e_i}{2}\right] + \sum_{\varrho_i=\lambda}\frac{e_i-1}{2} + \sum_{\varrho_p \neq \lambda}\frac{e_p}{2} + \sum_{\varrho_p=\lambda}\left[\frac{e_p-1}{2}\right].$$

Dies läßt sich aber wieder in der Form zusammenfassen,

$$\sum_{\varrho \neq \lambda}\left[\frac{e}{2}\right] + \sum_{\varrho=\lambda}\left[\frac{e_0-1}{2}\right], \tag{40}$$

wo e bzw. e_0 durch die gleichen Werte laufen wie oben. Zusammenfassend erhalten wir als eine unwesentliche Verallgemeinerung des Satzes 5 den

Satz 5°. *Sind B, C Hermitesche Matrizen n-ter Ordnung, ist $|C| \neq 0$ und sind $\pi(\lambda)$ und $\nu(\lambda)$ bzw. die Anzahlen der positiven und negativen Eigenwerte von $M_\lambda = B - \lambda C$, so sind sowohl $\pi(\lambda)-k$ und $\nu(\lambda)-k$ zwischen den beiden Schranken* (39), (40) *enthalten.*

Für $\lambda=0$ und $\lambda=\pm\infty$ ergeben sich die Behauptungen des Satzes 5.

21. Wir spezialisieren jetzt die Formel (33), indem wir einmal setzen $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\infty$ und sodann $\lambda_1=-\infty$, $\lambda_2=0$. So ergibt sich aus (33):

$$\sigma_B + \sigma_C = 2\sum_{\varrho_i>0}\varepsilon_i + \sum_{\varrho_i=0}\varepsilon_i + \sum_{\varrho_p=0}\delta_p; \tag{41}$$

$$\sigma_B - \sigma_C = -2\sum_{\varrho_i<0}\varepsilon_i - \sum_{\varrho_i=0}\varepsilon_i + \sum_{\varrho_p=0}\delta_p. \tag{42}$$

Setzen wir nun:

$$S_+ = \sum_{\varrho_i>0}\varepsilon_i, \quad S_- = \sum_{\varrho_i<0}\varepsilon_i; \quad S_g = \sum_{\varrho_p=0}\delta_p, \quad S_u = \sum_{\varrho_i=0}\varepsilon_i,$$

so ergibt sich aus (41), (42)

$$S_+ = \tfrac{1}{2}(\sigma_C + \sigma_B - S_g - S_u), \tag{43}$$

$$S_- = \tfrac{1}{2}(\sigma_C - \sigma_B + S_g - S_u). \tag{44}$$

Man beachte nun, daß der Rang von B zugleich derjenige von $C^{-1}B = AB$ ist. Daher ist auch $\delta_B = \delta_{AB}$. Anderseits ist δ_{AB} zugleich die Anzahl der verschiedenen für $\lambda=0$ verschwindenden Elementarteiler von $AB-\lambda E$, und

damit auch nach (9) die Gesamtanzahl der verschwindenden ϱ_i und ϱ_p. Daraus folgt aber:

$$|S_g| + |S_u| \leqq \delta_B. \tag{45}$$

Berücksichtigt man dies, so ergeben sich aus (43), (44) die Schranken (3) und (4) des Satzes 2.

Zugleich sieht man, daß R_{AB}^{+}, R_{AB}^{-} in Satz 2 durch die Anzahlen der Elementarteiler *ungerader Ordnung* von AB mit positiven bzw. negativen Nullstellen ersetzt werden können.

22. Wir beweisen nunmehr den Satz 1. Da die Eigenwerte von AB die gleichen sind wie die von BA und bei der Multiplikation von A oder B mit -1 sich auch die Eigenwerte von AB sich mit -1 multiplizieren, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$\operatorname{Min}(\pi_A, \nu_A, \pi_B, \nu_B) = \pi_A$$

ist. Ist A regulär, so folgt daher der Satz 1 aus dem über (10) Gesagten. Es sei A singulär. Dann läßt sich eine von einem *positiven* Parameter $t \leqq 1$ abhängige reguläre Hermitesche Matrix $A(t)$ n-ter Ordnung finden, derart, daß für hinreichend kleine positive t

$$\pi_{A(t)} = \pi_A$$

und zugleich

$$A(t) \to A(t \downarrow 0)$$

gilt[6]). Dann gilt auch

$$A(t)\, B \to AB \;(t \downarrow 0)$$

und nach (10)

$$K_{A(t)B} \leqq 2\pi_{A(t)} = 2\pi_A.$$

Da aber die komplexen Eigenwerte von AB für $t \downarrow 0$ Grenzwerte von *komplexen* Eigenwerten von $A(t)B$ sind, ist $K_{AB} \leqq K_{A(t)B}$ und der Satz 1 ist bewiesen, sobald wir gezeigt haben, daß K_{AB} gerade ist. Nun folgt aber für die Hermiteschen Formen A, B aus $\overline{AB} = (BA)'$, da AB, BA und $(BA)'$ die gleichen Eigenwerte haben, daß die komplexen Eigenwerte von AB sich zu Paaren konjugiert komplexer zusammenordnen lassen. Daher ist K_{AB} in der Tat gerade.

23. Wir beweisen jetzt den Satz 3. Ist einmal die auf (5) bezügliche Behauptung bewiesen, so folgt daraus die auf (6) bezügliche Behauptung, wenn man B durch $-B$ ersetzt, da dann σ_B sich mit -1 multipliziert und die positiven Eigenwerte von AB in negative übergehen. Wir können und wollen

[6]) Um $A(t)$ zu bilden, transformiere man die A entsprechende quadratische Form in $x_1, \ldots, x_n$ durch eine reelle reguläre Transformation zwischen den x_ν und den ξ_ν auf die Form:

$$\xi_1^2 + \cdots + \xi_{\pi_A}^2 - \xi_{\pi_A+1}^2 - \cdots - \xi_{\pi_A+\nu_A}^2,$$

subtrahiere $\frac{t}{2}\sum_{\varkappa=1}^{n} \xi_\varkappa^2$ und transformiere sodann zurück auf die x_ν.

dabei ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\sigma_A+\sigma_B\geqq 0$ ist, da man sonst nur A, B bzw. $-A$, $-B$ zu ersetzen braucht.

Ist nun A regulär, so benützen wir (3) und beachten, daß die Anzahl der verschwindenden Eigenwerte von AB wenigstens gleich $\delta_{AB}=\delta_B$ ist. Addieren wir aber links in (3) die Gesamtordnung des Eigenwerts Null bei AB und rechts δ_B, so ergibt sich gerade die Relation (5).

Es sei nun A singulär. Dann können wir, analog wie in der Nr. 22, eine von einem positiven Parameter $t\leqq 1$ abhängige reguläre Hermitesche Matrix $A(t)$ gleicher Ordnung wie A finden, derart, daß $A(t)\to A(t\downarrow 0)$ und für hinreichend kleine positive t

$$\pi_{A(t)}=\pi_A+\delta_A,\qquad \nu_{A(t)}=\nu_A$$

und daher $\sigma_{A(t)}=\sigma_A+\delta_A$ gilt[7]). Dann folgt aus (3)

$$R^+_{A(t)B}\geqq \tfrac{1}{2}(\sigma_A+\sigma_B+\delta_A-\delta_B)$$

und daher, da die Gesamtordnung der verschwindenden Eigenwerte von $A(t)B$ wenigstens gleich δ_B ist,

$$\overline{R}^+_{A(t)B}\geqq \tfrac{1}{2}(\sigma_A+\sigma_B+\delta_A+\delta_B).$$

Läßt man nun t gegen 0 fallen, so entsprechen in der Grenze den nicht negativen Eigenwerten von $A(t)B$ wenigstens ebenso viele nicht negative Eigenwerte von AB. Deshalb gilt erst recht

$$\overline{R}^+_{A(t)B}\geqq \tfrac{1}{2}(\sigma_A+\sigma_B+\delta_A+\delta_B),$$

womit (5) und damit der Satz 3 vollständig bewiesen ist.

24. Wir beweisen endlich die Formel (16) des Satzes 7, die am Schlusse der Nr. 17 nur unter der Annahme $|C|\neq 0$ bewiesen wurde. Dabei dürfen und wollen wir unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\lambda_1=0$, $\lambda_2=p>0$ ist. In der Tat wird der allgemeine Fall auf diesen durch die Transformation $\lambda=\lambda_1+\mu$ zurückgeführt. Dann lautet die zu beweisende Relation:

$$R^*(p)-R^*(0)\geqq \tfrac{1}{2}\left|\sigma_{B-pC}-\sigma_B\right|, \tag{46}$$

wobei vorausgesetzt wird, daß $|B|\neq 0$, $|B-pC|\neq 0$ ist. Man betrachte nun das Matrizenbüschel $C-\mu B$. Da hier $|B|\neq 0$ ist, ist darauf nach dem bereits Bewiesenen die Relation (16) anwendbar, und wir wenden sie auf das Intervall $(1/p,\infty)$ an. In der Tat ist nach Voraussetzung weder $1/p$ noch ∞ eine Wurzel von $|C-\mu B|$. Nun ist die Anzahl der reellen Eigenwerte ungerader Ordnung von $C-\mu B$ mit $\mu>\frac{1}{p}$ gleich der entsprechenden Anzahl für von $C-\frac{1}{\lambda}B$ mit $0<\lambda<p$, und dies ist gerade $R^*(p)-R^*(0)$. Daher liefert die Anwendung von (16) auf unser Büschel

$$R^*(p)-R^*(0)\geqq \left|\sigma_{-B}-\sigma_{C-\frac{1}{p}B}\right|. \tag{47}$$

[7]) Hierzu braucht man nur in der in Fußnote [6]) angegebenen Konstruktion t durch $-t$ zu ersetzen.

Hier ist aber $\sigma_{-B} = -\sigma_B$ und $\sigma_{C-\frac{1}{p}B} = \sigma_{pC-B} = -\sigma_{B-pC}$, womit (47) in (46) übergeht. Damit ist der Satz 7 vollständig bewiesen, da die auf $D(J)$ bezüglichen Behauptungen in Nr. 17 bereits allgemein bewiesen wurden.

Literatur

[1] Amir-Moéz, Ali R.: Extreme properties of eigenvalues of a Hermitian transformation and singular values of the sum and product of linear transformation. Duke Math. J. **23**, 463–476 (1956). – [2] Bromwich, T. J.: On a canonical reduction of bilinear forms. Proc. L. M. S. **32**, 321–352 (1900). – [3] Frobenius, G.: Über die Elementarteiler der Determinanten. Berliner Sitz.-Berichte **1894**, 31–44. – [4] Ingraham, M. H., and K. W. Wegner: The equivalence of pairs of Hermitian matrices. Trans. A. M. S. **38**, 145–162 (1935). – [5] Klein, F.: Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Coordinaten auf eine canonische Form, Inaug.-Diss. Bonn 1868, wieder abgedruckt in Math. Ann. **23**, 539–578 (1884), wieder abgedruckt in F. Kleins, Ges. Math. Abh., Bd. 1, pp. 7–48. Unsere Zitate beziehen sich auf den letztgenannten Wiederabdruck. – [6] Loewy, A.: Über die Charakteristik einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante. Math. Ann. **52**, 588–592 (1899). – [7] Loewy, A.: Über Scharen reeller quadratischer und Hermitescher Formen. J. reine u. angew. Math. **122**, 53–72 (1900). – [8] Muth, P.: Über reelle Äquivalenz von Scharen reeller quadratischer Formen. J. reine u. angew. Math. **128**, 302–321 (1905). – [9] Ostrowski, A.: Über Eigenwerte von Produkten Hermitescher Matrizen (Helmut Hasse zum 60. Geburtstag). Hamb. Math. Abh. **23**, 60–68 (1959). – [10] Segre, C.: Un nuovo campo di ricerche geometriche. Atti della reale acad. di Torino **26**, 47–49 (1890). – [11] Sylvester, J. J.: The algebraical theory of the secular-inequality determinantive equation generalized. Phil. Magazine **6**, 214–216 (1853), wieder abgedruckt in Coll. Math. Papers, Vol. I, pp. 634–636. – [12] Stickelberger, L.: Über Scharen von bilinearen und quadratischen Formen. J. reine u. angew. Math. **86**, 20–43 (1879). – [13] Trott, G. R.: On the canonical form of a non singular pencil of Hermitian matrices. Amer. J. Math. **56**, 359–371 (1934). – [14] Turnbull, H. W.: On the equivalence of pencils of Hermitian Forms. Proc. L. M. S. (2) **39**, 232–248 (1935). – [15] Weierstrass, K.: Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen. Monatsber. Akad. Wiss. Berlin **1858**, 207–220. – [16] Weierstrass, K.: Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Monatsber. Akad. Wiss. Berlin **1868**, 310–338.

Mathematische Anstalt der Universität Basel (Schweiz)

(Eingegangen am 25. Juni 1958)

PERRON, O.
Math. Zeitschr. 72, 16—24 (1959)

Über lineare Differenzengleichungen und eine Anwendung auf lineare Differentialgleichungen mit Polynomkoeffizienten

Dem Andenken an LEON LICHTENSTEIN gewidmet

Von

OSKAR PERRON

§ 1. Einleitung

Man hat sich neuerdings mit linearen Differentialgleichungen

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + P_m(x)\,y = 0$$

beschäftigt, deren Koeffizienten $P_i(x)$ Polynome von x sind. Die Integrale sind selbstverständlich ganze Funktionen von x, und man hat unter anderem nach deren Wachstumsordnung α und zugehörigem Typus γ gefragt (WITTICH **1, 2**; PÖSCHL **1, 2, 3**), die für eine ganze transzendente Funktion $f(x)$ bekanntlich so definiert sind: Setzt man

$$\operatorname*{Max}_{|x|=r} |f(x)| = M(r),$$

so ist

$$\alpha = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(r)}{\log r}, \qquad \gamma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(r)}{r^\alpha}.$$

Entwickelt man die Funktion $f(x)$ in ihre Taylorsche Reihe

$$f(x) = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \cdots,$$

so gibt es auch eine Koeffizientenordnung ϱ und zugehörigen Typus σ, die so definiert sind:

$$\varrho = \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{\log\left|\frac{1}{D_\mu}\right|}{\log(\mu!)}, \qquad \sigma = \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|D_\mu|(\mu!)^\varrho} = \overline{\lim_{\mu\to\infty}} e^{-\varrho}\mu^\varrho \sqrt[\mu]{|D_\mu|}.$$

Zwischen α, γ und ϱ, σ besteht bekanntlich der Zusammenhang[1])

$$\alpha = \frac{1}{\varrho}, \qquad \gamma\alpha = \sigma^\alpha.$$

Statt nach α und γ kann man daher ebensogut nach ϱ und σ fragen, und das scheint mir bei Behandlung des Problems besonders zweckmäßig, weil die Differentialgleichung die Koeffizienten D_μ rekurrent zu berechnen gestattet,

[1]) Siehe etwa L. BIEBERBACH: Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, S. 231. Das obige α heißt dort ϱ, das γ heißt σ.

indem sie für sie eine lineare Differenzengleichung liefert. Ich habe dieses Verfahren schon vor 50 Jahren bei einer verwandten Fragestellung angewandt (PERRON 2) und mich dabei auf einen kurz zuvor (PERRON 1) gewonnenen Satz über eine Klasse linearer Differenzengleichungen gestützt. Der Beweis dieses Satzes war sehr verwickelt. Ich kann ihn heute, wenn ich die Koeffizienten der Differenzengleichung ein klein wenig spezieller annehme, was für den vorliegenden Zweck genügt, wesentlich kürzer gestalten und zugleich noch eine von KREUSER 1 gefundene Verschärfung gewinnen, durch die sich nicht nur die Ordnung ϱ wie damals, sondern auch der zugehörige Typus σ ergibt.

§ 2. Eine lineare Differenzengleichung

Der zu benutzende Satz über Differenzengleichungen lautet:

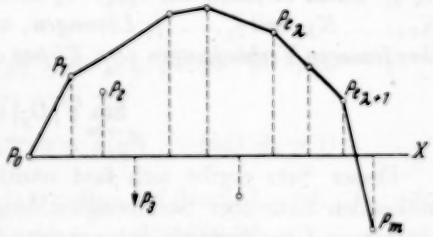
Satz A. *Die Koeffizienten der linearen Differenzengleichung m-ter Ordnung*

$$(1) \qquad D_{\mu+m} + p_1(\mu)\, D_{\mu+m-1} + \cdots + p_m(\mu)\, D_\mu = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

mögen die Form haben

$$p_i(\mu) = A_i \mu^{k_i} + o(\mu^{k_i}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

wo die A_i komplexe, die k_i reelle Zahlen sind und $o(\mu^{k_i})$ das bekannte Ordnungssymbol für $\mu \to \infty$ bedeutet. Bei einem verschwindenden $p_i(\mu)$ werde $k_i = -\infty$ gesetzt.



Man markiere in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die $m+1$ Punkte P_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, m)$ mit den Koordinaten $x = i$, $y = k_i$ (wobei $k_0 = 0$) und führe von P_0 nach P_m einen nach der positiven Y-Seite konvexen Newton-Puiseuxschen (später abgekürzt NP-) Streckenzug, der eindeutig durch die Forderung bestimmt ist, daß jede Ecke einer der Punkte P_i ist, während die übrigen dieser Punkte nicht auf der konvexen Seite liegen dürfen (s. die Figur). Die Eckpunkte seien

$$P_{e_0} = P_0,\ P_{e_1},\ P_{e_2},\ \ldots,\ P_{e_g} = P_m.$$

Der Richtungskoeffizient der Strecke $\overline{P_{e_\lambda} P_{e_{\lambda+1}}}$

$$\frac{k_{e_{\lambda+1}} - k_{e_\lambda}}{e_{\lambda+1} - e_\lambda}$$

werde mit q_λ bezeichnet[2]*), wobei dann*

$$q_0 > q_1 > q_2 > \cdots > q_{g-1}$$

[2]) Bei der späteren Anwendung sind alle k_i und folglich auch die q_λ negativ, was in der Figur des gefälligeren Aussehens wegen nicht der Fall ist.

ist und außerdem

$$k_i - i\,q_\lambda \leqq k_{e_\lambda} - e_\lambda q_\lambda,$$

mit Gleichheit insbesondere für $i = e_\lambda$ *und* $i = e_{\lambda+1}$ *und mit Ungleichheit insbesondere für* $i < e_\lambda$ *und* $i > e_{\lambda+1}$.

Dann hat die Differenzengleichung ein Fundamentalsystem von Lösungen, die derart in g Klassen $K_0, K_1, \ldots, K_{g-1}$ *zerfallen, daß die Klasse* K_λ *genau* $e_{\lambda+1} - e_\lambda$ *linear unabhängige Lösungen enthält, die nebst ihren linearen Verbindungen die Ordnung* $-q_\lambda$ *haben, d.h., bei ihnen ist*

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{\log \frac{1}{|D_\mu|}}{\log(\mu!)} = -q_\lambda \qquad \text{(PERRON 1)}.$$

Bilden wir ferner mit einem festen λ $(= 0, 1, \ldots, g-1)$ *die Gleichung*

$$\sum_i{}^{(\lambda)} A_i z^{m-i} = 0, \tag{2}$$

wo die Summe $\sum^{(\lambda)}$ *über diejenigen Indizes i läuft, für welche* $k_i - i\,q_\lambda = k_{e_\lambda} - e_\lambda q_\lambda$ *ist, so ist diese vom Grad* $m - e_\lambda$ *und hat die* $(m - e_{\lambda+1})$*-fache Wurzel* 0. *Außerdem habe sie noch* j_1 *Wurzeln vom Betrag* σ_1, j_2 *Wurzeln vom Betrag* $\sigma_2, \ldots, j_s$ *Wurzeln vom Betrag* σ_s, *wo dann*

$$j_1 + j_2 + \cdots + j_s = e_{\lambda+1} - e_\lambda \quad \text{und etwa} \quad \sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_s$$

ist[3]). *Dann zerfallen die* $e_{\lambda+1} - e_\lambda$ *Lösungen der Klasse* K_λ *in s Unterklassen* $K_{\lambda 1}, \ldots, K_{\lambda s}$ *mit* $j_1, \ldots, j_s$ *Lösungen, wobei die Lösungen der Klasse* $K_{\lambda l}$ *und ihre linearen Verbindungen vom Typus* σ_l *sind, d.h., es ist*

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|D_\mu|\,(\mu!)^{-q_\lambda}} = \sigma_l \qquad \text{(KREUSER 1)}.$$

Dieser Satz ergibt sich fast unmittelbar als Spezialfall aus dem nachstehenden Satz über Summengleichungen, zu dem ich 1921 durch wesentlich einfachere Überlegungen gelangt war (PERRON 3), als ich sie in der Arbeit 1 hatte anstellen müssen und sie entsprechend auch KREUSER angestellt hat:

Satz B. *Die Koeffizienten der homogenen Summengleichung*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu + b_{\mu\nu})\, x_{\mu+\nu} = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

mögen so beschaffen sein, daß[4])

$$a_0 + b_{\mu 0} \neq 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$|b_{\mu\nu}| \leqq k_\mu \vartheta^\nu \qquad (0 < \vartheta < 1;\ \mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\lim_{\mu\to\infty} k_\mu = 0,$$

[3]) Eigentlich sollten die j_l und σ_l und ebenso s noch den Index λ haben, den wir der Einfachheit halber unterdrücken, weil λ festgehalten wird.

[4]) Der Buchstabe k_μ ist des besseren Vergleichs halber aus meiner Arbeit 3 übernommen und hat mit den Exponenten k_i in Satz A natürlich nichts zu tun.

und daß die Funktion

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

für $|z| \leqq 1$ *regulär ist. Ist dann* n $(\geqq 0)$ *die Anzahl ihrer Nullstellen in diesem Bereich (mehrfache mehrfach gezählt), so hat die Summengleichung genau* n *linear unabhängige Lösungen, für die*

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|x_\mu|} \leqq 1$$

ist.

Um hieraus den Satz A zu gewinnen, setzen wir in (1)

$$D_\mu = (\mu!)^q G^\mu x_\mu \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

wo wir uns für q und G eine geeignete wechselnde Wahl noch vorbehalten wollen. Die Gl. (1) geht dadurch, wenn wir durch $[(\mu+m)!]^q G^{\mu+m}$ dividieren und die Summanden in umgekehrter Reihenfolge schreiben, über in

$$p_m^*(\mu)\, x_\mu + p_{m-1}^*(\mu)\, x_{\mu+1} + \cdots + p_1^*(\mu)\, x_{\mu+m-1} + x_{\mu+m} = 0, \tag{5}$$

wobei

$$p_i^*(\mu) = A_i G^{-i} \mu^{k_i - iq} + o(\mu^{k_i - iq}).$$

Wählen wir nun insbesondere $q = q_\lambda$ und dividieren die Gl. (5) durch

$$\mu^{k_{e_\lambda} - e_\lambda q_\lambda},$$

so geht sie über in

$$p_m^{**}(\mu)\, x_\mu + p_{m-1}^{**}(\mu)\, x_{\mu+1} + \cdots + p_1^{**}(\mu)\, x_{\mu+m-1} + p_0^{**}(\mu)\, x_{\mu+m} = 0, \tag{6}$$

wobei nun

$$p_i^{**}(\mu) = A_i G^{-i} \mu^{(k_i - iq_\lambda) - (k_{e_\lambda} - e_\lambda q_\lambda)} + o(\mu^0) \qquad (\text{mit } A_0 = 1)$$

ist. Insbesondere ist also $p_i^{**}(\mu) = o(\mu^0)$ für alle i, bei denen $k_i - iq_\lambda < k_{e_\lambda} - e_\lambda q_\lambda$ ist, also insbesondere für $i < e_\lambda$ und für $i > e_{\lambda+1}$; dagegen ist

$$p_i^{**}(\mu) = A_i G^{-i} + o(\mu^0) \qquad \text{für} \qquad k_i - iq_\lambda = k_{e_\lambda} - e_\lambda q_\lambda,$$

also insbesondere für $i = e_\lambda$ und $i = e_{\lambda+1}$.

Nunmehr können wir die Differenzengleichung (6) mit der Summengleichung (3) identifizieren. Dabei wird dann $a_\nu = 0$, $b_{\mu\nu} = 0$ für $\nu > m$, während für $\nu \leqq m$ noch immer $b_{\mu\nu} = o(\mu^0)$ wird, also für *alle* ν etwa $|b_{\mu\nu}| \leqq k_\mu \left(\frac{1}{2}\right)^\nu$ mit $\lim_{\mu\to\infty} k_\mu = 0$, wie in Satz B verlangt. Die Funktion $F(z)$ von Satz B aber wird diese:

$$\sum_i^{(\lambda)} A_i G^{-i} z^{m-i},$$

wo sich die Summe $\sum^{(\lambda)}$ über dieselben Werte i erstreckt wie in (2). Die Gleichung $F(z) = 0$ ist daher vom Grad $m - e_\lambda$, und ihre Wurzeln sind, wenn man G groß genug wählt, sämtlich absolut $\leqq 1$. Nach Satz B gibt es daher $m - e_\lambda$

linear unabhängige Lösungen, für welche $\overline{\lim}\sqrt[\mu]{|x_\mu|} \leqq 1$ ist, was nach (4) mit $q = q_\lambda$ soviel besagt wie

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|D_\mu|\,(\mu!)^{-q_\lambda}} \leqq G,$$

und daraus folgt dann

$$\underline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{\log\left|\frac{1}{D_\mu}\right|}{\log(\mu!)} \geqq -q_\lambda.$$

Ebenso gibt es $m - e_{\lambda+1}$ linear unabhängige Lösungen, für welche sogar

$$\underline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{\log\left|\frac{1}{D_\mu}\right|}{\log(\mu!)} \geqq -q_{\lambda+1}$$

ist. Diese sind natürlich unter den $m - e_\lambda$ vorhin gewonnenen mit dabei, so daß man noch $e_{\lambda+1} - e_\lambda$ linear unabhängige Lösungen hat, für die

$$-q_\lambda \leqq \underline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{\log\left|\frac{1}{D_\mu}\right|}{\log(\mu!)} < -q_{\lambda+1}$$

ist. Dabei kann aber links nur das Gleichheitszeichen gelten. Denn wenn man in (4) für q den Wert $q_\lambda - \varepsilon$ mit beliebig kleinem ε wählt, so zeigt eine analoge Analyse, daß es auch nur $m - e_{\lambda+1}$ linear unabhängige Lösungen gibt, für die

$$\underline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{\log\left|\frac{1}{D_\mu}\right|}{\log(\mu!)} \geqq -q_\lambda + \varepsilon$$

ist, und das sind natürlich diejenigen, für welche der $\underline{\lim}$ sogar $\geqq -q_{\lambda+1}$ wird, so daß er nicht $< -q_{\lambda+1}$ sein kann. Bei dieser Wahl von q wird die Gleichung $F(z) = 0$ nämlich vom Grad $m - e_{\lambda+1}$ und hat lauter verschwindende Wurzeln. Damit ist der erste Teil von Satz A vollständig bewiesen.

Zum Beweis des zweiten Teiles von Satz A wählen wir in (4) wieder $q = q_\lambda$, aber $G = \sigma_l$. Dann wird

$$F(z) = \sum_i^{(\lambda)} A_i \sigma_l^{-i} z^{m-i}.$$

Die Gleichung $F(z) = 0$ ist also wieder vom Grad $m - e_\lambda$ und hat $m - e_{\lambda+1}$ verschwindende Wurzeln, außerdem aber noch $j_1 + j_2 + \cdots + j_l$ weitere Wurzeln, deren Betrag $\leqq 1$ ist. Nach Satz B gibt es also

$$m - e_{\lambda+1} + j_1 + j_2 + \cdots + j_l$$

linear unabhängige Lösungen, für die $\overline{\lim_{\mu\to\infty}}\sqrt[\mu]{|x_\mu|} \leqq 1$ ist, was wegen (4) mit $q = q_\lambda$ und $G = \sigma_l$ soviel besagt wie

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|D_\mu|\,(\mu!)^{-q_\lambda}} \leqq \sigma_l.$$

Entsprechend gibt es auch $m-e_{\lambda+1}+j_1+j_2+\cdots+j_{l-1}$ linear unabhängige Lösungen, für die sogar

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}}\sqrt[\mu]{|D_\mu|\,(\mu!)^{-q_\lambda}}\leqq\sigma_{l-1}$$

ist. Diese sind natürlich unter den $m-e_{\lambda+1}+j_1+\cdots+j_l$ vorhin gewonnenen mit dabei, so daß man noch j_l linear unabhängige Lösungen hat, für die

$$\sigma_{l-1}<\overline{\lim_{\mu\to\infty}}\sqrt[\mu]{|D_\mu|\,(\mu!)^{-q_\lambda}}\leqq\sigma_l$$

ist. Dabei kann aber rechts nur das Gleichheitszeichen gelten. Denn wenn man für G den Wert $\sigma_l-\varepsilon$ mit beliebig kleinem ε wählt, so zeigt eine analoge Analyse, daß es auch nur $m-e_{\lambda+1}+j_1+\cdots+j_{l-1}$ linear unabhängige Lösungen gibt, für die

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}}\sqrt[\mu]{|D_\mu|\,(\mu!)^{-q_\lambda}}\leqq\sigma_l-\varepsilon$$

ist, und das sind natürlich diejenigen, für welche der $\overline{\lim}$ sogar $\leqq\sigma_{l-1}$ wird, so daß er nicht $>\sigma_{l-1}$ sein kann. Damit ist auch der zweite Teil von Satz A bewiesen.

§ 3. Die spezielle Differentialgleichung

$$y^{(m)}+\sum_{i=1}^{m}(a_{i0}+a_{i1}x+\cdots+a_{i,m-i}x^{m-i})\,y^{(m-i)}=0$$

Integriert man diese Gleichung durch den Ansatz

$$y=D_0+D_1x+D_2x^2+\cdots,$$

so ergibt sich für die Koeffizienten D_μ die Differenzengleichung m-ter Ordnung

$$(7)\quad(\mu+m)(\mu+m-1)\dots(\mu+1)\,D_{\mu+m}+f_1(\mu)\,D_{\mu+m-1}+\cdots+f_m(\mu)\,D_\mu=0$$

für $\mu=0,1,2,\dots$. Dabei sind die $f_k(\mu)$ Polynome höchstens $(m-1)$-ten Grades von μ, nämlich

$$f_k(\mu)=\sum_{i=1}^{k}a_{i,k-i}(\mu-k+m)(\mu-k+m-1)\dots(\mu-k+i+1)\quad\text{für } k<m,$$

$$f_m(\mu)=\sum_{i=1}^{m-1}a_{i,m-i}\,\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-m+i+1)+a_{m0}.$$

Wenn $f_m(\mu)$ für keinen der Werte $\mu=0,1,2,\dots$ verschwindet, so ist die Gl. (7) nach Division durch $(\mu+m)(\mu+m-1)\dots(\mu+1)$ eine Differenzengleichung von der Form (1) in Satz A. Der NP-Streckenzug hängt von den Graden der $f_k(\mu)$ ab und diese von dem Verschwinden oder Nichtverschwinden gewisser $a_{i,k-i}$; er kann in jedem Fall leicht aufgezeichnet werden. Ebenso können die zu den verschiedenen Strecken gehörigen Gleichungen $F(z)=0$ sofort hingeschrieben werden.

Ist zum Beispiel $a_{1,m-1} \neq 0$, so ist $f_m(\mu)$ vom Grad $m-1$, und zwar gleich $a_{1,m-1} \cdot \mu^{m-1} + o(\mu^{m-1})$. Der NP-Streckenzug besteht nur aus der einen Strecke von P_0 nach P_m. Ihr Richtungskoeffizient ist $-1/m$ und die zugehörige Gleichung $F(z) = 0$ lautet $z^m + a_{1,m-1} = 0$. Also haben alle Integrale der Differentialgleichung die Koeffizientenordnung $\varrho = 1/m$ und den zugehörigen Typus $\sigma = |a_{1,m-1}|^{1/m}$. Ist dagegen $a_{1,m-1} = 0$ und etwa auch $a_{2,m-2} = 0$, $a_{1,m-2} = 0$, aber $a_{3,m-3} \neq 0$, $a_{1,m-3} \neq 0$, dann ist

$$f_m(\mu) = a_{3,m-3} \cdot \mu^{m-3} + o(\mu^{m-3}),$$
$$f_{m-1}(\mu) = a_{2,m-3} \cdot \mu^{m-2} + o(\mu^{m-2}),$$
$$f_{m-2}(\mu) = a_{1,m-3} \cdot \mu^{m-1} + o(\mu^{m-1}).$$

Der NP-Streckenzug besteht aus zwei Strecken: eine von P_0 nach P_{m-2} mit dem Richtungskoeffizienten $-1/(m-2)$ und eine von P_{m-2} nach P_m mit dem Richtungskoeffizienten -1. Die zur ersten Strecke gehörige Gleichung $F(z) = 0$ lautet $z^m + a_{1,m-3} z^2 = 0$, die zur zweiten Strecke gehörige lautet $a_{1,m-3} z^2 + a_{2,m-3} z + a_{3,m-3} = 0$. Daher gibt es $m-2$ Integrale von der Koeffizientenordnung $1/(m-2)$ und dem zugehörigen Typus $|a_{1,m-3}|^{1/(m-2)}$, außerdem zwei Integrale von der Koeffizientenordnung 1 und den zugehörigen Typen

$$\left| \frac{-a_{2,m-3} \pm \sqrt{a_{2,m-3}^2 - 4 a_{1,m-3} \cdot a_{3,m-3}}}{2 a_{1,m-3}} \right|,$$

die voneinander verschieden oder auch einander gleich sein können.

§ 4. Der allgemeine Fall

Wenn die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$y^{(m)} + P_1(x)\, y^{(m-1)} + \cdots + P_m(x)\, y = 0 \tag{8}$$

nicht die spezielle Form des vorigen Paragraphen haben, wenn also $P_i(x)$ für wenigstens ein i von höherem als dem $(m-i)$-ten Grad ist und man integriert wieder durch die Reihe $y = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \cdots$, so wird die Differenzengleichung für die D_μ von höherer als der m-ten Ordnung, etwa von der Ordnung $m+k$:

$$\begin{cases} (\mu+m) \ldots (\mu+1)\, D_{\mu+m} + \\ \qquad + f_1(\mu)\, D_{\mu+m-1} + \cdots + f_m(\mu)\, D_\mu + \cdots + f_{m+k}(\mu)\, D_{\mu-k} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

für $\mu = 0, 1, 2, \ldots$. Dabei ist $D_{-1} = D_{-2} = \cdots = D_{-k} = 0$ zu setzen.

Die Differenzengleichung (9) hat nun, wenn $f_{m+k}(\mu)$ für kein μ verschwindet, $m+k$ linear unabhängige Lösungen und aus dem zugehörigen NP-Streckenzug kann man Ordnung und Typus bestimmen. Aber diese können für die Differentialgleichung nicht alle in Frage kommen, weil sie ja nicht $m+k$, sondern

nur m Integrale hat. Nur bei m Lösungen der Differenzengleichung werden $D_{-1}, D_{-2}, \ldots$ und D_{-k} verschwinden; nur diese m Lösungen liefern Integrale der Differentialgleichung und man kann nicht allgemein sagen, für *welche* Ordnungen und Typen das zutrifft. Einige Spezialfälle dieser Art sind von WITTICH **1, 2** und PÖSCHL **1, 2, 3** auf anderem Weg untersucht worden.

Man kann nun aber neben der homogenen Differentialgleichung (8) auch die inhomogene betrachten:

$$y^{(m)} + P_1(x)\, y^{(m-1)} + \cdots + P_m(x)\, y = H(x), \tag{10}$$

wo $H(x)$ ein Polynom vom Grad $k-1$ oder kleinerem ist:

$$H(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots + h_{k-1} x^{k-1}$$

Löst man diese wieder durch den Ansatz $y = D_0 + D_1 x + D_2 x^2 + \cdots$, so kommt für die D_μ die gleiche Rekursionsformel (9) mit dem Unterschied, daß auf der rechten Seite für $\mu < k$ nicht 0, sondern h_μ steht. Betrachtet man nun die Differenzengleichung (9) nur für $\mu \geqq k$, so hat sie $m+k$ linear unabhängige Lösungen $D_0, D_1, D_2, \ldots$ mit den aus dem NP-Streckenzug sich ergebenden Ordnungen und Typen. Setzt man eine solche Lösung in die Gln. (9) mit $\mu < k$ und rechts h_μ statt 0 ein, so erhält man daraus die h_μ, also das Polynom $H(x)$, für welches die Reihe ein Integral der Gl. (10) ist. Bei m Lösungen der Differenzengleichung (9) für $\mu \geqq k$ werden sich dabei lauter verschwindende h_μ ergeben, so daß man Integrale der homogenen Differentialgleichung bekommt. Aber für *welche* Lösungen das eintritt, kann man nicht ohne weiteres entscheiden.

Man kann sich die gleiche Sache auch so überlegen: Betrachtet man statt der Gl. (8) die k-mal differenzierte Gleichung

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[y^{(m)} + P_1(x)\, y^{(m-1)} + \cdots + P_m(x)\, y\right] = 0, \tag{11}$$

so hat diese die spezielle Form des § 3 und man kann wie dort die Ordnungen und zugehörigen Typen bestimmen. Aber man hat dann eben nicht die Gl. (8), sondern die Gl. (11) integriert, und aus (11) folgt nicht (8), sondern nur (10).

Ein Wort wäre noch zu sagen über den bisher ausgeschlossenen Fall, daß das Polynom $f_m(\mu)$ in Gl. (7) bzw. $f_{m+k}(\mu)$ in (9) für einige Werte von μ verschwindet oder vielleicht sogar für alle μ, so daß die Differenzengleichung von geringerer Ordnung wird. Man sieht leicht, daß dann die Gleichung des § 3 bzw. die Gl. (10) mit passendem $H(x)$ wenigstens ein Integral hat, das ein Polynom von x ist. Aber für die transzendenten Integrale sind Ordnung und Typus stets durch den NP-Streckenzug gegeben, und zwar kommen alle aus dem Streckenzug und den zugehörigen Gleichungen $F(z) = 0$ resultierenden Ordnungen und Typen wirklich vor, sofern man neben der homogenen auch die inhomogene Differentialgleichung betrachtet.

Literatur

KREUSER, P.: **1.** Über das Verhalten der Integrale homogener linearer Differenzengleichungen im Unendlichen. Diss. Tübingen 1914.

PERRON, O.: **1.** Über lineare Differenzengleichungen. Acta math., Stockh. **34**, 109–137 (1910). – **2.** Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. Acta math., Stockh. **34**, 139–163 (1910). – **3.** Über Summengleichungen und Poincarésche Differenzengleichungen. Math. Ann. **84**, 1–15 (1921).

PÖSCHL, K.: **1.** Zur Frage des Maximalbetrags der Lösungen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Polynomkoeffizienten. Math. Ann. **125**, 344–349 (1953). – **2.** Über Anwachsen und Nullstellenverteilung der ganzen transzendenten Lösungen linearer Differentialgleichungen. I. J. reine angew. Math. **199**, 121–138 (1958). – **3.** Über Anwachsen und Nullstellenverteilung der ganzen transzendenten Lösungen linearer Differentialgleichungen. II. J. reine angew. Math. **200**, 129–139 (1958).

WITTICH, H.: **1.** Ganze transzendente Lösungen algebraischer Differentialgleichungen. Math. Ann. **122**, 221–234 (1950). – **2.** Über das Anwachsen der Lösungen linearer Differentialgleichungen. Math. Ann. **124**, 277–288 (1952).

München 27, Friedrich-Herschel-Straße 11

(Eingegangen am 18. Oktober 1958)

BRAUER, R.
Math. Zeitschr. 72, 25–46 (1959)

Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung. II

LEON LICHTENSTEIN zum Gedächtnis

Von

RICHARD BRAUER

§ 1. Einleitung[1]

In Fortführung der Untersuchungen des ersten Teils[2]) betrachten wir die Blöcke von Charakteren einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ für eine fest gewählte Primzahl p. In § 2 werden in Erweiterung der Ergebnisse von I Beziehungen zwischen Blöcken von $\mathfrak{G}$ und Blöcken geeigneter Untergruppen von $\mathfrak{G}$ hergeleitet.

Sind $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{G}$ und sind $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ die irreduziblen modularen Charaktere von $\mathfrak{G}$, so gelten nach I (3.5) für p-reguläre Elemente $G \in \mathfrak{G}$ die Gleichungen

$$\chi_i(G) = \sum_j d_{ij} \varphi_j(G), \tag{1.1}$$

wo die d_{ij} die Zerlegungszahlen von $\mathfrak{G}$ (für p) sind. Man erhält ohne Schwierigkeit ähnliche Formeln für p-singuläre Elemente von $\mathfrak{G}$, wobei aber rechts anstelle der φ_j die irreduziblen modularen Charaktere gewisser Untergruppen $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots, \mathfrak{N}_r$ von $\mathfrak{G}$ auftreten (§ 3). Das Hauptergebnis der vorliegenden Arbeit (§ 6) besagt, daß, wenn man in den verallgemeinerten Formeln (1.1) den Charakter χ_i in einem festen Block B wählt, rechts nur die modularen Charaktere $\varphi_j^{(\varrho)}$ gewisser B zugeordneter Blöcke der Gruppen $\mathfrak{N}_\varrho$ auftreten können. Die Gesamtzahl dieser $\varphi_j^{(\varrho)}$ ist gleich der Zahl $\varkappa$ der Charaktere χ_i in B, und die in den Formeln auftretende Matrix der Koeffizienten ist quadratisch vom Grade $\varkappa$, nicht-singulär, und die Determinante ist im wesentlichen eine Potenz von p. Für die genaue Formulierung muß auf § 6 und § 7 verwiesen werden. In § 4 werden einige Hilfsbetrachtungen über Klassenalgebren gegeben, § 5 ist dem Beweis einiger Hilfssätze gewidmet. Schließlich werden in § 7 eine Reihe von Folgerungen gegeben.

Die Bezeichnungen sind wie in I gewählt. Hier sei nur erwähnt, daß Ω ein die g-ten Einheitswurzeln enthaltender algebraischer Zahlkörper endlichen Grades ist, wo $g = (\mathfrak{G}:1)$ die Ordnung von $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Es sei ν eine Erweiterung der p-adischen exponentiellen Bewertung der rationalen Zahlen auf Ω,

[1]) This research was supported in part by the United States Air Force under Contract No: AF 49 (638)-287 monitored by the AF Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command.

[2]) Die erste Mitteilung ist in der Math. Z. **63**, 406–444 (1956) erschienen; sie wird im folgenden mit I zitiert.

$\nu(\mathfrak{p}) = 1$; es sei $\mathfrak{o}_\nu$ der Ring der für ν ganzen Zahlen von Ω, $\mathfrak{p}_\nu$ das zugehörige Primideal und schließlich

$$\Omega^* = \mathfrak{o}_\nu/\mathfrak{p}_\nu$$

der Restklassenkörper.

Schreiben wir eine Matrix $A = (a_{ij})$, so ist *stets* der Zeilenindex mit i, der Spaltenindex mit j bezeichnet. Der Wertebereich der Indizes i und j ist in der Regel aus dem Zusammenhang zu entnehmen. Ist z.B. $R_1, R_2, \ldots, R_l$ ein Vertretersystem für die p-regulären Klassen von $\mathfrak{G}$, so ist $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_j(R_i))$ die Matrix l-ten Grades der irreduziblen modularen Charaktere von $\mathfrak{G}$.

Wir geben hier noch eine Ergänzung zu der in I § 3 entwickelten Theorie der modularen Charaktere. Es sei $(n(R_i)\delta_{ij}) = N$ die aus den Ordnungen $n(R_i)$ der Normalisatoren $\mathfrak{N}(R_i)$ der Elemente R_i gebildete Diagonalmatrix. Es sei $C = (c_{ij})$ die Matrix der Cartanschen Invarianten von $\mathfrak{G}$, vgl. I (3.8). Aus I (3 G) folgt dann

$$\bar{\boldsymbol{\varphi}}' C \boldsymbol{\varphi} = N, \tag{1.2}$$

also

$$C \boldsymbol{\varphi} N^{-1} \bar{\boldsymbol{\varphi}}' = E = (\delta_{ij}). \tag{1.3}$$

Ich benütze die Gelegenheit, einige Ungenauigkeiten in I zu berichtigen. Auf S. 416, Zeile 21 ersetze man Z durch Z^*. Auf S. 423, Zeile 17 ist vor „Elementarteiler" das Wort „anderen" hinzuzufügen. Herr H. WIELANDT macht mich darauf aufmerksam, daß beim Beweis von (6E) die Elementarteiler in bezug auf den Ring der ganzen rationalen Zahlen zu nehmen sind (vgl. dazu Anmerkung [9]) von I). Auf S. 427, Zeile 6 muß das Wort „eineindeutig" gestrichen werden. In (11.1) ist die Summe durch $\sum_{\varrho=1}^{r} \vartheta_\varrho$ zu ersetzen. Auf S. 434, Zeile 27 muß es $\bar{B}$ anstatt B heißen. Auf S. 435, Zeile 2 werde das Wort „Darstellung" durch „Charakter" ersetzt. Auf S. 436, Zeile 17 streiche man die Worte „und daß die Ordnung von $\bar{\mathfrak{N}}(\bar{T}_j)$ zu p teilerfremd ist". Die Beziehung (11.9) muß $\nu(T_j) \geqq d$ lauten, in (11.10) werde die Summe durch $\sum_{\varrho=1}^{r} \vartheta_\varrho(W)$ ersetzt und in der folgenden Zeile muß es $\nu(g/x_i) - \nu(T_j) \leqq 0$ (anstelle von Gleichheit) heißen. Auf S. 437 muß die Zeile 14 ersetzt werden durch „Block, und ist χ_i ein Charakter von B, dessen Kern $\mathfrak{D}$ enthält, so ist für Elemente $W : \mathfrak{W}$:". Schließlich füge man auf S. 437, Zeile 29 vor $\tilde{\chi}_j$ das Wort „geeignetes" hinzu.

§ 2. Beziehungen zwischen Blöcken von $\mathfrak{G}$ und Blöcken von Untergruppen

Wie in I § 2 sei $Z(\mathfrak{G}, \Xi)$ die Klassenalgebra der Gruppe $\mathfrak{G}$ über dem beliebigen Körper Ξ. Sind $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_k$ die Klassen konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$ und setzt man

$$K_\alpha = \sum_{\sigma \in \mathfrak{K}_\alpha} \sigma \qquad (\text{für } \alpha = 1, 2, \ldots, k),$$

so ist $Z(G, \Xi)$ ein Vektorraum mit der Basis $K_1, K_2, \ldots, K_k$. Es ist klar, was man unter einer *linearen Funktion* f in $Z(\mathfrak{G}, \Xi)$ zu verstehen hat. Dabei ist f eindeutig durch die Werte $f(K_1), f(K_2), \ldots, f(K_k)$ bestimmt, und man kann diese k Werte als beliebige k Elemente von Ξ vorschreiben.

Es sei $\widetilde{\mathfrak{G}}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Wir verwenden für $\widetilde{\mathfrak{G}}$ durchgehend dieselben Bezeichnungen wie für $\mathfrak{G}$ unter Hinzufügung eines $\sim$-Zeichens. So werden z. B. die Klassen von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ mit $\widetilde{\mathfrak{K}}_1, \widetilde{\mathfrak{K}}_2, \ldots$ bezeichnet. Ist h eine lineare Funktion in $Z(\widetilde{\mathfrak{G}}, \Xi)$, so definieren wir eine mit $h^{\mathfrak{G}}$ bezeichnete lineare Funktion in $Z(\mathfrak{G}, \Xi)$ durch die Festsetzung

$$h^{\mathfrak{G}}(K_\alpha) = \sum_{\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta \subseteq \mathfrak{K}_\alpha} h(\widetilde{K}_\beta), \tag{2.1}$$

wo also $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ die in $\mathfrak{K}_\alpha$ enthaltenen Klassen von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ durchläuft. Ist $\mathfrak{A}$ eine zwischen $\mathfrak{G}$ und $\widetilde{\mathfrak{G}}$ gelegene Gruppe, so ist offenbar

$$(h^{\mathfrak{A}})^{\mathfrak{G}} = h^{\mathfrak{G}}. \tag{2.2}$$

Wir wählen jetzt $\Xi = \Omega^*$. Dann hat man eine eineindeutige Zuordnung zwischen den linearen Charakteren $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_t$ von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ (d. h. zwischen den Algebra-Homomorphismen ψ_τ von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ auf Ω^*) und den p-Blöcken $B_1, B_2, \ldots, B_t$ von $\mathfrak{G}$.

Es sei $\tilde{\psi}$ ein linearer Charakter von $Z(\widetilde{\mathfrak{G}}, \Omega^*)$, der zu dem p-Block $\widetilde{B}$ von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ gehöre. Ist dann $\psi = \tilde{\psi}^{\mathfrak{G}}$ ein linearer Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$, so gehört ψ zu einem p-Block B von $\mathfrak{G}$. Dann wollen wir

$$B = \widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$$

schreiben. Es ist aber zu beachten, daß ψ kein linearer Charakter von $\mathfrak{G}$ zu sein braucht, so daß $\widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$ nicht immer definiert ist.

(2A) *Es sei $\mathfrak{Q}$ eine p-Untergruppe von $\mathfrak{G}$, es sei $\mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$ der Zentralisator von $\mathfrak{Q}$ und es sei $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe des Normalisators $\mathfrak{N}(\mathfrak{Q})$ von $\mathfrak{Q}$, derart daß $\mathfrak{H} \supseteq \mathfrak{Q}\mathfrak{T}$ ist. Ist $\widetilde{B}$ ein Block von $\mathfrak{H}$, so ist der p-Block $B = \widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$ stets definiert (und es ist B gerade der $\widetilde{B}$ nach* I (7E) *zugeordnete Block von $\mathfrak{G}$).*

Beweis. Man wähle $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{H}$. Ist $\tilde{\psi}$ der zu $\widetilde{B}$ gehörige lineare Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$, so zeigt Vergleich von (2.1) für $h = \tilde{\psi}$ mit I (7.3), daß es genügt $\tilde{\psi}(\widetilde{K}_\beta) = 0$ für diejenigen Klassen $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ zu zeigen, die nicht in $\mathfrak{T}$ liegen. Da $\mathfrak{T} \lhd \widetilde{\mathfrak{G}}$ ist (d. h. $\mathfrak{T}$ eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{G}$), ist dann $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta \cap \mathfrak{T} = \emptyset$. Wäre nun $\tilde{\psi}(\widetilde{K}_\beta) \neq 0$, so würde aus I (8A) folgen, daß der Zentralisator $\widetilde{\mathfrak{N}}(\widetilde{G})$ eines Elementes $\widetilde{G} \in \widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ in $\widetilde{\mathfrak{G}}$ eine Defektgruppe $\widetilde{\mathfrak{D}}$ von $\widetilde{B}$ enthält. Wegen I (9F) gilt $\mathfrak{Q} \subseteq \widetilde{\mathfrak{D}}$. Also folgt $\widetilde{G} \in \mathfrak{C}(\widetilde{\mathfrak{D}}) \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{Q}) = \mathfrak{T}$, was einen Widerspruch ergibt.

Aus (2A) ergibt sich, daß die Zuordnung $\widetilde{B} \to B$ in I (7E) nicht von $\mathfrak{Q}$ abhängt, falls $\mathfrak{H}$ die Voraussetzungen für verschiedene Wahlen von $\mathfrak{Q}$ erfüllt.

(2B) *Ist $\tilde{B}$ ein Block einer beliebigen Untergruppe $\tilde{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ und ist $\tilde{B}^{\mathfrak{G}} = B$ definiert, so kann die Defektgruppe $\mathfrak{D}$ von B so gewählt werden, daß sie eine gegebene Defektgruppe $\tilde{\mathfrak{D}}$ von $\tilde{B}$ enthält.*

Dies kann in derselben Weise wie I(8D) bewiesen werden.

Aus (2.2) ergibt sich:

(2C) *Es seien $\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{G}}$ zwei Untergruppen von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{A} \geqq \tilde{\mathfrak{G}}$ und es sei $\tilde{B}$ ein Block von $\tilde{\mathfrak{G}}$. Sind $\tilde{B}^{\mathfrak{A}}$ und $\tilde{B}^{\mathfrak{G}}$ definiert, so ist $(\tilde{B}^{\mathfrak{A}})^{\mathfrak{G}}$ definiert und $(\tilde{B}^{\mathfrak{A}})^{\mathfrak{G}} = \tilde{B}^{\mathfrak{G}}$. Sind $\tilde{B}^{\mathfrak{A}}$ und $(\tilde{B}^{\mathfrak{A}})^{\mathfrak{G}}$ definiert, so ist $\tilde{B}^{\mathfrak{G}}$ definiert.*

Weiterhin zeigen wir:

(2D) *Es sei B ein Block von $\mathfrak{G}$ mit der Defektgruppe $\mathfrak{D}$. Im Sinne von* I(12A) *werde B die Klasse $\{\vartheta\}$ von in $\mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ assoziierten Charakteren von $\mathfrak{D}\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ zugeordnet. Liegt ϑ im Block $\tilde{B}$ von $\mathfrak{D}\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$, so ist $B = \tilde{B}^{\mathfrak{G}}$. Auch $\tilde{B}$ hat die Defektgruppe $\mathfrak{D}$.*

Beweis. Es sei $\chi_i \in B$. Aus I(12.2) ergibt sich, daß der zu χ_i gehörige lineare Charakter ω_i von $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ die Kongruenz

$$\omega_i(G) \equiv \frac{1}{\vartheta(1)} \sum_T \vartheta(T) \pmod{\mathfrak{p}}$$

erfüllt, wo T die Elemente der Klasse $\mathfrak{K}_\alpha$ von G durchläuft, die in $\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ liegen. Ist also $\tilde{\omega}$ der zu ϑ gehörige lineare Charakter von $Z(\mathfrak{D}\mathfrak{C}(\mathfrak{D}), \Omega)$, so ist

$$\omega_i(K_\alpha) \equiv \sum_{\tilde{\mathfrak{K}}_\beta \subseteq \mathfrak{K}_\alpha} \tilde{\omega}(\tilde{K}_\beta) \pmod{\mathfrak{p}}, \tag{2.3}$$

wo hier die Bezeichnung $\tilde{\mathfrak{K}}_\beta$ für die Klassen von $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{D}\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ verwendet ist. Entspricht B dem linearen Charakter ψ von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ und $\tilde{B}$ dem linearen Charakter $\tilde{\psi}$ von $Z(\tilde{\mathfrak{G}}, \Omega^*)$, so führt die Restklassenabbildung ω_i in ψ und $\tilde{\omega}$ in $\tilde{\psi}$ über. Jetzt zeigt (2.3), daß $\psi = \tilde{\psi}^{\mathfrak{G}}$, also $B = \tilde{B}^{\mathfrak{G}}$ ist. Da $\mathfrak{D} \lhd \mathfrak{D}\mathfrak{C}(\mathfrak{D})$ ist, zeigt I(9F), daß $\mathfrak{D}$ in der Defektgruppe $\tilde{\mathfrak{D}}$ von $\tilde{B}$ enthalten ist. Dann folgt aus (2B), daß $\mathfrak{D} = \tilde{\mathfrak{D}}$ ist.

Jetzt können wir (2A) folgendermaßen verallgemeinern:

(2E) *Es sei $\tilde{\mathfrak{G}}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und $\tilde{B}$ ein Block von $\tilde{\mathfrak{G}}$ mit der Defektgruppe $\tilde{\mathfrak{D}}$. Enthält $\tilde{\mathfrak{G}}$ den Zentralisator $\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{D}})$ von $\tilde{\mathfrak{D}}$ in $\mathfrak{G}$, so ist $\tilde{B}^{\mathfrak{G}}$ definiert.*

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt, daß $\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{D}})$ auch der Zentralisator von $\tilde{\mathfrak{D}}$ in $\tilde{\mathfrak{G}}$ ist. Wendet man (2D) auf $\tilde{\mathfrak{G}}$ und $\tilde{B}$ an, so folgt, daß es einen Block B^* von $\tilde{\mathfrak{D}}\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{D}})$ gibt, für den $\tilde{B} = (B^*)^{\tilde{\mathfrak{G}}}$ gilt. Andererseits ist $(B^*)^{\mathfrak{G}} = B$ nach (2A) definiert. Aus (2C) folgt, daß $\tilde{B}^{\mathfrak{G}}$ definiert und gleich B ist.

Sind $\tilde{B}$ und B wie in (2B) gewählt, so ergibt sich für die Defekte $\tilde{d}$ und d die Ungleichung

$$\tilde{d} \leqq d. \tag{2.4}$$

Wir behandeln einen Fall, in dem (2.4) verschärft werden kann:

(2F) *Es sei $\mathfrak{Q}$ eine p-Untergruppe von $\mathfrak{G}$, und es sei $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{Q}\mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$. Es sei $\tilde{\chi}$ ein irreduzibler Charakter von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{S}$ seine Trägheitsgruppe in $\mathfrak{N}(\mathfrak{Q})$, und es sei $\varrho = \nu(\mathfrak{S}:\widetilde{\mathfrak{G}})$. Gehört $\tilde{\chi}$ zu dem Block $\widetilde{B}$ von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ mit der Defektgruppe $\widetilde{\mathfrak{D}}$, so ist $B = \widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$ definiert, und seine Defektgruppe $\mathfrak{D}$ kann so gewählt werden, daß $\mathfrak{D} \geqq \widetilde{\mathfrak{D}}$ und $(\mathfrak{D} \cap \mathfrak{S} : \mathfrak{D} \cap \widetilde{\mathfrak{G}}) = p^{\varrho}$ ist. Hat B den Defekt d und $\widetilde{B}$ den Defekt $\tilde{d}$, so ist*

$$d \geqq \tilde{d} + \varrho. \tag{2.5}$$

Beweis. Da $\mathfrak{Q} \lhd \widetilde{\mathfrak{G}}$ ist, ist $\mathfrak{Q} \subseteq \widetilde{\mathfrak{D}}$, also $\mathfrak{C}(\widetilde{\mathfrak{D}}) \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{Q}) \subseteq \widetilde{\mathfrak{G}}$. Daher ist $\widetilde{B}^{\mathfrak{G}} = B$ nach (2E) definiert.

Nach dem Sylowschen Satz gibt es eine Untergruppe $\mathfrak{A} \geqq \widetilde{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{S}$ mit $(\mathfrak{A}:\widetilde{\mathfrak{G}}) = p^{\varrho}$. Wir nehmen zunächst an, daß $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}$ ist. Ist χ ein irreduzibler Charakter in B, ist ω der zu χ gehörige lineare Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ und $\tilde{\omega}$ der zu $\tilde{\chi}$ gehörige lineare Charakter von $Z(\widetilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$, so gilt für alle α

$$\omega(K_\alpha) \equiv \sum_{\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta \subseteq \mathfrak{K}_\alpha} \tilde{\omega}(\widetilde{K}_\beta) \pmod{\mathfrak{p}_\nu}. \tag{2.6}$$

Ist $X \in \mathfrak{G}$ und ist $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta \subseteq \mathfrak{K}_\alpha$ eine Klasse von $\widetilde{\mathfrak{G}} \lhd \mathfrak{A} = \mathfrak{G}$, so ist $X^{-1}\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta X$ wieder eine Klasse $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta^X \subseteq \mathfrak{K}_\alpha$ von $\widetilde{\mathfrak{G}}$. Da jetzt $\mathfrak{G}$ die Trägheitsgruppe von $\tilde{\chi}$ ist, gilt $\tilde{\omega}(\widetilde{K}_\beta) = \tilde{\omega}(\widetilde{K}_\beta^X)$. Die Elemente X mit $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta^X = \widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ bilden eine Untergruppe $\mathfrak{R}_\beta \geqq \widetilde{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$. Dann ist die Anzahl der verschiedenen $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta^X$ gleich $(\mathfrak{G}:\mathfrak{R}_\beta)$, also ein Teiler von $(\mathfrak{G}:\widetilde{\mathfrak{G}}) = p^{\varrho}$ und daher eine Potenz von p. Es genügt also, $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ in (2.6) über diejenigen Klassen laufen zu lassen, für die $\mathfrak{R}_\beta = \mathfrak{G}$ ist. Entweder gibt es kein derartiges $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ und dann ist $\omega(K_\alpha) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$, oder $\mathfrak{K}_\alpha$ stimmt mit einem derartigen $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ überein und wir haben

$$\omega(K_\alpha) \equiv \tilde{\omega}(\widetilde{K}_\beta) \pmod{\mathfrak{p}_\nu}. \tag{2.7}$$

Aus der Definition der Defektgruppe $\mathfrak{D}$ von B ergibt sich, daß es Klassen $\mathfrak{K}_\alpha$ gibt, für die $\omega(K_\alpha) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$ ist, und für die $\mathfrak{D}$ p-Sylowuntergruppe des Normalisators $\mathfrak{N}(Y)$ von Elementen Y von $\mathfrak{K}_\alpha$ ist. Dann muß also $\mathfrak{K}_\alpha$ eine Klasse $\widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$ von $\widetilde{\mathfrak{G}}$ sein. Insbesondere ist $Y \in \widetilde{\mathfrak{G}}$. Sind $n(Y)$ und $\tilde{n}(Y)$ die Ordnungen der Normalisatoren $\mathfrak{N}(Y)$ und $\widetilde{\mathfrak{N}}(Y) = \mathfrak{N}(Y) \cap \widetilde{\mathfrak{G}}$ von Y in $\mathfrak{G}$ und in $\widetilde{\mathfrak{G}}$, so folgt aus $\mathfrak{K}_\alpha = \widetilde{\mathfrak{K}}_\beta$, daß $g/n(Y) = \tilde{g}/\tilde{n}(Y)$ ist. Wegen $(\mathfrak{G}:\widetilde{\mathfrak{G}}) = (\mathfrak{A}:\widetilde{\mathfrak{G}}) = p^{\varrho}$ ist also

$$n(Y) = p^{\varrho}\tilde{n}(Y). \tag{2.8}$$

Nach (2.7) ist $\tilde{\omega}(\widetilde{K}_\beta) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$. Daher enthält $\widetilde{\mathfrak{N}}(Y)$ nach I (8A) eine Defektgruppe $\widetilde{\mathfrak{D}}$ von $\widetilde{B}$. Ersetzt man nötigenfalls $\mathfrak{D}$ durch eine Konjugierte, so kann man annehmen, daß $\widetilde{\mathfrak{D}}$ zu der Sylowgruppe $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{N}(Y)$ gehört.

Dann zeigt (2.8), daß $(\mathfrak{D}:\tilde{\mathfrak{D}}) \geqq p^{\varrho}$ ist, daß also für die Defekte d und $\tilde{d}$ die Ungleichung $d \geqq \tilde{d}+\varrho$ gilt. Aus (2.8) folgt leicht, daß $(\mathfrak{D}:\mathfrak{D}\cap\tilde{\mathfrak{G}}) = p^{\varrho}$ ist. Da $\mathfrak{D}\tilde{\mathfrak{G}}/\tilde{\mathfrak{G}} \cong \mathfrak{D}/\mathfrak{D}\cap\tilde{\mathfrak{G}}$ ist, haben wir $\mathfrak{G} = \mathfrak{D}\tilde{\mathfrak{G}}$.

Kehren wir zu dem Fall eines beliebigen $\mathfrak{G} \geqq \mathfrak{A}$ zurück! Da $\tilde{\mathfrak{G}} \geqq \mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{D}})$ war, enthält $\tilde{\mathfrak{G}}$ den Zentralisator $\mathfrak{C}(\tilde{\mathfrak{D}})\cap\mathfrak{A}$ von $\tilde{\mathfrak{D}}$ in $\mathfrak{A}$ und nach (2E) ist der Block $\hat{B} = \tilde{B}^{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ definiert. Wendet man die vorangehenden Betrachtungen auf $\mathfrak{A}$ anstelle von $\mathfrak{G}$ an, so zeigt sich, daß die Defektgruppe $\hat{\mathfrak{D}}$ von $\hat{B}$ so gewählt werden kann, daß sie $\tilde{\mathfrak{D}}$ enthält und daß $(\hat{\mathfrak{D}}:\tilde{\mathfrak{D}}) \geqq p^{\varrho}$ und $\mathfrak{A} = \hat{\mathfrak{D}}\tilde{\mathfrak{G}}$ ist.

Nach (2E) und (2C) ist $\hat{B}^{\mathfrak{G}}$ definiert und $\tilde{B}^{\mathfrak{G}} = \hat{B}^{\mathfrak{G}}$. Wegen (2B) kann die Defektgruppe $\mathfrak{D}$ von B so gewählt werden, daß $\mathfrak{D} \geqq \hat{\mathfrak{D}}$ ist. Daher ist $(\mathfrak{D}:\tilde{\mathfrak{D}}) \geqq p^{\varrho}$. Ferner haben wir $\hat{\mathfrak{D}} \subseteqq \mathfrak{D}\cap\mathfrak{S}$, also $((\mathfrak{D}\cap\mathfrak{S})\tilde{\mathfrak{G}}:\tilde{\mathfrak{G}}) \geqq (\hat{\mathfrak{D}}\tilde{\mathfrak{G}}:\tilde{\mathfrak{G}}) = (\mathfrak{A}:\tilde{\mathfrak{G}}) = p^{\varrho}$. Andererseits ist

$$((\mathfrak{D}\cap\mathfrak{S})\tilde{\mathfrak{G}}:\tilde{\mathfrak{G}}) = (\mathfrak{D}\cap\mathfrak{S}:\mathfrak{D}\cap\mathfrak{S}\cap\tilde{\mathfrak{G}}) = (\mathfrak{D}\cap\mathfrak{S}:\mathfrak{D}\cap\tilde{\mathfrak{G}}).$$

Dieser Index ist eine Potenz von p, die $(\mathfrak{S}:\tilde{\mathfrak{G}})$ teilt und daher höchstens gleich p^{ϱ} ist. Also ist $(\mathfrak{D}\cap\mathfrak{S}:\mathfrak{D}\cap\tilde{\mathfrak{G}}) = p^{\varrho}$. Damit ist (2F) bewiesen.

Wir behandeln noch den Zusammenhang zwischen den Blöcken von $\mathfrak{Q}\mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$ und denen von $\mathfrak{Q}\mathfrak{C}(\mathfrak{Q})/\mathfrak{Q}$.

(2G) *Ist $\mathfrak{Q}$ eine p-Untergruppe von $\mathfrak{G}$, ist $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{Q}\mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$ und $\overline{\mathfrak{G}} = \tilde{\mathfrak{G}}/\mathfrak{Q}$, so hat man eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Blöcken $\tilde{B}$ von $\tilde{\mathfrak{G}}$ und den Blöcken $\overline{B}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$. Ist dabei $\bar{\chi}$ ein irreduzibler Charakter von $\overline{\mathfrak{G}}$ in $\overline{B}$, so gehört $\bar{\chi}$ als Charakter von $\tilde{\mathfrak{G}}$ betrachtet zu dem zugeordneten Block $\tilde{B}$. Ist $\tilde{\mathfrak{D}}$ die Defektgruppe von $\tilde{B}$, so kann die Defektgruppe von $\overline{B}$ als $\overline{\mathfrak{D}} = \tilde{\mathfrak{D}}/\mathfrak{Q}$ gewählt werden.*

Beweis. Aus I § 9 ergibt sich, daß jedem Block $\overline{B}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ ein Block $\tilde{B}$ von $\tilde{\mathfrak{G}}$ entspricht, derart daß wenn $\tilde{\chi}$ ein irreduzibler Charakter von $\overline{\mathfrak{G}}$ in $\overline{B}$ ist, $\tilde{\chi}$ als Charakter von $\tilde{\mathfrak{G}}$ in $\tilde{B}$ liegt. Jeder Block $\tilde{B}$ ist dabei mindestens einem $\overline{B}$ zugeordnet. Ist $(\mathfrak{Q}:1) = p^{\mu}$ und hat $\tilde{B}$ den Defekt $\tilde{d}$, so kann man $\overline{B}$ als Block vom Defekt $\tilde{d}-\mu$ wählen.

Es seien $\tilde{\chi}$ und $\bar{\chi}$ zwei Charaktere von $\tilde{\mathfrak{G}}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$, die in der genannten Weise zusammenhängen; es seien $\tilde{\omega}$ und $\bar{\omega}$ die zugehörigen linearen Charaktere von $Z(\tilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$ bzw. $Z(\overline{\mathfrak{G}}, \Omega)$. Durchläuft $\tilde{R}$ die p-regulären Elemente von $\tilde{\mathfrak{G}}$ und bezeichnet $\overline{R} = \tilde{R}\mathfrak{Q}$ das entsprechende Element von $\overline{\mathfrak{G}} = \tilde{\mathfrak{G}}/\mathfrak{Q}$, so folgt aus I(11A), daß $\overline{R}$ die p-regulären Elemente von $\overline{\mathfrak{G}}$ durchläuft, und daß der Normalisator von $\overline{R}$ in $\overline{G}$ gerade $\tilde{\mathfrak{N}}(\tilde{R})/\mathfrak{Q}$ ist (wo $\tilde{\mathfrak{N}}(\tilde{R})$ der Normalisator von $\tilde{R}$ in $\tilde{\mathfrak{G}}$ ist). Daraus ergibt sich

$$\tilde{\omega}(\tilde{R}) = \bar{\omega}(\overline{R}).$$

Jetzt zeigt I (6F), daß ein gegebener Block $\tilde{B}$ von $\tilde{G}$ nur als Bild eines einzigen Blocks $\overline{B}$ von $\overline{\mathfrak{G}}$ auftritt. Wählt man, was möglich ist, $\tilde{R}$ so, daß $\tilde{\omega}(\tilde{R}) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_*}$ und daß die p-Sylowgruppe $\tilde{\mathfrak{D}}$ von $\tilde{\mathfrak{N}}(\tilde{R})$ die Ordnung $p^{\tilde{d}}$ hat, so ist

$\widetilde{\mathfrak{D}}$ eine Defektgruppe von $\widetilde{B}$. Da dann $\widetilde{\mathfrak{D}}/\mathfrak{Q} = \overline{\mathfrak{D}}$ eine p-Sylowgruppe von $\widetilde{\mathfrak{N}}(\widetilde{R})/\mathfrak{Q}$ ist, ist $\overline{\mathfrak{D}}$ von der Ordnung $p^{d-\mu}$ eine Defektgruppe von $\overline{B}$.

BEMERKUNG. Soll in (2F) der Fall $\mathfrak{D} = \mathfrak{Q}$ eintreten, d.h. $d = \mu$ sein, so ergibt sich aus (2.5) und (2G), daß $\nu(\mathfrak{Z}:\widetilde{\mathfrak{G}}) = 0$ sein muß, und daß das zu $\widetilde{B}$ gehörige $\overline{B}$ den Defekt 0 haben muß. Dies zeigt erneut die Notwendigkeit der in I (12A) auftretenden Bedingungen.

§ 3. Verallgemeinerte Zerlegungszahlen[3])

Unter einem *p-Element* P von $\mathfrak{G}$ wollen wir ein Element verstehen, dessen Ordnung eine Potenz von p ist. Ein beliebiges Element G von $\mathfrak{G}$ läßt sich dann eindeutig als Produkt

$$G = PR \tag{3.1}$$

eines p-Elements P mit einem p-regulären Element R des Normalisators $\mathfrak{N}(P)$ von P schreiben. Dabei sind P und R geeignete Potenzen von G. Wir nennen P den *p-Faktor* von G und R den *p-regulären Faktor* von G.

Es seien $\varphi_1^P, \varphi_2^P, \ldots, \varphi_{l(P)}^P$ die irreduziblen modularen Charaktere von $\mathfrak{N}(P)$, also $l(P)$ die Anzahl der p-regulären Klassen von $\mathfrak{N}(P)$. Ist $\tilde{\chi}_\lambda$ ein irreduzibler Charakter von $\mathfrak{N}(P)$, so ist $\tilde{\omega}_\lambda(P) = \varepsilon_\lambda$ eine p^a-te Einheitswurzel, wo p^a die Ordnung von P bezeichnet. Weiter ist $\tilde{\chi}_\lambda(PR) = \tilde{\omega}_\lambda(P)\,\tilde{\chi}_\lambda(R) = \varepsilon_\lambda \tilde{\chi}_\lambda(R)$, und hier läßt sich $\tilde{\chi}_\lambda(R)$ nach (1.1) durch die $\varphi_i^P(R)$ ausdrücken.

Da die Beschränkung $\chi_i | \mathfrak{N}(P)$ sich aus den irreduziblen Charakteren $\tilde{\chi}_\lambda$ von $\mathfrak{N}(P)$ zusammensetzt, so hat man für p-reguläres $R \in \mathfrak{N}(P)$ Formeln

$$\chi_i(PR) = \sum_j d_{ij}^P \varphi_j^P(R), \tag{3.2}$$

wo die d_{ij}^P ganz algebraisch im Körper der p^a-ten Einheitswurzeln sind und nicht von R abhängen. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\varphi_1^P, \varphi_2^P, \ldots$ sind die d_{ij}^P eindeutig bestimmt; wir nennen sie die zu P gehörigen *verallgemeinerten Zerlegungszahlen* von $\mathfrak{G}$. Für $P = 1$ kommt man auf die Formeln (1.1), also auf die gewöhnlichen Zerlegungszahlen von $\mathfrak{G}$ zurück.

(3A) *Ist c_{ij}^P die zu φ_i^P, φ_j^P gehörige Cartansche Invariante von $\mathfrak{N}(P)$, so genügen die verallgemeinerten Zerlegungszahlen den Orthogonalitätsrelationen*

$$\sum_{\mu=1}^{k} \bar{d}_{\mu i}^P d_{\mu j}^P = c_{ij}^P. \tag{3.3}$$

Ist ferner Q ein nicht zu P konjugiertes p-Element von $\mathfrak{G}$, so ist

$$\sum_{\mu=1}^{k} \bar{d}_{\mu i}^P d_{\mu j}^Q = 0. \tag{3.4}$$

Beweis. Es sei $R_1^P, R_2^P, \ldots, R_{l(P)}^P$ ein Vertretersystem für die p-regulären Klassen von $\mathfrak{N}(P)$. Setzt man

$$\mathbf{\chi}^P = \left(\chi_i(PR_j^P)\right), \quad D^P = (d_{ij}^P), \quad \boldsymbol{\varphi}^P = \left(\varphi_i^P(R_j^P)\right), \quad C^P = (c_{ij}^P),$$

[3]) Zu den Ergebnissen von § 3 vgl. R. BRAUER, On the connection between the ordinary and the modular characters of groups of finite order. Ann. of Math. **42**, 926–935 (1941).

so zeigt (3.2), daß $\chi^P = D^P \varphi^P$ ist, also

$$(\chi^P)' \chi^Q = (\overline{\varphi}^P)' (\overline{D}^P)' D^Q \varphi^Q. \tag{3.5}$$

Für $P = Q$ ist nach den Orthogonalitätsrelationen für Gruppencharaktere die linke Seite die Diagonalmatrix $N^P = (n(PR_i^P)\delta_{ij})$, also wegen (1.2) (für $\mathfrak{N}(P)$ anstelle von $\mathfrak{G}$) gleich $(\overline{\varphi}^P)' C^P \varphi^P$. Da φ^P nicht singulär ist, folgt $C^P = (\overline{D}^P)' D^P$, was mit (3.3) gleichwertig ist. Sind P und Q nicht in $\mathfrak{G}$ konjugiert, so sind PR_α^P und QR_β^Q nicht in $\mathfrak{G}$ konjugiert. Dann verschwindet die linke Seite von (3.5), was $(\overline{D}^P)' D^Q = 0$ und damit (3.4) ergibt.

Aus $(\overline{\varphi}^P)' C^P \varphi^P = N^P$ folgt auch noch

$$\varphi^P (N^P)^{-1} (\overline{\varphi}^P)' C^P = E,$$

also wegen $\chi^P = D^P \varphi^P$ die Gleichung

$$\chi^P (N^P)^{-1} (\overline{\varphi}^P)' C^P = D^P.$$

Explizit geschrieben gibt dies

$$d_{ij}^P = \sum_{\alpha,\beta=1}^{l(P)} \chi_i(PR_\alpha^P)\, n(PR_\alpha^P)^{-1} \overline{\varphi}_\beta^P(R_\alpha^P)\, c_{\beta j}^P. \tag{3.6}$$

Es sei $g = p^a g_0$ mit ganzem, zu p teilerfremdem g_0, $a = \nu(g)$. Es bezeichne Ω_0 den Körper der g_0-ten und Ω_1 den Körper der p^a-ten Einheitswurzeln. Ist σ ein Element der Galoisschen Gruppe von Ω über Ω_0 und ist χ_i ein irreduzibler Charakter von $\mathfrak{G}$, so ist auch die algebraisch Konjugierte χ_i^σ ein irreduzibler Charakter χ_{i^*} von $\mathfrak{G}$. Da die modularen Charaktere von $\mathfrak{N}(P)$ Werte in Ω_0 haben, bleiben sie bei der Anwendung von σ fest. Daher folgt aus (3.2), daß

$$\chi_{i^*}(PR) = (\chi_i(PR))^\sigma = \sum_j (d_{ij}^P)^\sigma \varphi_j^P(R)$$

ist; man hat also

$$d_{i^*j}^P = (d_{ij}^P)^\sigma \quad \text{für} \quad \chi_{i^*} = \chi_i^\sigma. \tag{3.7}$$

Wir sagen, daß χ_i und $(\chi_i)^\sigma$ *p-konjugierte Charaktere* sind. Für $P = 1$ sieht man, daß sie dieselben modularen Bestandteile haben. Also gehören p-konjugierte Charaktere stets zum selben Block (z.B. nach I(4D)).

Unter der *Sektion* $\mathfrak{S}(P)$ eines p-Elements P wollen wir die Gesamtheit aller $G \in \mathfrak{G}$ verstehen, deren p-Faktor zu P in $\mathfrak{G}$ konjugiert ist. Offenbar ist $\mathfrak{S}(P)$ die Vereinigungsmenge der Klassen $\mathfrak{K}_\alpha$, die von den Elementen PR_1^P, $PR_2^P, \ldots, PR_{l(P)}^P$ repräsentiert werden; das sind genau $l(P)$ verschiedene Klassen. Ist $P_1, P_2, \ldots, P_r$ ein Vertretersystem für die p-Klassen von $\mathfrak{G}$, so gehört jedes $G \in \mathfrak{G}$ zu genau einer der Sektionen $\mathfrak{S}(P_1), \mathfrak{S}(P_2), \ldots, \mathfrak{S}(P_r)$. Daher ergibt sich für Klassenzahl von $\mathfrak{G}$ die Formel

$$k = \sum_{j=1}^{r} l(P_j). \tag{3.8}$$

Da Charaktere χ_i für konjugierte Elemente denselben Wert haben, genügt es, in (3.2) P das System $P_1, P_2, \ldots, P_r$ und bei festem P das Element R das System $R_1^P, R_2^P, \ldots, R_{l(P)}^P$ durchlaufen zu lassen.

Wir wollen noch sehen, wie sich d_{ij}^P ändert, wenn man P durch ein konjugiertes p-Element $Q = G^{-1}PG$ (mit $G \in \mathfrak{G}$) ersetzt. Dann ist $\mathfrak{N}(Q) = G^{-1}\mathfrak{N}(P)G$. Durchläuft R die p-regulären Elemente von $\mathfrak{N}(P)$, so durchläuft $R^G = G^{-1}RG$ die p-regulären Elemente von $\mathfrak{N}(Q)$. Setzt man

$$\varphi_i^Q(R^G) = \varphi_i^P(R), \tag{3.9}$$

so sind offenbar $\varphi_1^Q, \varphi_2^Q, \ldots, \varphi_{l(P)}^Q$ die irreduziblen modularen Charaktere von $\mathfrak{N}(Q)$. Aus

$$\chi_i(QR^G) = \chi_i(G^{-1}PRG) = \chi_i(PR)$$

ergibt sich mit Hilfe von (3.2) und (3.9), daß

$$\chi_i(QR^G) = \sum_j d_{ij}^P \varphi_j^Q(R^G)$$

ist, daß wir also

$$d_{ij}^Q = d_{ij}^P \tag{3.10}$$

haben.

§ 4. Ganzwertige lineare Funktionen in $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$

Wir wollen ein Element $\Sigma a_i K_i$ von $Z = Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ *ganz* nennen, wenn die Koeffizienten a_i zu $\mathfrak{o}_\nu$ gehören. Diese ganzen Elemente bilden einen Teilring $J = J(\mathfrak{G})$ von Z. Eine lineare Funktion f in $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ (vgl. § 2) soll *ganzwertig* genannt werden, wenn $f(\alpha) \in \mathfrak{o}_\nu$ für alle $\alpha \in J$ gilt. Diese ganzwertigen linearen Funktionen bilden einen $\mathfrak{o}_\nu$-Modul $\mathfrak{M}$ vom Rang k.

Wir können $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ mit $J/\mathfrak{p}_\nu J$ identifizieren. Ist $\zeta \in J$, so wird das durch Restklassenbildung erhaltene Element von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ durchgehend mit ζ^* bezeichnet werden.

Es seien $B_1, B_2, \ldots, B_t$ die p-Blöcke von $\mathfrak{G}$. Ist $G_i \in \mathfrak{K}_i$ und setzt man nach OSIMA[4])

$$\eta_\tau = \sum_{j=1}^{k} b_j^{(\tau)} K_j \tag{4.1}$$

mit

$$b_j^{(\tau)} = \frac{1}{g} \sum_{\chi_\mu \in B_\tau} \chi_\mu(1)\, \bar{\chi}_\mu(G_j), \tag{4.2}$$

so sind $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ ein System orthogonaler Idempotente von $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ mit der Summe 1. Ist ω_i der zu χ_i gehörige lineare Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$, so folgt nämlich aus (4.1) und (4.2) und den Orthogonalitätsrelationen für Gruppencharaktere, daß

$$\omega_i(\eta_\tau) = \begin{cases} 1 & \text{für } \chi_i \in B_\tau \\ 0 & \text{für } \chi_i \notin B_\tau \end{cases} \tag{4.3}$$

ist, woraus sich leicht die Behauptungen ergeben.

[4]) OSIMA, MASARU: Notes on blocks of group characters. Math. J. Okayama Univ. **4**, 175–188 (1955), p. 178.

Ferner gilt nach I(3.5) für die durch I(3.9) erklärten Charaktere Φ_i die Gleichung

$$b_j^{(\tau)} = \frac{1}{g} \sum_{\varphi_i \in B_\tau} \varphi_i(1)\, \bar{\Phi}_i(G_j).$$

Aus I(3F) folgt, daß $b_j^{(\tau)} = 0$ für p-singuläre G_j ist. Für p-reguläre G_j hat man nach (4.2), I(3.5) und I(3.9)

$$b_j^{(\tau)} = \frac{1}{g} \sum_{\varphi_i \in B_\tau} \Phi_i(1)\, \bar{\varphi}_i(G_j). \tag{4.4}$$

Aus I(3F) folgt, daß $b_j^{(\tau)} \in \mathfrak{o}_\tau$, daß also $\eta_\tau \in J$ ist. Aus (4.3) folgt auch noch, daß η_τ^* das in I § 4 auftretende Idempotent von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*)$ ist.

Wir wollen sagen, daß eine ganzwertige lineare Funktion f mit dem Block B_τ *assoziiert* ist, falls

$$f(\zeta \eta_\sigma) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\tau} \tag{4.5}$$

für alle $\zeta \in J$ und alle $\sigma \neq \tau$ gilt. Da ω_i ein linearer Charakter von Z ist und $\omega_i(\zeta) \in \mathfrak{o}_\tau$ ist, folgt aus (4.3), daß für $\chi_i \in B_\tau$ die ganzwertige lineare Funktion ω_i mit B_τ assoziiert ist.

Man setze

$$\mathfrak{M}_\tau = \mathfrak{M} \cap \sum_{\chi_i \in B_\tau} \Omega \omega_i. \tag{4.6}$$

Offenbar ist $\mathfrak{M}_\tau$ ein $\mathfrak{o}_\tau$-Modul, dessen Rang gleich der Anzahl k_τ der $\chi_i \in B_\tau$ ist.

(4A) *Sind $f_1^{(\tau)}, f_2^{(\tau)}, \ldots, f_{k_\tau}^{(\tau)}$ eine $\mathfrak{o}_\tau$-Basis von $\mathfrak{M}_\tau$ $(1 \leqq \tau \leqq t)$, so bilden die Funktionen $f_j^{(\tau)}$ für $\tau = 1, 2, \ldots, t$; $j = 1, 2, \ldots, k_\tau$ eine $\mathfrak{o}_\tau$-Basis von $\mathfrak{M}$. Dann und nur dann ist die lineare Funktion*

$$f = \sum_\tau \sum_j a_j^{(\tau)} f_j^{(\tau)} \qquad (a_j^{(\tau)} \in \mathfrak{o}_\tau) \tag{4.7}$$

mit B_σ assoziiert, wenn $a_j^{(\tau)} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ für alle $\tau \neq \sigma$ und $j = 1, 2, \ldots, k_\tau$ ist.

Beweis. Da wir im ganzen k Charaktere χ_i haben, ist

$$k = \sum_{\tau=1}^{t} k_\tau. \tag{4.8}$$

Also besteht das System $f_j^{(\tau)}$ $(1 \leqq \tau \leqq t,\ 1 \leqq j \leqq k_\tau)$ aus k Funktionen. Um zu zeigen, daß es eine $\mathfrak{o}_\tau$-Basis von $\mathfrak{M}$ bildet, genügt es nachzuweisen, daß wenn ein Ausdruck (4.7) zu $\mathfrak{p}_\tau \mathfrak{M}$ gehört, alle Koeffizienten $a_j^{(\tau)}$ in $\mathfrak{p}_\tau$ liegen. Man setze

$$f_\tau = \sum_j a_j^{(\tau)} f_j^{(\tau)}, \tag{4.9}$$

also

$$f = \sum_\tau f_\tau. \tag{4.10}$$

Aus (4.6) und (4.3) folgt, daß dann

$$f_\varrho(\eta_\lambda \zeta) = 0 \quad \text{für} \quad \varrho \neq \lambda \text{ und } \zeta \in J \tag{4.11}$$

gilt. Also ist

$$f(\eta_\tau \zeta) = f_\tau(\eta_\tau \zeta). \tag{4.12}$$

Gehört nun f zu $\mathfrak{p}_\nu \mathfrak{M}$ und ist π ein Primelement von $\mathfrak{p}_\nu$, so ist $f(\eta_\tau \zeta)/\pi \in \mathfrak{o}_\nu$. Jetzt zeigen (4.11) und (4.12), daß $f_\tau/\pi \in \mathfrak{M}$ ist, nach (4.6) ist also $f_\tau/\pi \in \mathfrak{M}_\tau$. Da $f_1^{(\tau)}, f_2^{(\tau)}, \ldots$ eine $\mathfrak{o}_\nu$-Basis von $\mathfrak{M}_\tau$ bilden, ist nach (4.9) $a_j^{(\tau)} \in \mathfrak{p}_\nu$ für alle j. Da dies für alle τ gilt, bilden die k Funktionen $f_j^{(\tau)}$ (für alle τ und j) in der Tat eine $\mathfrak{o}_\nu$-Basis von $\mathfrak{M}$.

Nimmt man an, daß f in (4.7) mit B_σ assoziiert ist, so gilt $f(\eta_\tau \zeta)/\pi \in \mathfrak{o}_\nu$ für $\tau \neq \sigma$, und die vorangehende Betrachtung liefert $f_\tau/\pi \in \mathfrak{M}_\tau$ für $\tau \neq \sigma$, also $a_j^{(\tau)} \in \mathfrak{p}_\nu$ für $\tau \neq \sigma$. Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so folgt aus (4.11), daß f mit B_σ assoziiert ist.

(4B) *Ist τ fest und durchläuft i die k_τ Werte, für die $\chi_i \in B_\tau$ ist, so hat man Formeln*

$$\omega_i = \sum_j q_{ij} f_j^{(\tau)} \tag{4.13}$$

mit $q_{ij} \in \mathfrak{o}_\nu$. Die zugehörige Determinante verschwindet nicht.

Beweis. Die Existenz von Formeln (4.13) mit $q_{ij} \in \mathfrak{o}_\nu$ folgt aus $\omega_i \in \mathfrak{M}_\tau$. Die Determinante kann nicht verschwinden, da die k_τ Funktionen ω_i mit $\chi_i \in B_\tau$ linear unabhängig sind.

Wir benötigen später noch das folgende Ergebnis.

(4C) *Es sei $\mathfrak{Q}$ eine p-Untergruppe von $\mathfrak{G}$, es sei $\mathfrak{T} = \mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$ und $\tilde{\mathfrak{G}}$ eine die Bedingungen $\mathfrak{T} \subseteq \tilde{\mathfrak{G}} \subseteq \mathfrak{N}(\mathfrak{Q})$ erfüllende Untergruppe. Es sei $\tilde{B}$ ein Block von $\tilde{\mathfrak{G}}$ und $\tilde{f}$ eine mit $\tilde{B}$ assoziierte ganzwertige lineare Funktion in $Z(\tilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$. Definiert man eine ganzwertige lineare Funktion f in $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ durch die Bedingungen*

$$f(K_\alpha) = \sum_{\mathfrak{R}_\beta \subseteq \mathfrak{R}_\alpha \cap \mathfrak{T}} \tilde{f}(\tilde{K}_\beta), \tag{4.14}$$

so ist f mit dem Block $B = \tilde{B}^{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ assoziiert[5]*.*

Beweis. Man definiere eine lineare Abbildung L von $Z(\mathfrak{G}, \Omega) \to Z(\tilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$ derart, daß

$$L(K_\alpha) = \sum_{\mathfrak{R}_\beta \subseteq \mathfrak{R}_\alpha \cap \mathfrak{T}} \tilde{K}_\beta \tag{4.15}$$

ist. Ist $\tilde{J}$ die Menge der ganzen Elemente von $Z(\tilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$, so gilt $J \to \tilde{J}$. Aus (4.14) folgt, daß f die aus $\tilde{f}$ und L zusammengesetzte Funktion ist:

$$f = \tilde{f} \circ L.$$

Durch Restklassenabbildung entsteht aus L eine lineare Abbildung H von $Z(\mathfrak{G}, \Omega^*) \to Z(\tilde{\mathfrak{G}}, \Omega^*)$. Dabei ist H nach I (7B) ein Algebra-Homomorphismus. Insbesondere ist also $H(\eta_\tau^*)$ entweder ein Idempotent von $Z(\tilde{\mathfrak{G}}, \Omega^*)$ oder 0.

[5]) Ist $\tilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{C}(\mathfrak{Q})$ gewählt, so kann man f in der Form $f = \tilde{f}^{\mathfrak{G}}$ schreiben.

Haben $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \ldots$ die analoge Bedeutung für $Z(\tilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$ wie oben $\eta_1, \eta_2, \ldots$ für $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$, so folgt, daß $H(\eta_\tau^*)$ eine Summe $\sum \tilde{\eta}_\lambda^*$ ist, wobei λ über eine (möglicherweise leere) Menge $M(\tau)$ von Indizes läuft. Daher hat man

$$L(\eta_\tau) \equiv \sum_{\lambda \in M(\tau)} \tilde{\eta}_\lambda \pmod{\mathfrak{p}_\nu \tilde{J}}. \tag{4.16}$$

Ist nun $\tilde{\chi}$ ein irreduzibler Charakter des Blockes $\tilde{B}_\sigma$ von $\tilde{\mathfrak{G}}$, ist $\tilde{\omega}$ der zugehörige lineare Charakter von $Z(\tilde{G}, \Omega)$ und ist $\omega = \tilde{\omega} \circ L$, so ergibt Vergleich von (4.15) mit I (7D), daß $\omega \bmod \mathfrak{p}_\nu \mathfrak{M}$ den zu $\tilde{B}_\sigma^{\mathfrak{G}}$ gehörigen linearen Charakteren von $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ kongruent ist. Ist $\tilde{B}_\sigma^{\mathfrak{G}} = B_\tau$, so ist nach (4.3) $\omega(\eta_\tau) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$, also nach (4.16)

$$\sum_{\lambda \in M(\tau)} \tilde{\omega}(\tilde{\eta}_\lambda) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}.$$

Jetzt folgt aus (4.3) (auf $\tilde{\mathfrak{G}}$ angewendet), daß σ dann zu $M(\tau)$ gehören muß. Ist umgekehrt $\sigma \in M(\tau)$, so ist $\omega(\eta_\tau) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$ und daher $\tilde{B}_\sigma^{\mathfrak{G}} = B_\tau$. Also besteht $M(\tau)$ aus den Indizes σ, für die $\tilde{B}_\sigma^{\mathfrak{G}} = B_\tau$ ist.

Ist nun $\tilde{f}$ eine mit $\tilde{B} = \tilde{B}_\sigma$ assoziierte ganzwertige lineare Funktion in $Z(\tilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$, so folgt für $f = \tilde{f} \circ L$ und $\zeta \in J$, daß

$$\begin{aligned} f(\zeta \eta_\varrho) &\equiv \tilde{f}(L(\zeta \eta_\varrho)) \equiv \tilde{f}(L(\zeta)\, L(\eta_\varrho)) \\ &\equiv \sum_{\lambda \in M(\varrho)} \tilde{f}(L(\zeta) \tilde{\eta}_\lambda) \end{aligned} \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$$

ist. Ist $B_\varrho \neq B_\sigma^{\mathfrak{G}}$, also $\sigma \notin M(\varrho)$, so liegt der letzte Ausdruck in $\mathfrak{p}_\nu$ und also ist f mit $\tilde{B}_\sigma^{\mathfrak{G}}$ assoziiert, wie behauptet war.

§ 5. Hilfssätze

In § 5 wird angenommen, daß P ein p-Element im Zentrum $\mathfrak{C}(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ ist. Wir werden später bei beliebigem $\mathfrak{G}$ die Ergebnisse auf die Untergruppe $\mathfrak{N}(P)$ von $\mathfrak{G}$ anwenden. Aus der Voraussetzung folgt, daß für die irreduzible Darstellung $\mathfrak{X}_i$ von $\mathfrak{G}$ mit dem Charakter χ_i die Gleichung $\mathfrak{X}_i(PG) = \varepsilon_i \mathfrak{X}(G)$ für $G \in \mathfrak{G}$ gilt, wo ε_i eine Einheitswurzel ist. Daher ist

$$\chi_i(PG) = \varepsilon_i \chi_i(G). \tag{5.1}$$

Da jetzt $\mathfrak{N}(P) = \mathfrak{G}$ ist, kann man in § 3 $\varphi_i^P = \varphi_j$ wählen. Vergleich von (5.1) und (1.1) mit (3.2) für p-reguläres G liefert dann

$$d_{ij}^P = \varepsilon_i d_{ij}. \tag{5.2}$$

(5A) *Es sei P ein p-Element von $\mathfrak{C}(\mathfrak{G})$, und es sei Q ein von P verschiedenes p-Element von $\mathfrak{G}$. Ist U ein Element der Sektion $\Xi(P)$ von P und V ein Element der Sektion $\Xi(Q)$, so gilt für jeden Block B von $\mathfrak{G}$ die Gleichung*

$$\sum_{\chi_i \in B} \chi_i(U) \bar{\chi}_i(V) = 0.$$

Beweis. Wir können $U = PR$, $V = QT$ setzen, wo R und T p-regulär sind und $T \in \mathfrak{R}(Q)$ ist. Aus (5.1) folgt

$$\chi_i(U)\,\bar{\chi}_i(V) = \chi_i(PR)\,\chi_i(T^{-1}Q^{-1}) = \varepsilon_i\,\chi_i(R)\,\chi_i(Q^{-1}T^{-1})$$
$$= \chi_i(R)\,\chi_i(PQ^{-1}T^{-1}).$$

Wegen $P \neq Q$ ist das Element $S = PQ^{-1}T^{-1}$ p-singulär. Summiert man über alle $\chi_i \in B$, so erhält man nach I(3.5), I(4D) und I(3.9) die Summe

$$\sum_i \chi_i(R)\,\chi_i(S) = \sum_i \sum_{\varphi_j \in B} d_{ij}\,\varphi_j(R)\,\chi_i(S) = \sum_{\varphi_j \in B} \varphi_j(R)\,\Phi_j(S),$$

die wegen I(3F) in der Tat verschwindet.

(5B) *Es sei P ein p-Element von $\mathfrak{C}(\mathfrak{G})$, es sei B_τ ein Block von $\mathfrak{G}$ und man nehme an, daß in den Bezeichnungen von* (4A) *für alle i die Gleichung*

$$\sum_{j=1}^{k} c_j f_i^{(\tau)}(K_j) = 0 \tag{5.3}$$

mit von i unabhängigen Koeffizienten $c_j \in \mathfrak{o}$, gilt. Dann ist

$$\sum_{\alpha}{}' c_\alpha f_i^{(\tau)}(K_\alpha) = 0, \tag{5.4}$$

wo in $\sum'$ nur über die Klassen $\mathfrak{K}_\alpha$ in der Sektion $\mathfrak{S}(P)$ zu summieren ist.

Beweis. Ist $\chi_i \in B$ und ist ω_i der zugehörige lineare Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$, so folgt aus (4B), daß (5.3) richtig bleibt, wenn man $f_i^{(\tau)}$ durch ω_i ersetzt. Drückt man nach I(2.3) ω_i durch χ_i aus, so erhält man

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \frac{1}{n(G_j)}\,\chi_i(G_j) = 0,$$

wo G_j ein Vertreter der Klasse $\mathfrak{K}_j$ ist. Es sei $\mathfrak{K}_\beta$ eine zur Sektion $\mathfrak{S}(P)$ gehörige Klasse; man multipliziere mit $\bar{\chi}_i(G_\beta)$ und addiere über alle $\chi_i \in B$. Auf Grund von (5A) findet man

$$\sum_{\alpha}{}' c_\alpha\, n(G_\alpha)^{-1} \sum_{\chi_i \in B} \chi_i(G_\alpha)\,\bar{\chi}_i(G_\beta) = 0.$$

Multipliziert man hier mit $\bar{c}_\beta n(G_\beta)^{-1}$ und addiert man über alle $\mathfrak{K}_\beta \in \mathfrak{S}(P)$, so hat man

$$\sum_{\chi_i \in B} \Big| \sum_{\alpha}{}' c_\alpha\, n(G_\alpha)^{-1} \chi_i(G_\alpha) \Big|^2 = 0.$$

Also gilt für jedes $\chi_i \in B$ die Gleichung

$$\sum_{\alpha}{}' c_\alpha\, n(G_\alpha)^{-1} \chi_i(G_\alpha) = 0.$$

Dies liefert für dieselben i die Beziehung

$$\sum_{\alpha}{}' c_\alpha\, \omega_i(G_\alpha) = 0.$$

Erneute Anwendung von (4B) liefert die Behauptung (5.4).

(5C) *Die Behauptung von* (5B) *bleibt richtig, wenn man in* (5.3) *und* (5.4) *Gleichheit durch Kongruenz* (mod $\mathfrak{p}_\nu$) *ersetzt.*

Beweis. Bildet man aus den Werten der k Funktionen $f_i^{(\sigma)}$ ($\sigma = 1, 2, \ldots, t$; $i = 1, 2, \ldots, k_\sigma$) für die k Elemente K_j eine Determinante Δ, so zeigen wir zunächst

$$\Delta \in \mathfrak{o}_\nu, \quad \Delta \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}. \tag{5.5}$$

Die erste Behauptung folgt aus $f_i^{(\sigma)}(K_j) \in \mathfrak{o}_\nu$. Wäre $\Delta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$, so könnte man eine Linearverbindung f der $f_i^{(\sigma)}$ mit Koeffizienten in Ω bilden, derart, daß nicht alle Koeffizienten zu $\mathfrak{o}_\nu$ gehören, daß aber alle $f(K_j) \in \mathfrak{o}_\nu$ sind. Dies widerspricht (4A), da dann $f \in \mathfrak{M}$ wäre.

Aus (5.5) folgt für festes τ, daß man k_τ Klassen $\mathfrak{K}_j$ so auswählen kann, daß die entsprechende Unterdeterminante von Δ vom Grad k_τ,

$$\operatorname{Det}\left(f_i^{(\tau)}(K_j)\right) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu} \tag{5.6}$$

ist. Werden die so ausgewählten k_τ Klassen als die Klassen $\mathfrak{K}_\gamma$ bezeichnet, wobei also γ geeignete Indizes durchläuft, so hat man für $j = 1, 2, \ldots, k$ und für $i = 1, 2, \ldots, k_\tau$ Formeln

$$f_i^{(\tau)}(K_j) = \sum_\gamma b_{j\gamma} f_i^{(\tau)}(K_\gamma), \tag{5.7}$$

wo die $b_{j\gamma}$ in $\mathfrak{o}_\nu$ liegen und nicht von i abhängen. Ist hier $\mathfrak{K}_j$ eine Klasse der Sektion $\mathfrak{S}(P)$, so folgt aus (5B), daß man annehmen kann, daß in (5.7) rechts nur Klassen $\mathfrak{K}_\gamma \in \mathfrak{S}(P)$ auftreten. Ebenso folgt für $\mathfrak{K}_j \notin \mathfrak{S}(P)$, daß man annehmen kann, daß in (5.7) rechts nur Klassen $\mathfrak{K}_\gamma \notin \mathfrak{S}(P)$ auftreten.

Gilt nun für $i = 1, 2, \ldots, k_\tau$ die Kongruenz

$$\sum_j a_j f_i^{(\tau)}(K_j) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$$

mit $a_j \in \mathfrak{o}_\nu$, so trenne man zunächst die Glieder für die $\mathfrak{K}_j \in \mathfrak{S}(P)$ und die Glieder mit $\mathfrak{K}_j \notin \mathfrak{S}(P)$. Drückt man in jedem Fall $f_i^{(\tau)}(K_j)$ nach (5.7) durch die $f_i^{(\tau)}(K_\gamma)$ aus, so erhält man eine Kongruenz

$$\sum_\gamma c_\gamma f_i^{(\tau)}(K_\gamma) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$$

mit von i unabhängigen $c_\gamma \in \mathfrak{o}_\nu$. Wegen (5.6) müssen dann aber alle c_γ in $\mathfrak{p}_\nu$ liegen. Insbesondere ist also

$$\sum_\gamma{}' c_\gamma f_i^{(\tau)}(K_\gamma) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}, \tag{5.8}$$

wo in $\sum'$ der Index nur die Werte von γ durchläuft, für die $\mathfrak{K}_\gamma \in \mathfrak{S}(P)$ ist. Aus der im Anschluß an (5.7) gemachten Bemerkung folgt aber, daß (5.8) mit

$$\sum_\alpha{}' a_\alpha f_i^{(\tau)}(K_\alpha) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$$

gleichwertig ist, wo $\mathfrak{K}_\alpha$ alle Klassen aus $\mathfrak{S}(P)$ durchläuft. Dies liefert (5C).

Auf Grund von (4A) kann man (5C) auch in der folgenden Weise formulieren:

(5C*) *Es sei P ein p-Element von $\mathfrak{C}(\mathfrak{G})$. Gibt es k Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_k$ in $\mathfrak{o}_\nu$, derart daß für alle ganzwertigen linearen, mit B_τ assoziierten Funktionen f die Kongruenz*

$$\sum_j a_j f(K_j) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu} \tag{5.9}$$

gilt, so bleibt (5.9) *richtig, wenn man K_j nur die Klassen von $\mathfrak{S}(P)$ durchlaufen läßt.*

In § 6 wird von den bisherigen Ergebnissen nur (5C*) verwendet werden. Wir brauchen noch einen weiteren speziellen Hilfssatz:

(5D) *Es sei P ein p-Element von $\mathfrak{C}(\mathfrak{G})$, es sei B_τ ein Block von $\mathfrak{G}$. Es sei $R_1, R_2, \ldots, R_l$ ein Vertretersystem für die p-regulären Klassen von $\mathfrak{G}$, und die Klasse von PR_λ sei mit $\mathfrak{K}_\lambda$ bezeichnet. Ist jedem irreduziblen modularen Charakter $\varphi_j \in B_\tau$ ein Element $y_j \in \mathfrak{o}_\nu$ zugeordnet, derart daß für alle ganzwertigen linearen mit B_τ assoziierten Funktionen f die Kongruenz gilt*

$$\sum_{\alpha=1}^{l} \sum_j f(K_\alpha) \bar{\varphi}_j(R_\alpha) y_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}, \tag{5.10}$$

so gehören alle y_j zu $\mathfrak{p}_\nu$.

Beweis. Offenbar sind $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_l$ gerade die Klassen von $\mathfrak{S}(P)$.

Es sei $\chi_i \in B_\sigma \neq B_\tau$. Nach (5.2) und I(4D) gilt dann $d_{ij}^P = 0$ für alle $\varphi_j \in B_\tau$. Wegen (3.6) ergibt sich

$$\sum_{\alpha=1}^{l} \sum_{\beta=1}^{l} \chi_i(PR_\alpha)\, n(PR_\alpha)^{-1} \bar{\varphi}_\beta(R_\alpha)\, c_{\beta j}^P = 0$$

für alle diese j. Wegen $\mathfrak{N}(P) = \mathfrak{G}$ ist $c_{\beta j}^P = c_{\beta j}$. Nach I(4D) genügt es, β über die Werte laufen zu lassen, für die $\varphi_\beta \in B_\tau$ ist. Da

$$\operatorname{Det}(c_{ij}) \neq 0 \qquad (\varphi_i, \varphi_j \in B_\tau)$$

ist, folgt

$$\sum_{\alpha=1}^{l} \chi_i(PR_\alpha)\, n(PR_\alpha)^{-1} \bar{\varphi}_j(R_\alpha) = 0$$

für $\varphi_j \in B_\tau$, $\chi_i \in B_\sigma \neq B_\tau$. Also ist

$$\sum_{\alpha=1}^{l} \omega_i(K_\alpha) \bar{\varphi}_j(R_\alpha) = 0$$

und nach (4B)

$$\sum_{\alpha=1}^{l} f_i^{(\sigma)}(K_\alpha) \bar{\varphi}_j(R_\alpha) = 0$$

für $\sigma \neq \tau$. Daher gilt (5.10) nicht nur für $f = f_i^{(\tau)}$, sondern auch für $f = f_i^{(\sigma)}$ mit $\sigma \neq \tau$. Wegen (5.5) hat man dann

$$\sum_j \bar{\varphi}_j(R_\alpha) y_j \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}$$

für alle α. Da die φ_j linear unabhängig mod $\mathfrak{p}_\nu$ sind, folgt, daß alle $y_j \in \mathfrak{p}_\nu$ sind.

§ 6. Der Hauptsatz

Wir beweisen jetzt den folgenden Satz:

(6A) *Es sei P ein p-Element einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$. Ist φ_j^P ein irreduzibler modularer Charakter der Gruppe $\mathfrak{N}(P)$, der zum Block $\widetilde{B}$ von $\mathfrak{N}(P)$ gehört, und ist χ_i ein irreduzibler Charakter von $\mathfrak{G}$, so kann die Zerlegungszahl d_{ij}^P nur dann von 0 verschieden sein, wenn χ_i zum Block $B = \widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{G}$ gehört.*

Der Beweis wird in einer Reihe von Schritten geführt werden.

1. Ist $\widetilde{B}$ ein Block von $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{N}(P)$, so ist $B = \widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$ nach (2A) mit $\mathfrak{Q} = \{P\}$ definiert. Wir definieren eine Matrix D_0 durch

$$D_0 = (d_{ij}^P), \tag{6.1}$$

wo i die Werte durchläuft, für die $\chi_i \in B$ ist, und j die Werte, für die $\varphi_j^P \in \widetilde{B}$. Enthält also $\widetilde{B}$ etwa h irreduzible modulare Charaktere, so hat D_0 gerade h Spalten. Wir wollen zunächst zeigen, daß D_0 den Rang h hat. Wäre das nicht richtig, so gäbe es h nicht sämtlich verschwindende Elemente $z_j \in \Omega$, derart daß für alle $\chi_j \in B$

$$\sum_j d_{ij}^P z_j = 0 \tag{6.2}$$

ist. Setzt man den Wert von d_{ij}^P aus (3.6) ein, drückt χ_i durch ω_i aus und verwendet (4B), so sieht man, daß für $i = 1, 2, \ldots, k_\tau$ die Gleichung

$$\sum_\alpha \sum_\beta \sum_j f_i^{(\tau)}(K_\alpha)\, \bar{\varphi}_\beta^P(R_\alpha^P)\, c_{\beta j}^P z_j = 0$$

gilt, wo $\mathfrak{K}_\alpha$ die Klasse von PR_α^P ist. Da $\varphi_j^P \in \widetilde{B}$ ist, genügt es nach I(4D), β die h Werte durchlaufen zu lassen, für die $\varphi_\beta^P \in \widetilde{B}$ ist. Da die aus den h^2 Werten c_{ij}^P mit $\varphi_i^P, \varphi_j^P \in \widetilde{B}$ gebildete Determinante nicht verschwindet, so sind nicht alle h Zahlen

$$y_\beta = \sum_j c_{\beta j}^P z_j$$

Null. Dann ist

$$\sum_\alpha \sum_\beta f_i^{(\tau)}(K_\alpha)\, \bar{\varphi}_\beta^P(R_\alpha^P)\, y_\beta = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k_\tau).$$

Multipliziert man alle y_β mit einem geeigneten festen Element aus $\mathfrak{o}_\tau$, so darf man annehmen, daß alle y_β in $\mathfrak{o}_\tau$, aber nicht alle in $\mathfrak{p}_\tau$ liegen. Nach (4A) gilt dann für eine beliebige ganzwertige, mit B_τ assoziierte lineare Funktion f in $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ die Kongruenz

$$\sum_\alpha \sum_\beta f(K_\alpha)\, \bar{\varphi}_\beta^P(R_\alpha^P)\, y_\beta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\tau}. \tag{6.3}$$

Ist $\tilde{f}$ eine ganzwertige Funktion in $Z(\widetilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$, die mit $\widetilde{B}$ assoziiert ist, und setzt man $f = \tilde{f}^{\mathfrak{G}}$, so folgt aus (4C) mit $\mathfrak{Q} = \{P\}$, $\mathfrak{T} = \widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{N}(P)$, daß (6.3) für dieses f gilt. Hier ist

$$f(K_\alpha) = \sum_{\tilde{\mathfrak{K}}_\varrho \subseteq \mathfrak{K}} \tilde{f}(\tilde{K}_\varrho). \tag{6.4}$$

Ist etwa $\mathfrak{K}_\alpha$ die Klasse von PR_α^P in $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{N}(P)$, so tritt $\widetilde{\mathfrak{K}}_\alpha$ unter den $\widetilde{\mathfrak{K}}_\varrho$ auf. Offenbar ist $\widetilde{\mathfrak{K}}_\alpha$ die einzige unter den Klassen $\widetilde{\mathfrak{K}}_\varrho \subseteq \mathfrak{K}_\alpha$, die zur Sektion $\widetilde{\mathfrak{S}}(P)$ von P in $\widetilde{\mathfrak{G}}$ gehört. Setzt man daher (6.4) in (6.3) ein und wendet man (5C*) (für $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{N}(P)$ anstelle von $\mathfrak{G}$) an, so findet man

$$\sum_{\alpha,\beta} \tilde{f}(\widetilde{K}_\alpha)\, \bar{\varphi}_\beta^P(R_\alpha^P)\, y_\beta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}_\nu}. \tag{6.5}$$

Dies gilt für alle ganzwertigen linearen, mit $\widetilde{B}$ assoziierten Funktionen $\tilde{f}$ in $Z(\widetilde{\mathfrak{G}}, \Omega)$. Jetzt folgt aus (5D), daß alle $y_\beta \in \mathfrak{p}_\nu$ sind; dies ist ein Widerspruch. Also hat D_0 in der Tat den Rang h.

2. Man setze

$$\overline{D}_0' D_0 = U_0 = (u_{ij}). \tag{6.6}$$

Offenbar ist U_0 eine Matrix h-ten Grades, die zu einer nicht negativen Hermiteschen Form H_0 gehört. Verschwindet H_0 für eine Spalte $\mathfrak{z}$, die aus h komplexen Zahlen besteht, und ist $\mathfrak{x}$ die Spalte $\mathfrak{x} = D_0\mathfrak{z}$, so folgt aus $\bar{\mathfrak{z}}' U_0 \mathfrak{z} = 0$, daß $\bar{\mathfrak{x}}'\mathfrak{x} = 0$. Also ist $\mathfrak{x}$ die Nullspalte 0. Da $D_0\mathfrak{z} = 0$ ist und D_0 den Rang h hat, ist $\mathfrak{z} = 0$. Daher ist H_0 positiv definit und folglich Det $U_0 > 0$.

Man setze $D_1 = (d_{ij}^P)$, wo hier i im Gegensatz zu (6.1) die Werte durchläuft, für die $\chi_i \notin B$ ist, und j dieselben Werte wie in (6.1). Dann ist

$$U_1 = \overline{D}_1' D_1 \tag{6.7}$$

ebenfalls die Matrix einer nicht negativen Hermiteschen Form H_1. Ferner ergibt sich aus (6.6), (6.7) und (3A) für den Koeffizienten in der i-ten Zeile, j-ten Spalte von $U_0 + U_1$ der Wert

$$\sum_{\chi_\mu \in B} \bar{d}_{\mu i}^P d_{\mu j}^P + \sum_{\chi_\mu \notin B} \bar{d}_{\mu i}^P d_{\mu j}^P = c_{ij}^P. \tag{6.8}$$

Ordnet man die Charaktere $\varphi_1^P, \varphi_2^P, \ldots$ so, daß die ersten h zu $\widetilde{B}$ gehören, so ist nach I(4D) für $\widetilde{\mathfrak{G}}$ die Matrix C^P direkte Summe

$$C^P = \begin{pmatrix} C^P(\widetilde{B}) & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

der zu $\widetilde{B}$ gehörigen Teilmatrix $C^P(B)$ und einer Matrix vom Grad $b(P) - h$. Jetzt zeigt (6.8), daß

$$U_0 + U_1 = C^P(\widetilde{B}) \tag{6.10}$$

ist. Die Behauptung (6A) wird bewiesen sein, wenn wir $U_1 = 0$ zeigen können, da dies $D_1 = 0$ zur Folge hat. Wäre $U_1 \neq 0$, so würde aus (6.10) nach bekannten Sätzen über Hermitesche Formen folgen, daß

$$\text{Det } U_0 < \text{Det } C^P(\widetilde{B}) \tag{6.11}$$

ist. Nun werden wir in **3** zeigen, daß U_0 eine Matrix mit ganzen rationalen Koeffizienten ist, die links im Bereich der ganzen rationalen Zahlen durch

$C^P(\widetilde{B})$ teilbar ist. Da Det $U_0 > 0$ war, ist dann Det $U_0 \geqq$ Det $C^P(\widetilde{B})$. Dies ist ein Widerspruch zu (6.11), und (6A) wird bewiesen sein.

3. Wir setzen jetzt

$$\left(\sum_{\chi_\mu \in B} \bar{d}^P_{\mu i} d^P_{\mu j}\right) = (u_{ij}) = U, \tag{6.12}$$

wo hier i und j alle Werte $1, 2, \ldots, l(P)$ durchlaufen. Dann ist U_0 die Teilmatrix in den ersten h Zeilen und Spalten von U. Können wir zeigen, daß U ganze rationale Koeffizienten hat und links durch C^P teilbar ist, so ergeben sich daraus wegen (6.9) die am Ende von **2.** bezüglich U_0 ausgesprochenen Behauptungen, und (6A) wird bewiesen sein.

Es mögen Ω_0 und Ω_1 dieselbe Bedeutung wie in § 3 haben. Wie dort gezeigt wurde, ist dann jedes $d^P_{\mu i}$ ganz algebraisch in Ω_1, und daher gilt dasselbe für alle u_{ij}. Wendet man ferner ein Element σ der Galoisschen Gruppe von Ω über Ω_0 an, so werden die Charaktere $\chi_\mu \in B$ permutiert, und nach (3.7) bleibt jedes u_{ij} fest. Also gilt $u_{ij} \in \Omega_0$, d.h. $u_{ij} \in \Omega_0 \cap \Omega_1$, und daher sind in der Tat alle u_{ij} ganz rational.

Man setze

$$(C^P)^{-1} U = W = (w_{ij}). \tag{6.13}$$

Da Det C^P eine Potenz $\mathfrak{p}^\varrho$ von $\mathfrak{p}$ ist[6]), sind alle w_{ij} rationale Zahlen mit dem Nenner $\mathfrak{p}^\varrho$. Können wir zeigen, daß $w_{ij} \in \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ist, so sind alle w_{ij} ganz rational, und wir sind fertig.

Es mögen $\boldsymbol{\varphi}^P$ und N^P dieselbe Bedeutung wie in § 3 haben. Ferner sei jetzt $D = (d^P_{ij})$ mit $\chi_i \in B$, $j = 1, 2, \ldots, l(P)$. Aus (6.12) und (6.13) folgt

$$(\boldsymbol{\varphi}^P)^{-1} W \boldsymbol{\varphi}^P = (C^P \boldsymbol{\varphi}^P)^{-1} \bar{D}' D \boldsymbol{\varphi}^P.$$

Nun ist $(\bar{\boldsymbol{\varphi}}^P)' C^P \boldsymbol{\varphi}^P = N^P$. Also haben wir

$$(\boldsymbol{\varphi}^P)^{-1} W \boldsymbol{\varphi}^P = (N^P)^{-1} (\bar{\boldsymbol{\varphi}}^P)' \bar{D}' D \boldsymbol{\varphi}^P.$$

Da die Koeffizienten von $\boldsymbol{\varphi}^P$ in $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ liegen und Det $\boldsymbol{\varphi}^P$ nach I(3E) eine Einheit von $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ist, genügt es zu zeigen, daß die Koeffizienten der rechten Seite zu $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ gehören. Nach (3.2) ist der Koeffizient in der i-ten Zeile, j-ten Spalte rechts gleich

$$n (P R^P_i)^{-1} \sum_{\chi_\mu \in B} \bar{\chi}_\mu (P R^P_i) \chi_\mu (P R^P_j).$$

Damit ist der ganze Beweis auf den Beweis des folgenden Hilfssatzes zurückgeführt:

HILFSSATZ. *Es sei B ein Block von $\mathfrak{G}$. Sind $L, M \in \mathfrak{G}$, so ist*

$$\sum_{\chi_i \in B} \bar{\chi}_i (L) \chi_i (M) \in n (L) \mathfrak{o}_\mathfrak{p}.$$

[6]) Vgl. etwa R. BRAUER, Ann. of Math. **57**, 357–377 (1953), Theorem 13. Für das Theorem 1 dieser Arbeit, aus dem der fragliche Satz hergeleitet wird, findet sich ein einfacherer Beweis bei R. BRAUER und J. TATE, Ann. of Math. **63**, 1–7 (1955).

Beweis des Hilfssatzes. Wie in I(2.2) setze man

$$K_\alpha K_\beta = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} K_\gamma. \tag{6.14}$$

Für jedes j sei G_j ein Element aus $\mathfrak{K}_j$. Dann ist $a_{\alpha\beta\gamma}$ die Anzahl der geordneten Paare (ϱ, σ) von Elementen von $\mathfrak{G}$, die die Bedingungen

$$\varrho\sigma = G_\gamma, \qquad \varrho \in \mathfrak{K}_\alpha, \qquad \sigma \in \mathfrak{K}_\beta$$

erfüllen. Da $\mathfrak{K}_\gamma$ aus $g/n(G_\gamma)$ Elementen besteht, gibt es $g a_{\alpha\beta\gamma}/n(G_\gamma)$ geordnete Paare (ϱ, σ) von Elementen, für die

$$\varrho\sigma \in \mathfrak{K}_\gamma, \qquad \varrho \in \mathfrak{K}_\alpha, \qquad \sigma \in \mathfrak{K}_\beta$$

ist. Für jedes j sei $\mathfrak{K}_{j'}$ die Klasse, die aus den Inversen der Elemente von $\mathfrak{K}_j$ besteht. Da $\varrho\sigma = \tau$ mit $\sigma\tau^{-1} = \varrho^{-1}$ äquivalent ist, erhält man $g a_{\alpha\beta\gamma}/n(G_\gamma) = g a_{\beta\gamma'\alpha'}/n(G_\alpha)$, woraus

$$a_{\alpha\beta\gamma} \subseteq \frac{n(G_\gamma)}{n(G_\alpha)}\, \mathfrak{o}, \tag{6.15}$$

folgt.

Da ω_i ein linearer Charakter von $Z(\mathfrak{G}, \Omega)$ ist, ergibt sich aus (6.14)

$$\omega_i(K_\alpha)\,\omega_i(K_\beta) = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}\omega_i(K_\gamma).$$

Drückt man ω_i durch χ_i aus, so hat man nach einfacher Umformung

$$\chi_i(G_\alpha)\,\chi_i(G_\beta) = \frac{n(G_\alpha)\,n(G_\beta)}{g} \sum_\gamma \frac{a_{\alpha\beta\gamma}}{n(G_\gamma)}\,\chi_i(G_\gamma)\,\chi_i(1).$$

Summiert man jetzt über alle $\chi_i \in B$, so ergibt (4.2) für $B = B_\tau$ die Gleichung

$$\sum_{\chi_i \in B} \chi_i(G_\alpha)\,\chi_i(G_\beta) = \sum_\gamma \frac{n(G_\alpha)\,n(G_\beta)}{n(G_\gamma)}\, a_{\alpha\beta\gamma}\, b_{\gamma'}^{(\tau)}.$$

Wegen $b_{\gamma'}^{(\tau)} \in \mathfrak{o}_\tau$ und (6.15) liegt die Summe in $n(G_\beta)\,\mathfrak{o}_\tau$. Wählt man $\mathfrak{K}_\alpha$ und $\mathfrak{K}_\beta$ so, daß $L^{-1} \in \mathfrak{K}_\beta$, $M \in \mathfrak{K}_\alpha$, so erhält man wegen $n(L) = n(G_\beta^{-1}) = n(G_\beta)$ den Hilfssatz.

Damit ist (6A) vollständig bewiesen.

§ 7. Folgerungen

Es sei P ein p-Element von $\mathfrak{G}$ und $R \in \mathfrak{N}(P)$ p-regulär. Gehört χ_i zum Block B_τ, so zeigt (6A), daß es genügt, in den Formeln (3.2):

$$\chi_i(PR) = \sum_j d_{ij}^P \varphi_j^P(R) \tag{7.1}$$

φ_j^P über diejenigen irreduziblen modularen Charaktere von $\mathfrak{N}(P)$ laufen zu lassen, die zu Blöcken $\widetilde{B}$ von $\mathfrak{N}(P)$ mit $\widetilde{B}^{\mathfrak{G}} = B$ gehören. Gibt es kein derartiges $\widetilde{B}$, so ist $\chi_i(PR) = 0$. Ist $\widetilde{B}^{\mathfrak{G}} = B$, so gehört die Defektgruppe $\widetilde{\mathfrak{D}}$ von $\widetilde{B}$ nach (2B) und I(8B) zu einer Konjugierten der Defektgruppe $\mathfrak{D}$ von B.

Andererseits ist nach I(9F) $P \in \widetilde{\mathfrak{D}}$, da P im Zentrum von $\mathfrak{N}(P)$ liegt. Also gehört dann P zu einer Konjugierten von $\mathfrak{D}$. Dies liefert das folgende Ergebnis:

(7A) *Es sei B ein Block von $\mathfrak{G}$ mit der Defektgruppe $\mathfrak{D}$. Ist P ein p-Element von $\mathfrak{G}$, dessen Klasse kein Element von $\mathfrak{D}$ enthält, so verschwindet jedes $\chi_i \in B$ für alle Elemente der Sektion $\mathfrak{S}(P)$.*

Als Spezialfall ist darin das frühere Ergebnis enthalten, daß ein Charakter vom Defekt 0 für alle p-singulären Elemente verschwindet.

(7B) *Sind P und Q zwei nicht konjugierte p-Elemente von $\mathfrak{G}$, so gilt für jeden Block B die Gleichung*

$$\sum_{\chi_\mu \in B} \bar{d}^P_{\mu i} d^Q_{\mu j} = 0. \tag{7.2}$$

Beweis. Wegen (3.4) genügt es, (7.2) für alle Blöcke B von $\mathfrak{G}$ mit Ausnahme eines festen Blockes B_0 zu beweisen. Gehört φ_i^P zum Block $\widetilde{B}$ von $\mathfrak{N}(P)$, so wähle man dabei $B_0 = \widetilde{B}^{\mathfrak{G}}$. Für $B \neq B_0$ sind dann alle in (7.2) auftretenden $d^P_{\mu i}$ gleich Null, und (7.2) ist trivial.

Sind R und S p-reguläre Elemente von $\mathfrak{N}(P)$ bzw. $\mathfrak{N}(Q)$, multipliziert man (7.2) mit $\bar{\varphi}_i^P(R)\, \varphi_j^Q(S)$ und addiert über alle i und j, so findet man die folgende Verschärfung der Orthogonalitätsrelationen für Gruppencharaktere:

(7C) *Es sei B ein Block von $\mathfrak{G}$, es seien L und M zwei Elemente von $\mathfrak{G}$, die zu verschiedenen Sektionen gehören. Dann ist*

$$\sum_{\chi \in B} \bar{\chi}(L)\, \chi(M) = 0.$$

(7D) *Es seien $B_1, B_2, \ldots, B_t$ die Blöcke von $\mathfrak{G}$, und es sei $P_1, P_2, \ldots, P_r$ ein Vertretersystem für die p-Klassen von $\mathfrak{G}$. Für jedes p-Element P bezeichne $l_\tau(P)$ die Anzahl der irreduziblen Charaktere φ_ϱ^P von $\mathfrak{N}(P)$, die zu Blöcken $\widetilde{B}$ von $\mathfrak{N}(P)$ mit $\widetilde{B}^{\mathfrak{G}} = B_\tau$ gehören. Dann ist die Anzahl k_τ der Charaktere $\chi_i \in B_\tau$ gegeben durch*

$$k_\tau = \sum_{i=1}^{r} l_\tau(P_i). \tag{7.3}$$

Beweis. Die Summe auf der rechten Seite von (7.3) sei mit k'_τ bezeichnet. Für jedes φ_j^P definiere man eine Klassenfunktion ψ_j^P in $\mathfrak{G}$ durch die Festsetzung

$$\psi_j^P(PR) = \varphi_j^P(R) \qquad \text{für } p\text{-reguläres } R \in \mathfrak{N}(P),$$
$$\psi_j^P(G) = 0 \qquad \text{für alle } G \notin \mathfrak{S}(P).$$

Dann besagen die Formeln (7.1), daß die k_τ Charaktere $\chi_i \in B_\tau$ Linearkombinationen von k'_τ geeigneten Funktionen ψ_j^P sind. Da die χ_i linear unabhängig sind, ist also

$$k_\tau \leqq k'_\tau. \tag{7.4}$$

Andererseits ist $\sum_\tau l_\tau(P)$ die Anzahl aller irreduziblen modularen Charaktere

φ_j^P von P, also gleich der Anzahl $l(P)$ der p-regulären Klassen von $\mathfrak{N}(P)$. Unter Verwendung von (3.8) und (4.8) ergibt sich

$$\sum_\tau k'_\tau = \sum_\tau \sum_i l_\tau(P_i) = \sum_i l(P_i) = k = \sum_\tau k_\tau .$$

Also muß in (7.4) für alle τ Gleichheit gelten. Dies liefert (7.3).

Man betrachte die Zahlen d_{ij}^P mit festem P und j als eine Spalte $\mathfrak{d}_j^P$ der Länge k; $i = 1, 2, \ldots, k$. Dann besagen die Formeln (3.2), daß bei geeigneter Anordnung der Klassen die Matrix $(\chi_i(G_j)) = \boldsymbol{\chi}$ der Gruppencharaktere $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ sich als Produkt

$$\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}$$

schreiben läßt, wo $\boldsymbol{D}$ die aus den k Spalten $\mathfrak{d}_j^P$ mit $P = P_1, P_2, \ldots, P_r$ gebildete Matrix ist, während $\boldsymbol{\varphi}$ die direkte Summe der Matrizen $\boldsymbol{\varphi}^P$ für $P = P_1, P_2, \ldots, P_r$ ist. Hierbei ist $\boldsymbol{\varphi}^P$ wie in § 3 definiert. Übrigens folgt aus (3.3) und (3.4) ohne Schwierigkeiten, daß $\pm(\mathrm{Det}\,\boldsymbol{D})^2$ eine Potenz von p ist. Andererseits ist leicht zu sehen, daß $(\mathrm{Det}\,\boldsymbol{\varphi})^2$ eine zu p teilerfremde ganze Zahl ist.

Bildet man aus den Zahlen d_{ij}^P mit festem P und j und $\chi_i \in B_\tau$ eine Spalte $\mathfrak{d}_{\tau j}^P$ der Länge k_τ, so hat man nach (7D) k_τ Spalten $\mathfrak{d}_{\tau j}^P$, für die P eins der Elemente $P_1, P_2, \ldots, P_r$ ist und φ_j^P zu einem Block $\widetilde{B}$ von $\mathfrak{N}(P)$ mit $\widetilde{B}^{\mathfrak{G}} = B$ gehört. Es sei $\boldsymbol{D}_\tau$ die aus diesen k_τ Spalten gebildete Matrix vom Grade k_τ. Dann besagt (6A), daß man die Spalten von $\boldsymbol{D}$ so permutieren kann, daß $\boldsymbol{D}$ in die direkte Summe von $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2, \ldots, \boldsymbol{D}_t$ übergeht. Insbesondere ist $\pm(\mathrm{Det}\,\boldsymbol{D}_\tau)^2$ eine Potenz von p.

Wir nennen $\boldsymbol{D}_\tau$ *die zum Block B_τ gehörige Matrix von verallgemeinerten Zerlegungszahlen.*

(7E) *Ist $\boldsymbol{D}_\tau$ die zum Block B_τ gehörige Matrix von verallgemeinerten Zerlegungszahlen, so ist $\boldsymbol{D}_\tau$ eine quadratische Matrix und $\pm(\mathrm{Det}\,\boldsymbol{D}_\tau)^2$ eine Potenz von p.*

Gelegentlich ist es zweckmäßig, zum Block B_τ alle irreduziblen modularen Charaktere von $\mathfrak{N}(P_1), \mathfrak{N}(P_2), \ldots, \mathfrak{N}(P_r)$ zu rechnen, die den Spalten von $\boldsymbol{D}_\tau$ entsprechen. Dann besteht also B_τ aus k_τ gewöhnlichen irreduziblen Charakteren χ_i und k_τ irreduziblen modularen Charakteren φ_j^P. Dabei kann aber derselbe Charakter φ mehrfach, nämlich für mehrere verschiedene P auftreten. Für $P = 1$ erhält man die im ursprünglichen Sinn zu B_τ gerechneten modularen Charaktere.

Haben Ω_0 und Ω_1 dieselbe Bedeutung wie in § 3, und ist σ ein Element der Galoisschen Gruppe $\mathfrak{g}$ von Ω über Ω_0, so folgt aus (3.7), daß bei Anwendung von σ auf $\boldsymbol{D}_\tau$ die Zeilen der Matrix permutiert werden. Ist ε eine primitive p^a-te Einheitswurzel, so hat man weiterhin

$$\varepsilon^\sigma = \varepsilon^s$$

mit ganzem rationalem, zu p teilerfremdem s. Daraus folgt, daß für p-Elemente P und p-reguläres $R \in \mathfrak{N}(P)$ die Gleichung gilt

$$\chi_i(PR)^\sigma = \chi_i(P^s R). \tag{7.5}$$

Für jedes $P = P_1, P_2, \ldots, P_t$ ist natürlich P^s zu einem Element desselben Vertretersystems konjugiert. Jetzt zeigt (6A) zusammen mit (3.2) und (3.10), daß man die Anwendung von σ auf $\boldsymbol{D}_\tau$ auch als eine Permutation der Spalten ansehen kann. Wegen Det $\boldsymbol{D}_\tau \neq 0$ kann die Methode aus § 6 und § 7 der unter [3]) zitierten Arbeit angewendet werden. Dies liefert die folgenden Ergebnisse:

(7F) *Es sei Λ ein Teilkörper von Ω; es sei ε_0 eine primitive g_0-te Einheitswurzel (für $g = p^a g_0$ mit $(g_0, p) = 1$). Besteht der Block $B = B_\tau$ aus m Familien von Charakteren χ_i, die bezüglich $\Lambda(\varepsilon_0)$ algebraisch konjugiert sind, so verteilen sich die Spalten der zugehörigen Matrix $\boldsymbol{D}_\tau$ auf m Familien, die bezüglich Λ algebraisch konjugiert sind.*

(7G) *Es sei $p \neq 2$. Bestehen die m Familien von Charakteren χ_i in* (7F) *aus $q_1, q_2, \ldots,$ bzw. q_m Mitgliedern, so bestehen die m Familien von Spalten von $\boldsymbol{D}_\tau$ ebenfalls gerade aus $q_1, q_2, \ldots,$ bzw. q_m Mitgliedern. Dies gilt auch für $p = 2$, $a \leqq 2$. Ist $p = 2$, $a \geqq 3$, so gilt es, falls $\sqrt{-1} \in \Lambda$ ist.*

Die $l_\tau = l_\tau(1)$ zur Sektion $\mathfrak{S}(1)$ gehörigen Spalten von $\boldsymbol{D}_\tau$ haben rationale Koeffizienten, da die d_{ij} in I § 3 rational sind. Es sei $p \neq 2$, Λ der Körper der rationalen Zahlen. Dann müssen mindestens l_τ Charaktere $\chi_i \in B_\tau$ in Ω_0 liegen. Das liefert das Ergebnis:

(7H) *Ist $p \neq 2$ und besteht der Block B_τ aus l_τ modularen Charakteren φ (im ursprünglichen Sinn), so liegen mindestens l_τ Charaktere χ_i von B_τ im Körper der g_0-ten Einheitswurzeln.*

Ähnliche Aussagen kann man bei beliebiger Wahl von Λ machen. Enthält Λ die p^e-ten Einheitswurzeln, so liegen jedenfalls alle Spalten $\mathfrak{d}_i^P$ in Λ, für die P höchstens die Ordnung p^e hat.

Dept. of Mathematics, Harvard University, Cambridge 38, Mass. (U.S.A.)
und
Tata Institute for Fundamental Research, Bombay
(Eingegangen am 7. März 1959)

WALSH, J. L.
Math. Zeitschr. 72, 47–52 (1959)

Note on approximation by bounded analytic functions (Problem α)

Dedicated to the memory of LEON LICHTENSTEIN

By

J. L. WALSH *)

In the theory of approximation by analytic functions in the plane of the complex variable, Problem α is the study of the relation between degree of approximation on a point set E to the continuity properties on E of the function $f(z)$ approximated. In this study, inequalities of the form ($n = 1, 2, \ldots$; $p \geqq 0$, $0 < \alpha \leqq 1$)

$$|f(z) - f_n(z)| \leqq A_1/n^{p+\alpha}, \qquad z \text{ on } E, \tag{1}$$

$$|f_n(z)| \leqq A_2 R^n, \qquad z \text{ in } D, \tag{2}$$

where p is integral and D is a region containing E, are especially important; these inequalities are clearly invariant under one-to-one conformal transformation of D.

The object of the present note is to indicate (Theorem 1) a relationship between (1) and (2) on the one hand to approximation to $f(z)$ on E by polynomials on the other hand. The importance of this relationship lies in (i) the extensive theory already in existence concerning Problem α for polynomials, and (ii) the possibility of effectively enlarging a given region D by modifying the $f_n(z)$, using here the fact that polynomials have no singularity in the plane of finite points. Although the isolation of Theorem 1 as such is new, the basic ideas of the proof go back to CURTISS [1]; compare also WALSH and SEWELL [2], and the present writer [3].

THEOREM 1. *Let the point set E consist of a finite number of mutually disjoint closed Jordan arcs and regions, and let D be an open set containing E. Let the function $f(z)$ be defined on E, let the functions $f_n(z)$ be analytic on D, and let (1) and (2) be satisfied. Then there exist polynomials $p_n(z)$ of respective degrees n such that we have*

$$|f(z) - p_n(z)| \leqq A_3/n^{p+\alpha}, \qquad z \text{ on } E. \tag{3}$$

The numbers A with subscripts represent constants independent of n and z.

We denote by $g(z)$ the function of Green for the complement K of E with pole at infinity, and denote generically by C_σ the locus $g(z) = \log \sigma$, $1 < \sigma$, in K. Let E_σ denote the subset $0 < g(z) < \sigma$ of K, plus E. Then for a suitably chosen ϱ_1 (> 1) the point set $C_{\varrho_1} + E_{\varrho_1}$ lies in D.

*) This research was sponsored (in part) by the U. S. Air Force, Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command.

There exists [4, § 4.5] for every n a sequence of polynomials $P_{n,k}(z)$ of respective degrees k defined by interpolation to $f_n(z)$ such that we have by virtue of (2)

$$|f_n(z) - P_{n,k}(z)| \leqq A_4 R^n/\varrho^k, \quad z \text{ on } E, \quad \varrho > 1; \tag{4}$$

here A_4 is chosen to be independent of k, n, and z. We now choose the positive integer λ so that $\varrho^\lambda > R$, whence

$$|f_n(z) - P_{n,\lambda n}(z)| \leqq A_4 (R/\varrho^\lambda)^n, \quad z \text{ on } E, \tag{5}$$

with $R/\varrho^\lambda < 1$. From (1) and (5) there follows

$$|f(z) - P_{n,\lambda n}(z)| \leqq A_5/(\lambda n)^{p+\alpha}, \quad z \text{ on } E. \tag{6}$$

The polynomials $P_{n,\lambda n}(z)$ are defined only for the degrees $k = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots$, but if we now set

$$\begin{aligned} \phi_k(z) &\equiv P_{n,\lambda n}(z), \quad \lambda n \leqq k < \lambda(n+1), \\ \phi_k(z) &\equiv 0, \qquad\qquad 1 \leqq k < \lambda, \end{aligned}$$

the polynomials $\phi_k(z)$ are defined for all k ($\geqq 1$), and (3) follows from (6).

It follows from (3) that the polynomials $\phi_n(z)$ are uniformly bounded on E:

$$|\phi_n(z)| \leqq A_6, \quad z \text{ on } E, \tag{7}$$

and then it follows by the generalized Bernstein lemma [4, § 4.6] that we have ($\sigma > 1$)

$$|\phi_n(z)| \leqq A_6 \sigma^n, \quad z \text{ on } E_\sigma. \tag{8}$$

Thus Theorem 1 not merely enables us to replace the given analytic functions $f_n(z)$ by the simpler polynomials $\phi_n(z)$, but also through (3) and (8) it preserves the essence of (1) and (2); if we choose σ sufficiently large, inequality (8) is valid on any preassigned bounded point set of the plane.

The precise form of (1) and (3) as given includes the most frequently used measure of approximation, but the power of Theorem 1 is essentially greater. Inspection of the proof of Theorem 1 yields the

COROLLARY. *Let Theorem 1 be modified so that in the hypothesis the second member of* (1) *is replaced by* ε_n. *Then* (3) *remains valid if the second member is replaced by* $\varepsilon_{[n/\lambda]} + A_7 r^n$, *where* λ *is a suitably chosen positive integer and* r (< 1) *is suitably chosen. Here* $[x]$ *indicates the greatest integer not greater than* x.

In this Corollary the magnitudes of λ and r can be expressed in terms of ϱ if a suitable ϱ is known. In the statements of Theorem 1 and the Corollary the set E is unnecessarily restricted; it is sufficient if E is a closed bounded set whose complement K is connected and regular in the sense that it possesses a GREEN's function $g(z)$ with pole at infinity.

As an illustration of the usefulness of Theorem 1 we prove the following known [1, 2] result:

THEOREM 2. *Let* $C_1, C_2, \ldots, C_s$ *be mutually exterior analytic Jordan curves and let the function* $f(z)$ *be analytic in the interior of each* C_j, *continuous in the*

corresponding closed region B_j. A necessary and sufficient condition that $f(z)$ be of class $L(p, \alpha)$, $0<\alpha<1$, on $E = B_1 + B_2 + \cdots + B_\nu$ is that there exist polynomials $p_n(z)$ of respective degrees n satisfying (3).

The class $L(p, \alpha)$ on B_j indicates that $f(z)$ is analytic interior to B_j, continuous in B_j, and that $f^{(p)}(z)$ exists in the one-dimensional sense on C_j and satisfies there a Lipschitz condition of order α. This class is known to be invariant under a conformal transformation of B_j.

The condition of Theorem 2 is necessary, for if $f(z)$ is of class $L(p, \alpha)$ on B_j, we transform conformally B_j onto $\gamma: |w| \leqq 1$ by the transformation $w = \varphi_j(z)$, $z = \psi_j(w)$, which is one-to-one and conformal on open sets containing B_j and γ respectively. Then $f[\psi_j(w)]$ is of class $L(p, \alpha)$ on γ, and it follows from the Jackson-Bernstein-Montel-de la Vallée Poussin theory of trigonometric approximation that there exist trigonometric polynomials $T_{j,n}(\vartheta)$ of respective degrees n such that we have $w = e^{i\vartheta}$,

$$|f[\psi_j(e^{i\vartheta})] - T_{j,n}(\vartheta)| \leqq A_8/n^{p+\alpha}. \tag{9}$$

The polynomial $T_{j,n}(\vartheta)$ is (EULER) a polynomial of degree n in w and $1/w$. But $T_{j,n}(\vartheta)$ is found by a summation process from the Fourier development of $f[\psi_j(e^{i\vartheta})]$, and by the analyticity of $f[\psi_j(w)]$ in $|w|<1$ this development is of power series type and lacks the terms in $1/w$. That is to say, with $w = e^{i\vartheta}$ we may write $T_{j,n}(\vartheta) \equiv t_{j,n}(w)$, where $t_{j,n}(w)$ is a polynomial in w of degree n. The relation (9) becomes

$$|f[\psi_j(w)] - t_{j,n}(w)| \leqq A_8/n^{p+\alpha}, \tag{10}$$

valid for $|w| = 1$ and hence for $|w| \leqq 1$.

It is a consequence of (10) that the polynomials $t_{j,n}(w)$ are bounded on γ independently of j and n:

$$|t_{j,n}(w)| \leqq A_9, \quad |w| \leqq 1, \tag{11}$$

and then a consequence of the generalized Bernstein Lemma [4, § 4.6] that we have for arbitrary $R\ (>1)$

$$|t_{j,n}(w)| \leqq A_9 R^n, \quad |w| \leqq R. \tag{12}$$

If R is chosen sufficiently near unity, the image B_j' of $|w| \leqq R$ under each of the ν transformations $z = \psi_j(w)$ is one to one and the B_j' are mutually disjoint. The hypothesis of Theorem 1 is satisfied with $f_n(z) = t_{j,n}[\varphi_j(z)]$ in B_j', for (10) is equivalent to (1), and (12) to (2). Then (3) follows from Theorem 1.

Conversely, suppose (3) is satisfied; again we have by (3) the analogue of (11):

$$|p_n(z)| \leqq A_{10}, \quad z \text{ on } E.$$

From the generalized Bernstein Lemma we deduce

$$|p_n(z)| \leqq A_{10} R^n, \quad z \text{ on } E_R. \tag{13}$$

Inequality (3) can be written

$$|f[\psi_j(w)] - p_n[\psi_j(w)]| \leqq A_3/n^{p+\alpha}, \quad w \text{ on } \gamma,$$

so if (13) is interpreted in a suitable region of the w-plane containing γ, the hypothesis of Theorem 1 is satisfied, and we have

$$|f[\psi_j(w)] - P_{j,n}(w)| \leqq A_{11}/n^{p+\alpha}, \quad w \text{ on } \gamma, \tag{14}$$

where $P_{j,n}(w)$ is a polynomial in w of degree n. It is now a consequence of the theory of trigonometric approximation already mentioned that $d^p f[\psi_j(e^{i\vartheta})]/d\vartheta^p$ exists and satisfies a Lipschitz condition of order α on $|w| = 1$, so $f[\psi_j(w)]$ is of class $L(p, \alpha)$ on γ, and $f(z)$ is of class $L(p, \alpha)$ on each B_j and on E. Theorem 2 is established.

Under the hypothesis of Theorem 2 on E, if D is any bounded region containing E in its interior, inequalities (1) and (2) with suitable $f_n(z)$ are by (8) and Theorem 1 necessary and sufficient [3] that $f(z)$ be of class $L(p, \alpha)$ on E.

In Theorem 2 the necessity of condition (3) holds for $\alpha = 1$ but not the sufficiency. With $\alpha = 1$, condition (3) is necessary and sufficient that $f^{(p)}(z)$ be of class Λ^* on E, as follows [5, 6] by the method of proof already used. Here Λ^* denotes a class of functions whose properties regarding degree of trigonometric approximation were first studied by ZYGMUND.

Just as Theorem 2 follows from Theorem 1, extensions of the two parts of Theorem 2 follow from the Corollary. Such extensions exist already in the literature [5, 6, 8], but the present suggested proof is simpler and tends to unify the theory.

Theorem 1 is of significance in pointing the way to an analogue of Theorem 2 but where now E is an analytic Jordan arc. The relationship of inequality (3) to the continuity properties of $f(z)$ on E may be studied by mapping a region containing E onto a region containing the segment $-1 \leqq w \leqq 1$ so that E is transformed into the segment; Theorem 1 and its Corollary apply in the w-plane. For such an application of Theorem 1, compare [3, Theorem 5].

Theorem 1 admits an analogue dealing with approximation on a Jordan curve rather than on Jordan regions or arcs:

THEOREM 3. *Let E be an analytic Jordan curve containing the origin 0 in its interior, and let D be a region containing E. Let the function $f(z)$ be defined on E, let the functions $f_n(z)$ be analytic in D, and let (1) and (2) be satisfied. Then there exist polynomials $p_n(z, 1/z)$ in z and $1/z$ of respective degrees n such that*

$$|f(z) - p_n(z, 1/z)| \leqq A_{12}/n^{p+\alpha}, \quad z \text{ on } E, \tag{15}$$

is satisfied.

The functions $f_n(z)$ are analytic in a closed annular region D_1 containing E bounded by two rectifiable Jordan curves, J_1 exterior to E and J_2 interior

to E. Then for z interior to D_1 the function $f_n(z)$ is represented as the sum of two integrals taken in the positive sense with respect to D_1:

$$f_n(z) \equiv f_{n1}(z) + f_{n2}(z), \tag{16}$$

$$f_{n1}(z) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{J_1} \frac{f_n(t)\,dt}{t-z}, \quad f_{n2}(z) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{J_2} \frac{f_n(t)\,dt}{t-z}, \tag{17}$$

where $f_{n1}(z)$ is analytic throughout the interior of J_1 and $f_{n2}(z)$ is analytic throughout the exterior of J_2 even at infinity. Let $g'(z)$ be GREEN's function for the interior of E with pole in 0, and let C'_σ denote generically the locus $g'(z) = \log \sigma$, $1 < \sigma$, interior to E. In the notation used in the proof of Theorem 1, there follow from (2) and (17) the inequalities

$$|f_{n1}(z)| \leqq A_{13} R^n, \quad |f_{n2}(z)| \leqq A_{13} R^n, \tag{18}$$

respectively on any closed set interior to J_1 and on any closed set exterior to J_2; we choose these sets to be closed Jordan regions containing in their interiors the closed interior of C_ϱ and closed exterior of C'_ϱ respectively, where $\varrho\ (>1)$ is suitably chosen.

By the method of proof of (4), now by use of (18), there exists for every n a sequence of polynomials $P_{n,k}(z)$ in z of degrees k and of polynomials $Q_{n,k}(1/z)$ in $1/z$ of degrees k such that we have

$$|f_{n1}(z) - P_{n,k}(z)| \leqq A_{14} R^n/\varrho^k, \quad z \text{ on } E,$$
$$|f_{n2}(z) - Q_{n,k}(1/z)| \leqq A_{14} R^n/\varrho^k, \quad z \text{ on } E;$$

here A_{14} is independent of k, n, and z. The proof of Theorem 3 now follows the proof of Theorem 1.

Theorem 3, and a Corollary analogous to that of Theorem 1, can be quite useful in the study of degree of approximation by polynomials on an analytic Jordan curve rather than in a closed Jordan region, to prove analogues and extensions of Theorem 2 [7, 8]. In particular, it follows that if E is an analytic Jordan curve containing the origin in its interior, and if the function $f(z)$ is defined on E, then (15) is necessary and sufficient that $f^{(p)}(z)$ exist and satisfy a LIPSCHITZ $(0<\alpha<1)$ or ZYGMUND $(\alpha = 1)$ condition on E.

Theorem 3 obviously admits an extension: a function $f(z)$ approximated on a closed point set E whose complement consists of a finite number of regions $K_1, K_2, \ldots, K_\nu$ each bounded by a finite number of mutually disjoint analytic Jordan curves, by functions $f_n(z)$ analytic on an open set D containing E which satisfy (1) and (2), can also be approximated on E by rational functions $r_n(z)$ of respective degrees $n\nu$ whose poles (each of order not greater than n) lie in ν preassigned points β_l in the respective regions K_l, so that we have

$$|f(z) - r_n(z)| \leqq A/n^{p+\alpha}, \quad z \text{ on } E. \tag{19}$$

Conversely, of course (19) implies (1) and (2) with $r_n(z) \equiv f_n(z)$, where D is an arbitrary bounded set containing E and to which the β_k are exterior.

Theorems 1 and 3, extended by replacing the second member of (1) by ε_n and the second members of (3) and (15) by $A_0\varepsilon_{[n/\lambda]}+A_0'r^n$, also remain valid if the first members of (1), (3), and (15) are replaced by integrals of their respective p^{th} powers $(p>0)$ over the boundary of E. Theorem 1 can be correspondingly extended if E consists of a finite number of mutually disjoint Jordan regions and the first members of (1) and (3) are replaced by integrals of their respective p^{th} powers $(p>0)$ over E.

The foregoing considerations apply, with suitable modifications, to approximation by harmonic polynomials, as the writer plans to indicate on another occasion.

References

[1] CURTISS, J. H.: A note on the degree of polynomial approximation. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 873–878 (1936). – [2] WALSH, J. L., and W. E. SEWELL: Note on the relation between continuity and degree of polynomial approximation in the complex domain. Bull. Amer. Math. Soc. **43**, 557–563 (1937). – [3] WALSH, J. L.: Note on approximation by bounded analytic functions. Proc. Nat. Acad. Sci. (U.S.A.) **37**, 821–826 (1951). – [4] WALSH, J. L.: Interpolation and Approximation. New York 1935. – [5] WALSH, J. L., and H. M. ELLIOTT: Polynomial approximation to harmonic and analytic functions: generalized continuity conditions. Trans. Amer. Math. Soc. **68**, 183–203 (1950). – [6] ELLIOTT, H. M.: On approximation to functions satisfying a generalized continuity condition. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 1–23 (1951). – [7] WALSH, J. L.: Degree of approximation to functions on a Jordan curve. Trans. Amer. Math. Soc. **73**, 447–458 (1952). – [8] WALSH, J. L., and H. M. ELLIOTT: Degree of approximation on a Jordan curve. Proc. Nat. Acad. Sci. (U.S.A.) **38**, 1058–1066 (1952).

Dept. of Mathematics, Harvard University, Cambridge, Mass. (U.S.A.)

(Eingegangen am 15. September 1958)

LOEWNER, C.
Math. Zeitschr. 72, 53–60 (1959)

A theorem on the partial order derived from a certain transformation semigroup[1])

In memoriam LEON LICHTENSTEIN

By
CHARLES LOEWNER

With every semigroup Γ of transformation of a set D into itself a partial order is connected: We write $x < y$ for two elements of D if there exists a transformation of Γ mapping x into y. This relation between two elements of D is transitive on account of the semigroup property of Γ. If Γ contains the identity mapping the order relation is reflexive and it is antisymmetric if the further condition is satisfied that existence of transformations in Γ mapping x into y and y into x respectively implies $x = y$.

We shall be concerned with a semigroup of transformations which are finite dimensional analogues of mappings in function space arising in the study of linear parabolic partial differential equations

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathfrak{L}_t(f). \tag{1}$$

The right hand side of (1) is supposed to represent for each value of the "time" variable t of an interval $\langle a, b\rangle$ a linear differential operator in spatial variables $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ varying in a fixed spatial domain Δ[2]). Now let us assume that some time-independent linear homogeneous boundary conditions have been introduced which guarantee a unique solution of (1) for sufficiently regular initial values at $t = a$. Then the transition from the initial values to the end values at $t = b$ of a solution may be considered as a mapping in the space of functions in Δ satisfying the given boundary conditions, *generated by infinitesimal transformations in this function space*. The right hand side of (1) gives the one-parameter family of infinitesimal transformations generating the transformation.

In important problems in the theory of parabolic partial differential equations the following conditions are satisfied:

(a′) $\mathfrak{L}_t(f)$ is, for each $t \in \langle a, b\rangle$, self-adjoint with respect to the given boundary conditions, i.e., with dv being the volume element of Δ

$$\int_\Delta f\, \mathfrak{L}_t(g)\, dv = \int_\Delta g\, \mathfrak{L}_t(f)\, dv$$

for any pair of functions f and g in Δ satisfying the given boundary conditions.

[1]) This research was supported by a National Science Foundation Grant, N.S.F.-03020.

[2]) All variables are supposed to be real.

(b') The mappings generated are *positivity preserving*, i.e., non-negative initial values produce non-negative solutions throughout.

(c') The integral $\int_{\Delta} f(v, t)\, dv$ taken for a solution of (1) is independent of t.

It is of interest to study those properties of the system of mappings generated by all differential equations of this type. This system is clearly a semigroup. We will consider here only the finite dimensional analogue of this problem and answer a question regarding the associated partial order. We replace the function f by a vector $u = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$ in a space E^{n+1} and correspondingly equation (1) by the differential equation

$$\frac{du}{dt} = A(t)\, u \tag{2}$$

where $A(t)$ represents an in general time-dependent linear operator (or the corresponding matrix in a specified coordinate system). We shall assume that $A(t)$ is $\mathfrak{L}_1$-integrable in $\langle a, b\rangle$ (i.e., all elements of the matrix $A(t)$ are $\mathfrak{L}_1$-integrable functions of t in $\langle a, b\rangle$). Then there exists a unique absolutely continuous function $u(t)$ satisfying (2) almost everywhere and having a given initial value $u(a)$. The transition from $u(a)$ to the end value $u(b)$ represents the linear mapping generated by the infinitesimal transformations described by the right hand side of (2).

Corresponding to the conditions (a'), (b') and (c') we subject $A(t)$ to the following restrictions:

(a) For each t the matrix $A(t)$ is symmetric.

(b) Calling a vector u positive if all its components are non-negative we require that a positive initial value $u(a)$ leads to a positive solution $u(t)$ throughout. One easily sees that this condition is expressed by the following inequalities for the elements of $A(t) = (a_{ij}(t))$

$$a_{ij}(t) \geqq 0 \quad (i \neq j) \text{ almost everywhere.} \tag{3}$$

(c) The sum $\sum_{i=0}^{n} u_i(t)$ of the components of a solution $u(t)$ of (2) is constant. This is expressed by the equations

$$\sum_{\varrho=0}^{n} a_{i\varrho}(t) = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n) \text{ almost everywhere.} \tag{4}$$

We form the totality of mappings generated by differential equations satisfying the conditions (a), (b) and (c) and add to them all limiting transformation using the ordinary topology in the matrix space. We obtain so a topologically closed semigroup Γ of linear mappings and we are interested in the partial order in the $(n+1)$-dimensional vector space connected with it. We shall answer in this paper the following question: *Which vectors u follow, in the sense of the adopted order, the vector $e = (1, 0, 0, \ldots, 0)$?* This is the finite dimensional analogue of the study of those properties of the GREEN's functions of parabolic differential equations common to all equations (2) satisfying the conditions (a'), (b') and (c').

We will describe the answer we shall obtain. Since the coordinates of each successor of e satisfy the equation $\sum_{i=0}^{n} u_i = 1$ we can eliminate u_0 and operate in the space E^n of the coordinates $u_1, u_2, \ldots, u_n$ which we call then successively $x_1, x_2, \ldots, x_n$. The order relation can then be transferred from E^{n+1} to E^n and we are then interested in the successors of the origin 0 of E^n. Let $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ be a system of p different indices from the sequence $1, 2, \ldots, n$ and introduce the point $p^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ with the coordinates

$$(5) \qquad x_{\alpha_1} = \frac{1}{2}, \quad x_{\alpha_2} = \frac{1}{2^2}, \ldots, x_{\alpha_p} = \frac{1}{2^p}, \qquad x_i = 0 \quad (i \neq \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)^3).$$

We shall show that the points $p^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ form the vertices of an n-dimensional *convex* polyhedron B and prove the

THEOREM. *A point x is successor of 0 if and only if it belongs to B.*

§ 1. Sufficiency proof

We shall need several geometrical lemmas which we will prove first. Let $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ be a system of n real numbers and form the set V of the points $p^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} = (a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_n})$ in E^n where $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ranges over all permutations of $(1, 2, \ldots, n)$. Then we prove

LEMMA 1. *The least convex closure of V is a polyhedron P in the hyperplane $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$ with the points of V as vertices.*

PROOF. We have to show that none of the points of V can be represented as a linear combination of other points of V with positive coefficients whose sum equals 1. Without loss of generality we can take the point $p^{12\ldots n}$. Suppose our assertion is false and $p^{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n}$ any of the points appearing in the linear combination. Since the first coordinate of all points of V are $\leqq a_1$, but the first coordinate of $p^{12\ldots n}$ equals a_1, we see that the first coordinate of $p^{\beta_1 \ldots \beta_n}$ must also be a_1. The second coordinates of the points of V whose first coordinate equals a_1 cannot surpass a_2, but the second coordinate of $p^{12\ldots n}$ equals a_2. Again we conclude that the second coordinate of $p^{\beta_1 \ldots \beta_n}$ must be a_2. By continuation of this procedure we finally arrive at the fact that $p^{\beta_1 \ldots \beta_n}$ coincide with $p^{12\ldots n}$ which contradicts our assumption.

LEMMA 2. *A point x belongs to P if and only if its coordinates satisfy the inequalities*

$$(6) \qquad (x_{\alpha_1} - a_1) + (x_{\alpha_2} - a_2) + \cdots + (x_{\alpha_i} - a_i) \leqq 0 \qquad (1 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_i \leqq n)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

and the equation

$$(6') \qquad (x_1 - a_1) + (x_2 - a_2) + \cdots + (x_n - a_n) = 0.$$

PROOF. That these conditions are necessary follows immediately from the fact that they are satisfied by the vertices of P, and convexity of P. In order

[3]) If $p = 0$ the corresponding point is the origin.

to prove the sufficiency we determine all hyperplanes of support through the vertices. Since P is a polyhedron they form the totality of hyperplanes of support of P. We write the equation of a hyperplane of support $L(x)=0$ always so that $L(x)\leqq 0$ in P. Again, without loss of generality we may restrict ourselves to the vertex $p^{12\cdots n}$. Let

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i-a_i)=0 \tag{7}$$

be the equation of a hyperplane of support through $p^{12\cdots n}$. This is the case if and only if the left side of (7) is non-positive for all vertices of P, i.e., if

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(a_{\alpha_i}-a_i)\leqq 0 \tag{8}$$

for all $n!$ permutations $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ of $(1, 2, \ldots, n)$. Let us first assume that strictly $a_1>a_2>\cdots>a_n$. Substituting for the permutation the transposition which interchanges the indices i and $i+1$ we obtain

$$c_i\geqq c_{i+1} \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1). \tag{9}$$

We set

$$L_i(x)=\sum_{k=1}^{i}(x_k-a_k) \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

and write

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}(c_i-c_{i+1})\,L_i(x) \tag{11}$$

in which formula $c_{n+1}=0$ is to be substituted. Evidently $L_i(x)=0$ $(i=1, \ldots, n)$ represent hyperplanes of support at $p^{12\cdots n}$ since $L_i(x)$ is non-positive for all vertices of P and vanishes at $p^{12\cdots n}$, and $L_n(x)$ even vanishes in P identically. Hence, inequalities (9) are necessary and sufficient for the equation of a hyperplane of support through $p^{12\cdots n}$ and $L(x)\leqq 0$ in P is then already a consequence of $L_i(x)\leqq 0$ $(i=1, \ldots, n-1)$.

Applying these considerations for all vertices of P we obtain a proof of Lemma 2 under the assumption $a_1>a_2>\cdots>a_n$. The general case $a_1\geqq a_2\geqq \cdots\geqq a_n$ is then obtained by a simple limiting process.

Let again $a_1\geqq a_2\geqq\cdots\geqq a_n\geqq 0$ be a system of real numbers which are now supposed to be *non-negative*, but not all zero. We associate with them a set W of points $p^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}$ in E^n, containing the previously defined set V as a subset, by the following definition: Let $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ be any permutation of $m\leqq n$ indices from $(1, 2, \ldots, n)$. Then the coordinates of $p^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}$ are

$$x_{\alpha_1}=a_1,\ x_{\alpha_2}=a_2, \ldots, x_{\alpha_m}=a_m, \qquad x_i=0\ (i\neq\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \tag{12}$$

W contains also the origin which corresponds to $m=0$. We prove

LEMMA 3. *The least convex closure of W is a polyhedron B with the points of W as vertices.*

The proof is analogous to that of Lemma 1. We have to show that none of the points of W can be represented as a linear combination of other points of W with positive coefficients whose sum equals 1. We start with $m=0$, i.e., with the origin. Here the assertion is evident since all other points have non-negative coordinates and at least one of them is positive. Now let m be positive. Without loss of generality we may take the point $p^{12\cdots m}$. Suppose our assertion is false and $p^{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_q}$ any of the points appearing in the linear combination. Since the first coordinates of all points of W are $\leqq a_1$ but the first coordinate of $p^{12\cdots m}$ equals a_1 we see that the first coordinate of $p^{\beta_1\cdots\beta_q}$ must be a_1. The second coordinates of the points of W whose first coordinate equals a_1 cannot surpass a_2, but the second coordinate of $p^{12\cdots m}$ is a_2. Again we conclude that the second coordinate of $p^{\beta_1\cdots\beta_q}$ is a_2. By continuing this way we finally see that $p^{\beta_1\cdots\beta_q}=p^{12\cdots m}$, which contradicts our assumption.

Later on we need the intersection of B with a hyperplane $\varepsilon_t\colon \sum_{i=1}^{n} x_i=t$. We may restrict t to the interval $0\leqq t\leqq \sum_{i=1}^{n} a_i$ since otherwise the intersection is empty. We introduce the following *polygons* $\pi^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$, $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ being again an arbitrary permutation of $(1,2,\ldots,n)$: $\pi^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ connects successively the points 0, p^{α_1}, p^{α_1,α_2}, $\ldots$, $p^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$. Evidently they all belong to the polyhedron B. We will prove

LEMMA 4. *The intersection of B with ε_t is the least convex closure P_t of the set V_t of the intersection points of ε_t with the polygons $\pi^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$.*

PROOF. Since the points of V_t belong to B the whole polyhedron P_t must fall into B. We have to show that no other points of ε_t belong to B. This is proved if through each boundary point of P_t, in the sense of the topology in ε_t, a hyperplane of support for the whole B can be laid. This we will derive from Lemma 2. The intersection point of $\pi^{12\cdots n}$ with ε_t has coordinates of the form $(a_1, a_2, a_k, a'_{k+1}, 0\ldots 0)$ with $0\leqq a'_{k+1}\leqq a_{k+1}$. Calling these coordinates a'_i, the coordinates of the intersections with all $\pi^{\alpha_1\cdots\alpha_n}$ are obtained by all permutations of the a'_i. Call further the linear functions (10), after replacing there the a_k by the a'_k, $L'_i(x)$. According to Lemma 2, through each boundary point of P_t in ε_t a hyperplane can be laid whose equation is obtained from one of the equations $L'_1=0$, $L'_2=0$, $\ldots$, $L'_{n-1}=0$ by permutation of the a'_i. Without loss of generality we may assume that this is one of those equations themselves, say $L'_i=0$ $(i<n)$. We now make a distinction:

(a) $i\leqq k$. Here $L'_i\equiv L_i$ and one sees immediately that L'_i is non-positive for all vertices of B and, therefore, $L'_i=0$ is a hyperplane of support for B.

(b) $i>k$. Here $L'_i\equiv -(x_{i+1}+\cdots+x_n)$ on P_t and evidently non-positive for all vertices of B. We found, therefore, in $-(x_{i+1}+\cdots+x_n)=0$ the equation of a hyperplane of support through the given point. The lemma is now completely proved.

We return to our original problem to determine the successors of 0 in E^n in the sense of adopted order. We introduce the polyhedron B belonging to the values $a_i = \frac{1}{2^i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ and prove first

LEMMA 5. *All points on the polygons $\pi^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ are successors of* 0.

PROOF. Let $A^{ij} (0 \leqq i < j \leqq n)$ be the matrix of the infinitesimal transformation of Γ belonging to the quadratic form $-(u_i - u_j)^2$. The one parameter semigroup generated by A^{ij} consists of the transformations

$$U^{ij}(t) = I + \frac{1 - e^{-2t}}{2} A^{ij} \qquad (t \geqq 0) \tag{13}$$

which in the limit $t \to \infty$ gives the transformation

$$U^{ij}(\infty) = I + \tfrac{1}{2} A^{ij} \tag{14}$$

which also belongs to Γ. Application of $U^{0\alpha_1}(t)$ $(0 \leqq t \leqq \infty)$ to 0 gives evidently all points of the first segment of $\pi^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ ending in p^{α_1}. Application of $U^{0\alpha_2}(t)$ $(0 \leqq t \leqq \infty)$ to p^{α_1} leads to all points of the second segment of $\pi^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ ending in $p^{\alpha_1 \alpha_2}$. Continuation of this procedure yields finally all points of $\pi^{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$.

Now let P be a polyhedron defined as in the beginning of this paragraph, constructed from some numbers $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ $(n \geqq 2)$. We prove

LEMMA 6. *Every point of P is successor of at least one vertex of P, obtained from it by a succession of a finite number of transformations $U^{pq}(t_{pq})$ $(p > 0,$ $q > 0,$ $0 \leqq t_{pq} \leqq \infty)$.*

PROOF. We prove the lemma first for the boundary points of P, the latter considered as point set in the hyperplane $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$. According to Lemma 2 such a boundary point satisfies one of the equations

$$x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \cdots + x_{\alpha_i} = a_1 + a_2 + \cdots + a_i \qquad (0 \leqq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_i \leqq n)$$

with $i < n$. Without loss of generality we may assume this equation to be $x_1 + x_2 + \cdots + x_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$. The boundary point is a linear combination of the vertices of P with non-negative coefficients whose sum equals 1. The vertices of P are the points $(\alpha_{\beta_1}, a_{\beta_2}, \ldots, a_{\beta_n})$ where $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ runs through all permutations of $(1, 2, \ldots, n)$. Since $a_1, a_2, \ldots, a_i$ are the i greatest among all a's and $x_1 + x_2 + \cdots + x_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ it is clear that the first i coordinates of any point appearing in the linear combination must have $a_1, a_2, \ldots, a_i$, in some order, as its first i coordinates and therefore $a_{i+1}, \ldots, a_n$, in some order, as its last $n - i$ coordinates. We can now apply complete induction. We assume that the lemma is proved for smaller values of n. Let $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i)$ be any permutation of $(1, 2, \ldots, i)$ and $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n)$ any permutation of $(i+1, i+2, \ldots, n)$. We can first conclude that $(x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ can be obtained from some of the points $(x_1, x_2, \ldots, x_i, a_{\alpha_{i+1}}, \ldots, a_{\alpha_n})$ by a finite succession of transformations $U^{pq}(t)$, $p > i$, $q > i$, since the latter

do not affect the first i coordinates. On the other hand each $(x_1, x_2, \ldots, x_i, a_{\alpha_{i+1}}, \ldots, a_{\alpha_n})$ can be obtained from a vertex $(a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_{i+1}}, \ldots, a_{\alpha_n})$ by a succession of transformations $U^{pq}(t)$, $p \leqq i$, $q \leqq i$. This proved the lemma for a boundary point of P. Take now an *interior* point x of P. Lay through x the line consisting of the points $(x_1+\tau, x_2-\tau, x_3, \ldots, x_n)$ $(-\infty < \tau < \infty)$. It falls completely into the hyperplane $x_1+x_2+\cdots+x_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$ and hits the boundary of P in it in two points x^1 and x^2. Now the point x is successor of x^1 or x^2 by a transformation $U^{12}(t)$ $(0 \leqq t \leqq \infty)$. This is simply the assertion of our lemma for $n=2$, which is trivial. Since x^1 and x^2 are successors of some vertex of P the lemma is completely proved. By combination of Lemmas 5, 6 and 4 we obtain the result that every point of B is successor of 0. This completes the sufficiency proof.

§ 2. Necessity proof

We have to show that no point outside of B can be successor of 0. To this end we have to study how the infinitesimal transformations of Γ applied to points on the invariant hyperplane $u_0+u_1+\cdots+u_n=1$ behave after projection into the space E^n of the last n coordinates. Let us designate the infinitesimal transformation in E^n obtained by the projection process from the infinitesimal transformation U of Γ by $\overline{U}$. We have to show that any $\overline{U}$ *contracts* the body B. $\overline{U}$ contracts B if for every boundary point x of B the vector $\overline{U}x$ points toward B. By this is meant that for any hyperplane of support of B at x the vector $\overline{U}x$ laid off from x falls into the half space bounded by the hyperplane and containing B. It is then known that any solution of (2) after projection into E^n with the initial value $x=0$, *which belongs to* B, cannot leave B. We will prove the contraction property. We start with the remark that we may restrict ourselves to vertices of B. Indeed every hyperplane of support contains several vertices. But $\overline{U}x$ is linear in x and every boundary point x of B in the hyperplane is a linear combination of those vertices with *non-negative* coefficients. We make further use of the second remark that every infinitesimal transformation U of Γ is a linear combination of the $U^{ij}(0 \leqq i < j \leqq n)$ with *non-negative* coefficients. Indeed we have if $U = (u_{ij})$ evidently

$$U = \sum_{i<j} u_{ij} U^{ij}. \tag{15}$$

The two remarks show that it is sufficient to verify the contraction property only for the $\overline{U}^{ij}$ and the vertices of B. We may assume that the vertex x has the form $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^p}, 0, \ldots, 0\right)$ $(0 \leqq p \leqq n)$. We have to show that for all $\overline{U}^{ij}$ the vector $\overline{U}^{ij}x$ laid off from x lies in the cone spanned by the half lines emanating from x and pointing toward the other vertices. Let first i and j be *positive*. Then the i-th and j-th components of $\overline{U}^{ij}x$ are $x_j - x_i$ and $x_i - x_j$ respectively and all other components zero. But the coordinates of x are non-increasing. Therefore the i-th and j-th components of $\overline{U}^{ij}x$ are modulo a non-negative factor equal to -1 and $+1$ respectively and the

vector $\overline{U}^{ij}x$ has the direction of the vector connecting x with the vertex obtained from x by interchanging the i-th and j-th coordinates.

Now let $i=0$, $j>0$. One easily computes that only the j-th component of $\overline{U}^{0j}x$ may not be zero. It equals $1-x_j-\sum_{i=1}^{n}x_i$. We distinguish two cases:

(a) $j>p$. Here the j-th component of $\overline{U}^{0j}x$ is $\frac{1}{2^p}>0$ and $\overline{U}^{0j}x$ has the direction of the vector leading from x to the vertex obtained from x by replacing its j-th component by $\frac{1}{2^{p+1}}$.

(b) $j\leqq p$. Here the j-th component of $\overline{U}^{0j}x$ is $\frac{1}{2^p}-\frac{1}{2^j}$. If $j=p$ the vector $U^{0j}x$ vanishes. If $j<p$ the j-th component of $\overline{U}^{0}x$ is *negative*. We then introduce two further vertices y and z: y is obtained from x by interchanging the j-th and the p-th components and z is obtained from x by replacing its p-th component by 0. The vector $y-x$ has two non-zero components, namely the j-th and the p-th, which differ from -1 and 1 by the *positive* factor $\frac{1}{2^j}-\frac{1}{2^p}$. The vector $z-x$ has one non-zero component namely the p-th, which is $\left(-\frac{1}{2^p}\right)$ which is *negative*. One sees that $\overline{U}^{0j}x$ can be written as a linear combination of $y-x$ and $z-x$ with *positive* coefficients. The contraction property is thus verified in all cases and so the necessity proof completed.

Dep. of Math., Stanford University, Stanford, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 1. November 1958)

SALIÉ, H.
Math. Zeitschr. 72, 61–75 (1959)

Zum Wertevorrat der Dedekindschen Summen

Meinem verehrten Lehrer LEON LICHTENSTEIN zum Gedächtnis

Von

HANS SALIÉ

Daß für die Summen

$$(1) \qquad s(m,n) = \sum_{\nu \bmod n} \left(\left(\frac{\nu}{n}\right)\right)\left(\left(\frac{m\nu}{n}\right)\right), \qquad (m,n)=1,\ n>0,$$

in denen

$$((a)) = \begin{cases} 0 & \text{für ganzes } a, \\ a-[a]-\frac{1}{2} & \text{sonst} \end{cases}$$

bedeutet, das Reziprozitätsgesetz

$$(2) \qquad s(m,n)+s(n,m) = -\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+\frac{1}{mn}\right)$$

besteht, wurde von R. DEDEKIND [1] aus der Theorie der Modulfunktionen bei der linearen Transformation von $\eta(\omega)$ erschlossen. H. RADEMACHER [2] bewies später den Zusammenhang zwischen (1) und (2) rein arithmetisch. Seitdem ist eine umfangreiche Literatur[1]) entstanden, die interessante Beziehungen der Dedekindschen Summen $s(m,n)$ und verschiedenen Verallgemeinerungen zu Analysis und Zahlentheorie ergeben hat.

Geht man von den $s(m,n)$ zu den ganzen Zahlen

$$D(m,n) = 12n\,s(m,n), \qquad (m,n)=1,\ n>0$$

über, so genügen diese nach (1) und (2) den Bedingungen

$$(3a) \qquad m\,D(m,n)+n\,D(n,m) = m^2+n^2-3mn+1,$$

$$(3b) \qquad D(m',n) = D(m,n), \qquad m' \equiv m \bmod n,\ n>0.$$

Da $D(m,n)$ durch (3) für alle natürlichen Zahlen m und n eindeutig definiert ist, liegt es nahe, die Eigenschaften von $D(m,n)$ zu studieren, indem man (3) zugrunde legt und die Summendarstellung (1) unberücksichtigt läßt. Bereits DEDEKIND [1] konnte unter dieser Voraussetzung Beziehungen für $D(m,n)$ auf einfache Weise herleiten.

Die vorliegende Note will Bemerkungen zu dem Wertevorrat machen, den $D(m,n)$ annimmt. Sie verwendet als Baustein für $D(m,n)$ die einfachere Funktion $T(m,n)$, die durch (23) mit $D(m,n)$ verknüpft ist. $T(m,n)$ wird für alle natürlichen m und n eindeutig definiert durch

$$(4a) \qquad T(m,n)+T(n,m) = \left[\frac{m}{n}\right]+\left[\frac{n}{m}\right]-2, \qquad m>0,\ n>0,$$

$$(4b) \qquad T(m',n) = T(m,n), \qquad m' \equiv m \bmod n.$$

[1]) Vgl. das Literaturverzeichnis in [3].

Nachdem auf Grund dieser Definition ein einfacher Aufbau der Theorie der $T(m, n)$ gegeben worden ist, wird auf $D(m, n)$ eingegangen lediglich unter der Voraussetzung (3) und (4). Bemerkenswert erscheint eine Transformation der m, n, die $D(m, n)$ invariant läßt (Satz 6). Dann werden quadratische Formen für $D(m, n)$ angegeben. Es folgt, daß $D(m, n)$ in jeder der fünf für $D(m, n)$ möglichen Restklassen mod 18 unendlich viele Werte annimmt. Berechnungen zeigen, daß $D(m, n)$ aus diesen Restklassen gewisse Werte wirklich ausläßt. Eine arithmetische Kennzeichnung dieser Ausnahmewerte steht noch aus.

1. Zuerst wird der Zusammenhang zwischen $T(m, n)$ und $D(m, n)$ hergestellt. Wenn $f(m, n)$ eine beliebige in m und n symmetrische ganzwertige Funktion ist, so läßt sich bekanntlich $t(m, n)$ aus den Bedingungen

$$t(m, n) + t(n, m) = f(m, n), \quad m > 0, \ n > 0, \tag{5a}$$

$$t(m', n) = t(m, n), \quad m' \equiv m \bmod n \tag{5b}$$

mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Teilers

$$(m, n) = r$$

ermitteln. Wird nämlich für $n > m$

$$n = r_0, \quad m = r_1$$

gesetzt und für $h = 0, 1, \ldots, L-1$

$$r_h = q_{h+1} r_{h+1} + r_{h+2}, \quad 0 < r_{h+2} < r_{h+1} \tag{6}$$

mit ganzzahligen q_{h+1} gebildet, wobei

$$r_L = r, \quad r_{L+1} = 0 \tag{7}$$

ist, so folgt aus (6) wegen (5b)

$$t(r_h, r_{h+1}) = t(r_{h+2}, r_{h+1}). \tag{8}$$

Durch Summation der sich aus (5) und (8) ergebenden Gleichungen

$$-(-1)^{h+1} t(r_{h+2}, r_{h+1}) + (-1)^h t(r_{h+1}, r_h) = (-1)^h f(r_h, r_{h+1}),$$
$$h = 0, 1, \ldots, L-1,$$

entsteht

$$t(m, n) = \sum_{h=0}^{L-1} (-1)^h f(r_h, r_{h+1}) + \tfrac{1}{2}(-1)^L f(r, r), \tag{9}$$

da aus (5a) und (5b)

$$t(0, r) = t(r, r) = \tfrac{1}{2} f(r, r)$$

zu entnehmen ist. Da (5) mit (4) zusammenfällt, wenn

$$f(m, n) = \left[\frac{m}{n}\right] + \left[\frac{n}{m}\right] - 2$$

ist, wird nach (9)

$$T(m,n)=\sum_{k=1}^{L}(-1)^{k-1}q_k-1+(-1)^L,\qquad m<n. \tag{10}$$

Aus (4) ergibt sich sofort

$$T(m,n)=T\left(\frac{m}{r},\frac{n}{r}\right),\qquad r=(m,n), \tag{11}$$

$$\begin{cases} T(m,1)=0, & m\geqq 1\\ T(1,n)=n-2+\left[\frac{1}{n}\right], & n\geqq 1. \end{cases} \tag{12}$$

Geht man von (5) durch Einführung der ganzwertigen Funktionen

$$d(m,n)=n\,t(m,n),\qquad g(m,n)=m\,n\,f(m,n)$$

zu den Bedingungsgleichungen für $d(m,n)$

$$m\,d(m,n)+n\,d(n,m)=g(m,n), \tag{13a}$$

$$d(m',n)=d(m,n),\qquad m'\equiv m \bmod n \tag{13b}$$

über, so liefert (9) die Auflösung

$$d(m,n)=n\sum_{k=0}^{L-1}(-1)^k\frac{g(r_k,r_{k+1})}{r_k r_{k+1}}+(-1)^L\frac{g(r,r)}{2r^2}\,n,\qquad r=(m,n). \tag{14}$$

Der gegebene Rechenprozeß zeigt, daß $t(m,n)$ und $d(m,n)$ für alle natürlichen m, n eindeutig bestimmt sind. Ist $g(m,n)$ ein Polynom in m und n vom Grade G mit rationalen Koeffizienten

$$g(m,n)=\sum_{0\leqq k+l\leqq G}c_{kl}(m^k n^l+n^k m^l),\qquad k\geqq 0,\ l\geqq 0, \tag{15}$$

so kann man die Lösung von (13) zurückführen auf die Lösung von

$$m\,d_{kl}(m,n)+n\,d_{kl}(n,m)=m^k n^l+n^k m^l,\qquad k\geqq l, \tag{16a}$$

$$d_{kl}(m',n)=d_{kl}(m,n),\qquad m'\equiv m \bmod n; \tag{16b}$$

denn es gilt offenbar

$$d(m,n)=\sum_{0\leqq k+l\leqq G}c_{kl}d_{kl}(m,n),\qquad k\geqq 0,\ l\geqq 0. \tag{17}$$

Im folgenden werden nur einfache Spezialfälle von (16) betrachtet. Es ergibt sich[2]) aus (3) und (17)

$$D(m,n)=d_{20}(m,n)+\tfrac{1}{2}d_{00}(m,n)-\tfrac{3}{2}d_{11}(m,n). \tag{18}$$

Ohne Rechnung entnimmt man (16)

$$d_{k1}(m,n)=n^k,$$

[2]) Entsprechende Zerlegungen sind nach (15) auch für die den Apostolschen Summen zugeordneten $d(m,n)$ möglich.

insbesondere

$$d_{11}(m, n) = n. \tag{19}$$

Werden $m \geqq 1$ und $n > 1$ teilerfremd vorausgesetzt, so gibt es eine kleinste positive Lösung $1 \leqq \overline{m} < n$ der Kongruenz

$$m\overline{m} \equiv 1 \bmod n, \quad m \geqq 1,\ n > 1,\ (m, n) = 1,$$

und es folgt

$$d_{00}(m, n) = 2\overline{m} - n, \quad (m, n) = 1. \tag{20}$$

Denn wegen der Voraussetzung $(m, n) = 1$ gibt es unendlich viele ganzzahlige Wertepaare x, y, die

$$m x + n y = 1 \tag{21}$$

erfüllen. Zu der Lösung $x = \overline{m}$ dieser Gleichung gehört $y = \overline{n} - m$, wenn $\overline{n}$ die kleinste positive Lösung von $n\overline{n} \equiv 1 \bmod m$ bezeichnet $(1 \leqq \overline{n} < m)$. Die aus (21) entstehende Beziehung $m\overline{m} + n\overline{n} - mn = 1$ rechnet sich nun in $m d_{00}(m, n) + n d_{00}(m, n) = 2$ um, was (20) beweist. Schließlich kann man $d_{20}(m, n)$ in (18) durch $T(m, n)$ ausdrücken. Wird in (13) $g(m, n) = m^2 + n^2$ gesetzt und beachtet man

$$\frac{r_k^2 + r_{k+1}^2}{r_k r_{k+1}} = \frac{r_k}{r_{k+1}} + \frac{r_{k+1}}{r_k} = q_{k+1} + \frac{r_{k+1}}{r_k} + \frac{r_{k+2}}{r_{k+1}},$$

so folgt aus (14)

$$d_{20}(m, n) = m + n\left[\sum_{k=1}^{L} (-1)^{k-1} q_k + (-1)^L\right]$$

oder wegen (10)

$$d_{20}(m, n) = m + n + n\,T(m, n). \tag{22}$$

Wegen (22), (20) und (19) ist

$$D(m, n) = m + \overline{m} - n + n\,T(m, n), \quad m \geqq 1,\ n \geqq 1,\ (m, n) = 1. \tag{23}$$

Im allgemeineren Falle, in dem

$$g(m, n) = a_1(m^2 + n^2) + a_2 m n + a_3(m + n) + a_4$$

ein beliebiges quadratisches in m und n symmetrisches Polynom bezeichnet, läßt sich die Lösung von (13) unter Beachtung von (15), (22), (19), (20) und

$$d_{10}(m, n) = 1$$

ebenfalls auf $T(m, n)$ zurückführen:

$$d^*(m, n) = a_1 m + a_4\overline{m} + a_3 + n\left[a_1 + \frac{a_2 - a_4}{2} + a_1\,T(m, n)\right].$$

Liegt in (13) der Spezialfall

$$m I(m, n) + n I(n, m) = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}(m + n - 1), \quad m \equiv n \equiv 1 \bmod 2 \tag{24}$$

vor, so gelingt auch hier auf Grund von (15) eine Reduktion der Lösung $I(m,n)$ auf $D(m,n)$. Man erhält

$$I(m,n) = \tfrac{1}{4}\left[d_{21}(m,n) + 2d_{10}(m,n) - \tfrac{3}{2}d_{11}(m,n) - d_{20}(m,n) - \tfrac{1}{2}d_{00}(m,n)\right],$$

woraus

$$I(m,n) = \tfrac{1}{4}\left[n^2 - 3n + 2 - D(m,n)\right], \quad (m,n) = 1 \tag{25}$$

folgt. Aus (24) entnimmt man $I(1,n) = 0$ für $n \geqq 1$, so daß

$$D(1,n) = n^2 - 3n + 2 \tag{26}$$

entsteht, was man auch aus (3) direkt erhält. (25) schreibt sich dadurch

$$I(m,n) = \tfrac{1}{4}\left[D(1,n) - D(m,n)\right], \quad (m,n) = 1. \tag{27}$$

$I(m,n)$ bedeutet bekanntlich die Inversionenzahl[3]).

2. Es ist nötig, $T(m,n)$ für negative m zu bestimmen.

$$T(-m,n) = -T(m,n), \quad n \geqq 1. \tag{28}$$

Wegen (4b) ist $T(n-m,n) = -T(m,n)$ zu beweisen. Aus (4a) ergibt sich für $m < n$

$$T(n-m,n) + T(n,n-m) = \left[\frac{n}{n-m}\right] - 2, \tag{29a}$$

$$T(n-m,m) + T(m,n-m) = \left[\frac{m}{n-m}\right] + \left[\frac{n-m}{m}\right] - 2, \tag{29b}$$

woraus wegen $T(n,n-m) = T(m,n-m)$ nach Subtraktion der Gln. (29)

$$\begin{aligned} T(-m,n) - T(n,m) &= \left[\frac{n}{n-m}\right] - \left[\frac{m}{n-m}\right] - \left[\frac{n-m}{m}\right] = 2 - \left[\frac{n}{m}\right] \\ &= -T(m,n) - T(n,m) \end{aligned}$$

folgt, also (28).

Aus dem Euklidischen Algorithmus erhält man

$$T(\overline{m},n) = T(m,n), \quad (m,n) = 1. \tag{30}$$

Definiert man nämlich zu (6) die Zahlen

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1, & \alpha_1 = q_1, & \alpha_h = q_h\alpha_{h-1} + \alpha_{h-2}, & h \geqq 2, \\ \beta_0 = 1, & \beta_1 = q_2, & \beta_h = q_{h+1}\beta_{h-1} + \beta_{h-2}, & h \geqq 2, \end{cases} \tag{31}$$

so liefern die Beziehungen (6)

$$\begin{aligned} r_0 &= \alpha_h r_h + \alpha_{h-1} r_{h+1}, \quad h \geqq 1, \\ r_h &= (-1)^{h-1}(\alpha_{h-1} r_1 - \beta_{h-2} r_0), \quad h \geqq 2, \end{aligned}$$

[3]) Vgl. [3] S. 163 (5.6).

insbesondere für $h = L$ wegen (7) und $r = 1$

$$n = \alpha_L, \tag{32}$$

$$(-1)^{L-1}\alpha_{L-1}m \equiv 1 \bmod n. \tag{33}$$

Aus (33) folgt

$$\overline{m} = (-1)^{L-1}\alpha_{L-1} + \frac{1+(-1)^L}{2}n. \tag{34}$$

Wegen (4) und (31) wird

$$T(\alpha_{h-1}, \alpha_h) + T(\alpha_{h-2}, \alpha_{h-1}) = q_h - 2 + \begin{cases} \left[\frac{1}{q_1}\right], & h = 2, \\ 0, & h \geqq 3. \end{cases}$$

Nach Multiplikation dieser Gleichung mit $(-1)^{h-1}$ und Summation über h entsteht wegen (28), (32), (34), (10) und (12)

$$T(\overline{m}, n) - T(1, q_1) = 1 + (-1)^L - \left[\frac{1}{q_1}\right] + \sum_{h=2}^{L}(-1)^{h-1}q_h = T(m, n) - T(1, q_1),$$

also (30). Von einer Verwendung von $T(m, n)$ für $n \leqq 0$ wird abgesehen.

3. $T(m, n)$ nimmt alle ganzzahligen Werte an, wie (12), (28) und (37) zeigen. Unmittelbar aus der Definition (4) folgen die Beziehungen für jedes ganze $x \geqq 1$

$$\begin{cases} T(m, mx + n) = x - \left[\frac{m}{n}\right] + T(m, n) \\ \qquad\qquad = x - 2 + \left[\frac{n}{m}\right] - T(n, m), \quad m \geqq 1,\ n \geqq 1. \end{cases} \tag{35}$$

Für $x > 3$ ist

$$T(m, mx - n) = x - 3 + T(n, m), \quad m > n.$$

Aus (35) sind die Spezialfälle

$$T(m, mx + 1) = x - m, \quad T(m, m^2 + 1) = 0, \tag{36}$$

$$\begin{cases} T(m, m^2 \pm am + 1) = \pm a \\ T(nx + m,\ nx^2 + mx + n) = T(m, n), \quad n > m,\ x \geqq 0 \end{cases} \tag{37}$$

zu gewinnen. Die letzte Gleichung ist bemerkenswert, da sie eine Transformation der Argumente von $T(m, n)$ angibt, bei der $T(m, n)$ ungeändert bleibt.

SATZ 1. *Sind die vier natürlichen Zahlen a, b, m, n durch*

$$an - bm = \pm(m, n) \tag{38}$$

verknüpft, so gilt für jedes ganze $x \geqq 1$

$$T(mx + a, nx + b) = \pm(m, n)x \mp \left[\frac{n}{(m, n)b}\right] + T(a, b), \tag{39a}$$

$$= \mp(m, n)x \pm \left[\frac{(m, n)b}{n}\right] + T(m, n). \tag{39b}$$

Der Beweis braucht nur für $(m, n) = 1$ geführt zu werden[4]). Ist $(m, n) > 1$, so ersetze man m durch $\frac{m}{(m,n)}$, n durch $\frac{n}{(m,n)}$ und x durch $(m, n)x$. Nun wird (39a) für $x = 1$ gezeigt:

$$T(m + a, n + b) = \pm 1 \mp \left[\frac{n}{b}\right] + T(a, b), \quad (m, n) = 1. \tag{40}$$

Da wegen (38) für $(m, n) = 1$

$$an - bm = \pm 1, \quad (m + a)n - (n + b)m = \pm 1$$

gilt, also

$$an \equiv \pm 1 \bmod b, \quad (m + a)n \equiv \pm 1 \bmod (n + b), \quad bm \equiv \mp 1 \bmod n \tag{41}$$

ist, folgt aus (30)

$$T(n, b) = \pm T(a, b), \tag{42}$$

$$T(n, n + b) = \pm T(m + a, n + b), \tag{43}$$

$$T(b, n) = \mp T(m, n). \tag{44}$$

Nach (4) ist nun

$$T(n, n + b) + T(b, n) = \left[\frac{n + b}{n}\right] - 2, \tag{45}$$

$$T(n, b) + T(b, n) = \left[\frac{b}{n}\right] + \left[\frac{n}{b}\right] - 2. \tag{46}$$

Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt die Behauptung (40), nachdem man (42) und (43) eingesetzt hat. Durch Induktionsschluß nach x entsteht (39a) aus (40); denn, wenn (39a) für $(m, n) = 1$ gilt, wird wegen (41b) und (39a)

$$T\big(m(x + 1) + a, n(x + 1) + b\big) = T\big(mx + (m + a), nx + (n + b)\big)$$

$$= \pm x \mp \left[\frac{n}{n + b}\right] + T(m + a, n + b) = \pm (x + 1) \mp \left[\frac{n}{b}\right] + T(a, b).$$

Setzt man (42) und (44) in (46) ein, so wird

$$T(a, b) = T(m, n) \pm \left[\frac{b}{n}\right] \pm \left[\frac{n}{b}\right] \mp 2.$$

Vermöge dieser Beziehung hängen (39a) und (39b) zusammen.

Satz 2. $T(am x \pm 1, m^2 x) = \pm [(a, m)^2 x - 3], \quad m \geqq 2, \ x \geqq 1.$

$$T(am x \pm 1, m^2 x) = \pm \left\{x - 2 + \left[\frac{1}{x}\right]\right\}, \quad m = 1, \ x \geqq 1. \tag{47}$$

Die oberen und unteren Vorzeichen gehören jeweils zusammen.

[4]) Die Beweismethode ist die von H. Rademacher [4, Satz 4] angewendete.

(47) folgt sofort aus (4b) und (12). Der Beweis von Satz 2 wird für $(a, m) = 1$ geführt. Ist $(a, m) > 1$, so ersetze man a durch $\frac{a}{(a, m)}$, m durch $\frac{m}{(a, m)}$ und x durch $(a, m)^2 x$. Man erhält

$$T(a m x + 1, m^2 x) = x - 3, \quad (a, m) = 1, \ m \geqq 2, \ x \geqq 1. \tag{48}$$

Das untere Zeichen im Satz 2 ergibt sich, wenn man dort a durch $m - a$ ersetzt und dann (28) und (5b) verwendet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a < m$. Ist nämlich $a = q m + a_0$, $q > 1$, $m > a_0 > 1$, so ist

$$T(a m x + 1, m^2 x) = T(a_0 m x + 1 + q m^2 x, m^2 x) = T(a_0 m x + 1, m^2 x).$$

Man definiere nun die r_h nach (6) mit $r_0 = m$, $r_1 = a \neq 1$, weiter $\alpha_{-1} = 0$ und für $h \geqq 0$ die α_h nach (31). Dann ist (7), (32) und (34) zu beachten:

$$r_L = 1, \quad r_{L+1} = 0, \quad \alpha_L = m, \quad (-1)^{L-1} \alpha_{L-1} = \bar{a} - \frac{1 + (-1)^L}{2} m.$$

Zur Abkürzung bezeichne für $1 \leqq h \leqq L$

$$T_h = T(m r_h x + (-1)^{h-1} \alpha_{h-1}, \quad m r_{h-1} x + (-1)^{h-2} \alpha_{h-2})$$
$$T_h' = T(m r_{h-1} x + (-1)^{h-2} \alpha_{h-2}, \quad m r_h x + (-1)^{h-1} \alpha_{h-1}).$$

Dann ergibt sich aus (4) nach leichter Rechnung

$$T_h + T_h' = q_h - 2 + \begin{cases} 0 & 1 \leqq h \leqq L - 1 \\ -\frac{1 + (-1)^{L-1}}{2} & h = L. \end{cases} \tag{49}$$

T_h' bleibt wegen (4b) ungeändert, wenn das q_h-fache zweite Argument vom ersten abgezogen wird. Es entsteht wegen (6) und (31) für $h \geqq 1$

$$T_h' = T\left(m(r_{h-1} - q_h r_h) x + (-1)^h (\alpha_{h-2} + q_h \alpha_{h-1}), \ m r_h x + (-1)^{h-1} \alpha_{h-1}\right) = T_{h+1}.$$

Aus (49) folgt nun wegen (10)

$$T_1 - (-1)^L T_{L+1} = T(a, m) - \frac{1 + (-1)^{L-1}}{2}. \tag{50}$$

Hierin ist T_1 die auszuwertende Summe (48) und unter Berücksichtigung von (35)

$$(-1)^L T_{L+1} = T\left(m, m x + \bar{a} - \frac{1 + (-1)^L}{2} m\right) = x - 2 - \frac{1 + (-1)^L}{2} - T(\bar{a}, m).$$

Aus (50) folgt nun wegen (30) die Behauptung (48). Der ausgeschlossene Fall $a = 1$ erledigt sich durch

$$T(m x + 1, m^2 x) = m - 3 - T(m^2 x, m x + 1) = m - 3 + T(m, m x + 1)$$
$$= m - 3 + (x - m) = x - 3,$$

wobei (4) und (36) verwendet wurden.

Satz 2 ist äquivalent

SATZ 2a. *Wenn für* $n>1$, $n\mid(m\pm1)^2$ *ist, gilt*

$$T(m,n)=\pm\left(3-|\mu(n)|-\frac{(n,m\pm1)^2}{n}\right),\qquad m\geqq 2, \tag{51}$$

wobei $\mu(n)$ *die Möbiussche Funktion bezeichnet, mit dem Zusatze, daß für* $n\mid m\pm1$ *in* (51) *stets* $|\mu(n)|=1$ *zu setzen ist.*

SATZ 3. *Für* $m\geqq 2$, $n\geqq 2$ *und* $(m,n)=(m-1,n)=1$ *gilt:*

$$T(m,n)+T(1-m,n)+T(1-\overline{m},n)=-3. \tag{52}$$

Die Beziehung nimmt für $(m,n)=(m+1,n)=1$, $m\geqq 1$, $n\geqq 2$ die Gestalt an

$$T(m,n)-T(m+1,n)-T(\overline{m}+1,n)=3. \tag{52a}$$

Zum Beweise führe man die Abkürzungen

$$\gamma_h=\alpha_h+(-1)^{h-1}r_{h+1},\qquad \varepsilon_h=\operatorname{sign}\gamma_h,\qquad -1\leqq h\leqq L$$

mit den aus dem Euklidischen Algorithmus für $(m,n)=1$ stammenden Bezeichnungen (6) und (31) ein. Da $(m-1,n)=1$ ist, sind alle $\gamma_h\neq 0$ und daher die Größen

$$v_h=\left[\frac{\varepsilon_h\gamma_h}{\varepsilon_{h+1}\gamma_{h+1}}\right],\qquad w_h=\left[\frac{\varepsilon_{h+1}\gamma_{h+1}}{\varepsilon_h\gamma_h}\right] \tag{53}$$

sinnvoll. Es genügen dann nach (4a) und (28)

$$U_h=T(\gamma_h,\varepsilon_{h+1}\gamma_{h+1})$$
$$U_h'=T(\gamma_{h+1},\varepsilon_h\gamma_h)$$

der Gleichung

$$\varepsilon_hU_h+\varepsilon_{h+1}U_h'=v_h+w_h-2,\qquad 0\leqq h\leqq L-1, \tag{54}$$

Aus

$$\begin{aligned}\gamma_{h+1}-q_{h+1}\gamma_h&=(\alpha_{h+1}-q_{h+1}\alpha_h)+(-1)^h(r_{h+2}+q_{h+1}r_{h+1})\\&=\alpha_{h-1}+(-1)^hr_h=\gamma_{h-1}\end{aligned}$$

folgt wegen (4b)

$$U_h'=T\big(\gamma_{h+1}-q_{h+1}\varepsilon_h(\varepsilon_h\gamma_h),\,\varepsilon_h\gamma_h\big)=T(\gamma_{h-1},\varepsilon_h\gamma_h)=U_{h-1}.$$

Es ist identisch

$$\sum_{h=0}^{L-1}(-1)^h\varepsilon_{2\left\lfloor\frac{h+1}{2}\right\rfloor}(\varepsilon_hU_h+\varepsilon_{h+1}U_{h-1})=(-1)^{L-1}U_{L-1}-U_{-1}, \tag{55}$$

wenn man beachtet, daß $\varepsilon_h=+1$ für ungerade h und $\varepsilon_0=-1$, $\varepsilon_{L-1}=\varepsilon_L=1$ ist. Andererseits läßt sich

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{h=0}^{L-1}(-1)^h\varepsilon_{2\left\lfloor\frac{h+1}{2}\right\rfloor}(v_h+w_h-2)=3+(-1)^L-v_{-1}+\\ \qquad\displaystyle+\sum_{0\leqq h\leqq\frac{L-1}{2}}\varepsilon_{2h}(w_{2h}-v_{2h-1})-\sum_{0\leqq h\leqq\frac{L-2}{2}}(\varepsilon_{2h+2}w_{2h+1}-\varepsilon_{2h}v_{2h})\\ \\ \qquad=4+(-1)^L-v_{-1}+\displaystyle\sum_{h=1}^{L}(-1)^{h-1}q_h\end{cases} \tag{56}$$

schreiben, wenn man $w_{-1}=v_{L-1}=0$ berücksichtigt und die Bedeutung der v_h, w_h in (53) heranzieht. Man braucht nun

$$\gamma_L=\gamma_{-1}=n,\quad \gamma_0=1-m,\quad \gamma_{L-1}=(-1)^L-(-1)^L\bar{m}+(-1)^L\frac{1+(-1)^L}{2}n,$$

und erhält

$$U_{-1}=T(n,m-1), \tag{57}$$

$$(-1)^L U_{L-1}=T(1-\bar{m},n). \tag{58}$$

Ferner ist nach (4)

$$U_{-1}-T(1-m,n)=v_{-1}-2. \tag{59}$$

Da nach (54) die linken Seiten von (55) und (56) übereinstimmen, gilt die Gleichung

$$(-1)^{L-1}U_{L-1}-U_{-1}=5-v_{-1}+T(m,n). \tag{60}$$

Es wurde dabei (10) eingesetzt. Nach (57), (58) und (59) entsteht aus (60) Satz 3.

SATZ 4. *Wenn $n>1$ ein Teiler von m^2+am+1 ist, gilt für $a=0, \pm 1, \pm 3$*

$$T(m,n)=a. \tag{61}$$

. Für $n=m^2+am+1$ ist wegen (37) nichts mehr zu beweisen. Wegen $m^2+am\equiv -1 \bmod n$ und (30) wird $T(m,n)=-T(m+a,n)$. Hieraus folgt für $a=0$ sofort $T(m,n)=0$. Ist $a=-1$, so läßt sich $m^2-m\equiv -1$ in der Gestalt $m(1-m)\equiv 1$ und $m\equiv 1-\bar{m}$ schreiben, so daß sich $T(m,n)=T(1-m,n)=T(1-\bar{m},n)$ und nach Satz 3 $T(m,n)=-1$ ergibt. Wenn $a=-3$ ist, also $(1-m)(1-\bar{m})\equiv -1$, so wird $T(1-m,n)=-T(1-\bar{m},n)$ und nach Satz 3 $T(m,n)=-3$. Die Fälle $a=+1, +3$ folgen entsprechend aus (52a).

SATZ 5. *Für $n\geqq 2$ und ganzes m ist*

$$-n+2\leqq T(m,n)\leqq n-2. \tag{62}$$

Ist $1<m<n$ und $(m,n)=1$, so gilt

$$\left[\frac{n}{m}\right]-m\leqq T(m,n)\leqq\left[\frac{n}{m}\right]+m-4, \tag{63}$$

so daß also für $1<m<\sqrt{n}$

$$T(m,n)>0 \tag{64}$$

wird.

Nach (12) und (28) ist (62) für $m=\pm 1$ richtig. Summiert man die Gln. (6), so entsteht

$$\sum_{h=2}^{L}q_h r_h=m+r_2-r\leqq 2m-2,\qquad m<n,$$

und aus (10) folgt

$$|T(m,n)|\leqq q_1-1+\sum_{h=2}^{L}q_h+1\leqq q_1+\sum_{h=2}^{L}q_h r_h\leqq\left[\frac{n}{m}\right]+2m-2,\qquad m<n.$$

Wenn $3 \leqq m \leqq \frac{n}{2} - 1$ ist, wird

$$\left[\frac{n}{m}\right] + 2m - 2 \leqq n - 2.$$

Es gilt nun

(62a) $$|T(m, n)| \leqq n - 2, \quad 1 \leqq m \leqq \frac{n}{2}$$

auch für $m = 2, \frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}$; denn es ist nach (4) und (30)

$$T\left(\frac{n-1}{2}, n\right) = -T(2, n) = -\frac{n-5}{2}, \quad n \equiv 1 \bmod 2$$

und nach (11)

$$T\left(\frac{n}{2}, n\right) = 0, \quad n \equiv 0 \bmod 2.$$

Wegen $|T(n-m, n)| = |T(m, n)|$ und (4b) ist (62a) für alle positiven und auf Grund von (28) für alle negativen m bewiesen. (63) folgt nun sofort aus (4a):

$$T(m, n) = \left[\frac{n}{m}\right] - 2 - T(n, m)$$

nach Einsetzen der Ungleichung (62)

$$-m + 2 \leqq T(n, m) \leqq m - 2,$$

so daß, wie behauptet

$$\left[\frac{n}{m}\right] - 2 - m + 2 \geqq T(m, n) \geqq \left[\frac{n}{m}\right] - 2 + m - 2$$

entsteht.

4. Die für $T(m, n)$ gültigen Formeln und Sätze lassen sich für die Herleitung von Eigenschaften von $D(m, n)$ verwenden. Aus (30) geht sofort wegen (23)

$$D(\bar{m}, n) = D(m, n), \quad (m, n) = 1, \ n \geqq 1$$

hervor. Weiter ergibt sich entsprechend (28)

$$D(-m, n) = -D(m, n), \quad (m, n) = 1, \ n \geqq 1,$$

wenn man zum Beweise die Gln. (29) durch aus (3) entnommene Beziehungen ersetzt. Die leicht aus (3) zu beweisende der Gl. (11) entsprechende Reduktionsformel

$$D(m, n) = r\, D\left(\frac{m}{r}, \frac{n}{r}\right) + D(r, r)\, d_{00}\left(\frac{m}{r}, \frac{n}{r}\right), \quad (m, n) = r$$

mit $D(r, r) = \frac{1 - r^2}{2r}$ soll im folgenden nicht verwendet werden, da künftig stets $(m, n) = 1$ vorausgesetzt werden soll. Überdies sei immer $n \geqq 1$.

Es werden nun aus einem gegebenen Wertepaar m, n unendlich viele Wertepaare m^*, n^* hergeleitet, so daß

$$D(m^*, n^*) = D(m, n)$$

wird. Natürlich ist die Forderung nach (3b) durch $m^* \equiv m \bmod n$ und $n^* = n$ zu erfüllen. Darüber hinaus gilt

SATZ 6. *Für jedes ganzzahlige* $x \geqq 0$ *gilt*

$$D\left(n x + m, \frac{(n x + m)^2 - D(m, n)(n x + m) + 1}{n}\right) = D(m, n),$$

wenn $(m, n) = 1$ *ist.*

Zunächst wird

$$D\big(m, D(n, m) + 3m - n\big) = D(m, n), \qquad (m, n) = 1 \tag{65}$$

bewiesen. Es ist wegen (3b), (23) und (30)

$$D[D(n, m) + 3m - n, m] = D(\bar{n}, m) = D(n, m). \tag{66}$$

Wird für die linke Seite von (65) kurz D geschrieben, so ergibt (3a) unter Berücksichtigung von (66)

$$\begin{aligned} m D + [D(n, m) + 3m - n]\, D(n, m) \\ = m^2 + [D(n, m) + 3m - n]^2 + 1 - 3m[D(n, m) + 3m - n]. \end{aligned}$$

Nach Umformung entsteht hieraus

$$m D + n D(n, m) = m^2 + n^2 + 1 - 3mn,$$

im Vergleich mit (3a) $D = D(m, n)$, also (65). Wegen (3) kann man (66) auch

$$D\left(m, \frac{m^2 - m D(m, n) + 1}{n}\right) = D(m, n)$$

schreiben. Ersetzt man hierin m durch $n x + m$, so bleibt $D(m, n)$ ungeändert, und es entsteht Satz 6. Aus ihm sind viele Spezialfälle zu entnehmen. Ist $D(m, n) = 0$, so wird $D\left(m, \frac{m^2 + 1}{n}\right) = 0$, d.h. es ist $n \mid m^2 + 1$. Aus $T(m, n) = 0$ folgt dagegen nicht notwendig $n \mid m^2 + 1$. Nach (48) ist nämlich für $x = 3$

$$T(3am \pm 1, 3m^2) = 0, \qquad (a, m) = 1, \quad m \geqq 2.$$

Es gilt die Umkehrung. Aus $n \mid m^2 + 1$, nämlich $\overline{m} = n - m$, folgt damit wegen (23) und Satz 4 $D(m, n) = T(m, n) = 0$. Satz 6 liefert aus $D(1, 3) = 2$

$$D(3x \pm 1, 3x^2) = \pm 2.$$

Damit $|D(m, n)| = 2$ ist, muß übrigens n die Form $3x^2$ haben. Allgemeiner folgt, wenn

$$D(m, n) = 2m \tag{67}$$

ist, aus Satz 6

$$D\left(n x + m, n x^2 - \frac{m^2 - 1}{n}\right) = 2m. \tag{68}$$

Die Voraussetzung (67) kann man z.B. für jedes $k \geqq 1$ erfüllen mit

$$m = k(2k + 1), \qquad n = (k + 1)(2k^2 + k + 1).$$

Dadurch geht (68) über in

$$D\big((k+1)(2k^2+k+1)\,x+k(2k+1),\ (k+1)(2k^2+k+1)\,x^2-(2k-1)\big)$$
$$=2k(2k+1).$$

Für $k=1$ erhält man

$$D(8x\pm 3,\ 8x^2-1)=\pm 6.$$

Wegen $D(1,4)=6$ ist ferner nach Satz 6

$$D(4x\pm 1,\ 4x^2\mp 4x-1)=\pm 6,\qquad x\geqq 2.$$

0, 2, 6 sind die absolut kleinsten Werte von $D(m,n)$. Bezeichnet

$$u_1=1,\ u_2=2,\ u_{\nu+2}=u_\nu+u_{\nu+1},\qquad \nu=1,2,3,\ldots$$

eine Fibonnaccische Folge, so gilt bei gegebenem ganzen $a\geqq 0$

$$D(m,n)=a(a+1)\,m,$$

wenn $m=u_{2\nu-1}$, $n=u_{2\nu+1}+(a-1)\,u_{2\nu-1}$ genommen wird. Für $a=1$ gilt (67) und daher (68):

$$D(u_{2\nu+1}x+u_{2\nu-1},\ u_{2\nu+1}x^2-u_{2\nu-3})=2u_{2\nu-1},\qquad x\geqq 1,\ \nu\geqq 1.$$

5. Es ist leicht, die Sätze 1 bis 5 auf $D(m,n)$ zu übertragen. Anstelle der Linearformen in x bei der T-Funktion sind nunmehr quadratische Formen in x bei der D-Funktion getreten[5]).

Satz 1′. *Unter der Voraussetzung* (38) *gilt für jedes ganze* $x\geqq 1$

$$D(mx+a,\ nx+b)=\pm n(m,n)\,x^2+$$
$$+\left[(m,n)\,D\left(\frac{m}{(m,n)},\frac{n}{(m,n)}\right)\pm 2b(m,n)-3n\right]x+D(a,b).$$

Satz 2′. $D(amx\pm 1,\ m^2x)=\pm\left[m^2x\left((a,m)^2x-3\right)+2\right]$.

Satz 2a′. *Für* $n>1$, $n\,|\,(m\pm 1)^2$ *ist*

$$D(m,n)=\mp\left[(n,m\pm 1)^2-3n+2\right].$$

Satz 3′. *Wenn* $(m,n)=(m-1,n)=1$ *ist, gilt für* $n\geqq 1$

$$D(m,n)+D(1-m,n)+D(1-\overline{m},n)=-3(n-1).$$

Satz 4′. *Wenn* $n>1$, $n\,|\,m^2+am+1$ *und* $a=0,\pm 1,\pm 3$ *ist, gilt für* $n\geqq 1$ $D(m,n)=a(n-1)$.

Satz 5′. *Für* $n\geqq 1$ *und* $(m,n)=1$ *ist*

$$-(n^2-3n+2)\leqq D(m,n)\leqq n^2-3n+2.$$

Ist $1<m<n$, $(m,n)=1$, *so gilt*

$$(n+1)\left[\frac{n}{m}\right]-(m+1)n+m\leqq D(m,n)\leqq n\left[\frac{n}{m}\right]+mn-3n-4.$$

---

[5]) Die Sätze 1′, 2′, 2a′ und 4′ entsprechen den Sätzen 5, 15 und 13 in [4], dort in anderem Aufbau. Satz 3′ steht in [5] mit anderem Beweis. Satz 5 verschärft Satz 2 in [4].

Die Beweise der Sätze 2′ bis 5′ sind aus den entsprechenden Sätzen 2 bis 5 unter Verwendung von (23) zu erhalten. Satz 1′ ist wie Satz 1 zu beweisen, nur daß man die Gln. (45) und (46) durch aus (3) folgende Beziehungen ersetzt. Der folgende[6])

SATZ 7. $D(mx+1,\ m(m+a)x+a)$

$$= m(m+a)x^2+m(m+a)(a-3)x+(a-1)(a-2)$$
$$= (x+a-3)[m(m+a)x+a]-(ax-2) \qquad x \geqq 0$$

verschafft Einblick in den Wertevorrat der $D(m,n)$. Er ist leicht durch wiederholte Verwendung von (3) zu erhalten. Einige Spezialfälle führen zu

$$D(mx \pm 1,\ m^2x \mp x(x-3)m-(x-3)) = \pm D(1,x)$$
$$D(m, mx+1) = mx(x-m)$$
$$D(x, 2x^2+1) = 2x^3$$
$$D(2^k, 2^{2k+1}+1) = 2^{3k+1}.$$

Aus $D(m,n)=2^\alpha$ folgt übrigens $\alpha \equiv 1 \bmod 3$.

$$D(3x+2,\ 12x+5) = 12x^2.$$

Zum Zwecke der Übersicht über die Werte von $D(m,n)$ lassen sich weitere Satz 7 entsprechende Sätze aufstellen. Im Anschluß an Satz 4′ kann man fragen, ob es stets ganze Zahlen m, n gibt, für die

$$D(m,n) = a(n-n_0)+D(1,n_0)$$

gilt, wenn a und $n_0 \geqq 1$ beliebig ganzzahlig gegeben sind. Die Frage ist zu bejahen; denn

$$m = n_0x+1$$
$$n = n_0x^2+n_0(a+3-n_0)x+(a+3-n_0)$$

ist eine partikuläre Lösung.

6. Es ist darauf hinzuweisen, daß alle bekannten Kongruenzen für $D(m,n)$ nach den Moduln 2, 4, 6 und 8 aus der Voraussetzung (3) ohne Verwendung von (1) zu erhalten sind. Im folgenden wird gebraucht:

(69) Für $n \not\equiv 0 \bmod 3$, $(m,n)=1$ ist $D(m,n) \equiv 0 \bmod 6$,
für $m \equiv \pm 1 \bmod 3$, $n \equiv 0 \bmod 3$, $(m,n)=1$ ist

(70) $$D(m,n) \equiv \pm 2 \bmod 18.$$

Die oberen und unteren Vorzeichen gehören jeweils zusammen. Will man (70) beweisen, so stellt man zunächst wegen (69)

$$n\,D(n,m) \equiv 0 \bmod 18$$

[6]) Ihm entspricht die in x lineare Beziehung $T(mx+1,\ m(m+a)x+a) = x+a-3$, $m \geqq 2$, $x \geqq 1$.

fest. (3b) liefert dann

$$m\,D(m,n) = [(m \mp 1)^2 + n^2 - 3mn] \pm 2m$$

und damit

$$m\,D(m,n) \equiv \pm 2m \bmod 18, \tag{71}$$

da die eckige Klammer $\equiv 0 \bmod 18$ ist, wie man leicht sieht. Für ungerade m folgt aus (71) sofort (70). Bei geradem m sind n und $m+3n$ ungerade. Man verwende dann $D(m,n) = D(m+3n, n)$.

Die Werte von $D(m,n)$ gehören also nach (69) und (70) den fünf Restklassen $0, \pm 2, \pm 6 \bmod 18$ an. In jeder dieser Klassen liegen unendlich viele Werte $D(m,n)$, wie etwa aus den quadratischen Formen

$$D_1 = D(x-1,\ 8x-9) = 8x^2 - 2, \qquad D_1 \equiv 0, -2, \pm 6 \bmod 18$$
$$D_2 = D(x+1,\ 4x+3) = 4x^2 + 2, \qquad D_2 \equiv 0, +2, \pm 6 \bmod 18$$

hervorgeht. Genauere Untersuchungen deuten darauf hin, daß es in diesen Klassen ganzzahlige Werte $w > 0$ gibt, für die $|D(m,n)| = w$ in m und n unlösbar ist, und zwar unterhalb 300

$$w \equiv -2 \bmod 18 \quad 34,\ 88,\ 214$$
$$w \equiv 6 \qquad\qquad\quad 24.$$

Eine zahlentheoretische Kennzeichnung der „Ausnahmewerte" w, die $D(m,n)$ nicht annimmt, steht noch aus. Bezeichnet $A(x)$ die Anzahl der Zahlen a mit $0 \leqq a \leqq x$, für die es Wertepaare m, n mit $|D(m,n)| = a$ gibt, so existiert ein von Null verschiedener Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x} = A\,.$$

Natürlich ist $A \leqq \frac{5}{18}$.

Literatur

[1] Dedekind, R.: Erläuterungen zu den Fragmenten XXVIII in: B. Riemann, Gesammelte Werke, S. 466–478; auch Dedekind's Gesammelte Werke **1**, 159–172 (1930). – [2] Rademacher, H.: Zur Theorie der Modulfunktionen. J. f. reine u. angewandte Math. **167**, 312–336 (1931). – [3] Meyer, C.: Über einige Anwendungen Dedekindscher Summen. J. f. reine u. angewandte Math. **198**, 143–203 (1957). – [4] Rademacher, H.: Zur Theorie der Dedekindschen Summen. Math. Z. **63**, 445–463 (1956). – [5] Dieter, U.: Beziehungen zwischen Dedekindschen Summen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **21**, 109–125 (1957).

Leipzig, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 3. November 1958)

HOPF, E.
Math. Zeitschr. 72, 76–81 (1959)

Zur Kennzeichnung der Euklidischen Norm

LEON LICHTENSTEIN in memoriam

Von

EBERHARD HOPF[1])

V sei ein reeller Vektorraum. Vektoren (Punkte) in V seien mit kleinen lateinischen, reelle Zahlen mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet. In V sei eine (Minkowskische) Norm $|x|$ gegeben: 1) $|0|=0$, sonst $|x|>0$, 2) $|\alpha x|=\alpha|x|$, $\alpha\geqq 0$, 3) $|x+y|\leqq|x|+|y|$. Symmetrie der Norm, $|-x|=|x|$, d.h. $|\alpha x|=|\alpha||x|$, ist nicht vorausgesetzt.

Orthogonalität, $x\perp y$, bedeutet bekanntlich, daß $|x-\alpha y|\geqq|x|$ für beliebiges α gilt. Trivialerweise gilt: $x\perp y\Rightarrow\beta x\perp\gamma y$, solange $\beta\geqq 0$ ist. Ist jedoch die Norm symmetrisch, so gilt diese Implikation für beliebiges β. Die geometrische Bedeutung von $x\perp y$, $|x|=1$, ist die, daß die durch den Endpunkt von x gehende Gerade der Richtung y eine Stützgerade der konvexen Einheitskugel $|z|\leqq 1$ ist.

Bekanntlich heißt eine Norm $|x|$ Euklidisch, wenn $|x|^2=(x, x)$ in V gilt, wobei (x, y) ein bilineares Skalarprodukt in V ist. Der im folgenden mitgeteilte Satz entsprang dem Bemühen des Verfassers, in seiner Vorlesung über normierte Vektorräume die Euklidizität mit Hilfe des Orthogonalitätsbegriffes möglichst einfach zu kennzeichnen, und zwar für alle Dimensionszahlen n einschließlich $n=2$. Für $n>2$ reicht für die Euklidizität nach einem schönen, von BLASCHKE vor mehr als vierzig Jahren gefundenen Satze bereits die Symmetrie der Orthogonalität, $x\perp y\Rightarrow y\perp x$, aus[2]). Diese Kennzeichnung der Euklidizität gilt jedoch nicht für $n=2$. Demgegenüber gilt der folgende Satz auch für $n=2$.

SATZ. *Ist für alle orthogonalen Zweibeine x, y, $x\perp y$, in V die Länge $|x+y|$ eine eindeutige Funktion der beiden Längen $|x|$ und $|y|$, so ist die Norm Euklidisch*[3]).

Die Voraussetzung besagt im wesentlichen, daß für alle rechtwinkligen Dreiecke in V die Länge der Hypothenuse durch die Längen der Katheten eindeutig bestimmt ist. Jedoch kann diese Fassung verschieden verstanden werden. Man kann z.B. die rechtwinkligen Dreiecke als orientiert annehmen, d.h. als Tripel von Vektoren x, y, z mit den Eigenschaften $x\perp y$, $x+y+z=0$,

[1]) The author is indebted to the Office of Naval Research for a research grant at Indiana University.

[2]) BLASCHKE, W.: Räumliche Variationsprobleme mit symmetrischer Transversalitätsbedingung. Sitzungsber. Sächs. Akad. d. Wiss. **68**, 50–55 (1916).

[3]) Ob die Schlußfolgerung richtig bleibt, wenn man sich in der Voraussetzung auf gleichschenklige Zweibeine, $|x|=|y|$, beschränkt, haben wir nicht untersucht.

und unter Hypothenuse den Vektor z verstehen. Es kommen vier verschiedene Voraussetzungen in Frage: Für orthogonale Zweibeine x, y ist a) $|x+y|$, b) $|x-y|$, c) $|y-x|$, d) $|-x-y|$ eine eindeutige Funktion von $|x|$ und $|y|$. Würde man von der Norm zusätzlich die Symmetrie, $|-z| \equiv |z|$, voraussetzen, so wären zufolge der eingangs gemachten Bemerkung über Orthogonalität alle diese Voraussetzungen einander gleichwertig. Demnach kommt es darauf an, die Symmetrie der Norm aus der jeweiligen Voraussetzung zu erschließen. Unter jeder der Voraussetzungen b), c), d) ist das ganz einfach. Wendet man z.B. c) oder d) auf den Fall $y=0$ an ($x \perp 0$, und auch $0 \perp z$, gilt immer), so folgt, daß $|-x|$ eine eindeutige Funktion von $|x|$ ist. Wegen der Homogenität kann also nur $|-x| \equiv c|x|$ sein. Ersetzt man hier x durch $-x$, so folgt $c=1$. Damit ist der Satz unter Voraussetzung b), c) oder d) auf den Satz unter Voraussetzung a) zurückgeführt. Im folgenden wird der Satz unter Voraussetzung a) bewiesen. Jedoch sei erwähnt, daß unter jeder der anderen Voraussetzungen der Satz direkt und einfacher bewiesen werden kann. Wir überlassen es dem Leser, die Vereinfachungen herauszufinden.

Der obige Satz hat die Eigentümlichkeit, daß er nicht nur für $n=2$ gilt, sondern daß er auch eine Kennzeichnung der Euklidizität durch die Existenz „vieler" Isometrien von V in sich birgt. Eine Isometrie von V ist eine Abbildung $x'=Ux$ von V auf sich, die die Entfernung erhält, $|Uy-Ux| \equiv |y-x|$. Jede Isometrie U mit $U0=0$ läßt die Norm ungeändert, $|Ux| \equiv |x|$. Daß Orthogonalität unter einer solchen Isometrie erhalten bleibt, folgt unter Benützung des Satzes von MAZUR und ULAM, nach welchem eine solche Isometrie in einem normierten reellen Vektorraum linear ist[4]), $U(x+y) = Ux+Uy$, $U(\alpha x) = \alpha U(x)$,

$$|Ux - \alpha Uy| = |Ux - U(\alpha y)| = |x - \alpha y| \geqq |x| = |Ux|.$$

Eine den Nullpunkt festlassende Isometrie führt also jedes orthogonale Zweibein x, y in ein ebensolches, x', y', über und es ist

$$|x'| = |x|, \quad |y'| = |y|. \tag{1}$$

Auf der anderen Seite gilt nun der Satz: Gibt es zu jedem Paar von orthogonalen Zweibeinen x, y und x', y' mit der Eigenschaft (1) eine Isometrie in V, welche x in x', y in y' überführt, so ist die Norm Euklidisch. Zwar ist dies nicht die einfachste unter allen Kennzeichnungen dieser Art, aber der Verfasser führt sie in seiner Vorlesung an, weil sie eine unmittelbare Folge unseres obigen Satzes ist. In der Tat folgt aus der Voraussetzung, daß für jedes Paar orthogonaler Zweibeine x, y und x', y' mit der Eigenschaft (1) auch $|y'-x'| = |Uy-Ux| = |y-x|$ ist, d.h., daß die Voraussetzung c) erfüllt ist. Der Satz bleibt richtig, wenn man sich in der Voraussetzung auf Zweibeine der Schenkellänge Eins beschränkt. Beim Beweise muß man aber dann den Satz von MAZUR und ULAM benutzen.

[4]) BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires, Chap. XI, § 3. Der Beweis wird dort unter Voraussetzung der Symmetrie der Norm geführt. Er kann aber ohne Schwierigkeit auf den allgemeinen Fall ausgedehnt werden.

In einem komplexen Vektorraum V wird Orthogonalität durch das Bestehen derselben Ungleichung $|x-\alpha y|\geqq y$ für alle komplexen α definiert. Der obige Satz läßt sich auch im komplexen Falle beweisen; jedoch ist dem Verfasser der Beweis nur unter der zusätzlichen Voraussetzung gelungen, daß die Norm symmetrisch ist, $|\varepsilon x|\equiv|x|$ für $|\varepsilon|=1$. Wir gehen hier darauf nicht näher ein.

Der obige Satz ist eine rein qualitativ pythagoräische Kennzeichnung der Euklidizität. Zum Beweise genügt es, aus der Voraussetzung den genauen Pythagoras, $x\perp y\Rightarrow|x+y|^2=|x|^2+|y|^2$, oder

$$x\perp y,\quad |x|=|y|=1\Rightarrow|\alpha x+\beta y|^2=\alpha^2+\beta^2, \tag{2}$$

herzuleiten. Der Beweis von (2) wird in vier Schritten geführt. Man betrachte die von dem in (2) gegebenen Zweibein x, y bestimmte Ebene E und in ihr die Einheitskugel $|x'|=1$. Sie ist eine geschlossene konvexe Kurve, die den Nullpunkt $x'=0$ im Inneren enthält.

LEMMA 1. *Die Kurve $|x'|=1$ enthält kein geradliniges Segment.*

BEWEIS. Angenommen, das Lemma wäre falsch. Dann gäbe es zwei verschiedene, vom Nullpunkt aus abgetragene Vektoren x_1, x_2

$$|x_1|=|x_2|=1, \tag{3}$$

mit Endpunkten auf dem geradlinigen Segment. Ist y',

$$|y'|=1,$$

ein Vektor in der Richtung des Segmentes, so folgt

$$x_1\perp y',\quad x_2\perp y'.$$

Es ist

$$x_2=x_1+\alpha y',\quad \alpha>0;$$

$\alpha>0$ darf angenommen werden, da dies sonst durch Vertauschung von x_1, x_2 erreicht werden kann. Durch Anwendung der Voraussetzung des Satzes auf das Paar von orthogonalen Zweibeinen

$$\lambda x_1,\mu y';\quad \lambda x_2,\mu y';\quad \lambda\geqq 0,\ \mu\geqq 0,$$

folgt wegen (3), daß

$$|\lambda x_1+\mu y'|=|\lambda x_2+\mu y'|=|\lambda x_1+(\alpha\lambda+\mu)y'|$$

gilt, d.h., daß die Funktion

$$|\lambda x_1+\mu y'|$$

von λ,μ gegenüber der Transformation

$$T:\ \lambda'=\lambda,\quad \mu'=\alpha\lambda+\mu$$

invariant ist, solange $\lambda\geqq 0$, $\mu\geqq 0$ besteht. Wegen $\alpha>0$ gilt das auch von allen Iterierten T^n, $n>0$,

$$|\lambda x_1+\mu y'|=|\lambda x_1+(n\alpha\lambda+\mu)y'|.$$

Insbesondere ist für $\lambda = 1, \mu = 0$

$$1 = |x_1| = |x_1 + n\alpha y'| \geqq |n\alpha y'| - |x_1| = n\alpha - 1.$$

Dies ist ein Widerspruch, und Lemma 1 ist bewiesen.

LEMMA 2. *Aus $x \perp y$ folgt $y \perp x$.*

BEWEIS. Es darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$|x| = |y| = 1 \tag{4}$$

angenommen werden. x, y sind linear unabhängig, und der Vektor y hat einen positiven Minimalabstand von der Geraden αx. Er werde für $\alpha = \alpha_0$ angenommen. Setzt man

$$y' = y - \alpha_0 x, \tag{5}$$

so ist

$$p = |y'| > 0, \quad p \leqq |y - 0 \cdot x| = 1, \quad |y'| \leqq |y' - \beta x| \tag{6}$$

für beliebige β. Also gilt

$$y' \perp x. \tag{7}$$

Wegen (4), (6), (7) darf die Voraussetzung unseres Satzes auf das Paar von orthogonalen Zweibeinen

$$\lambda x, \mu y; \quad \frac{\lambda}{p} y', \mu x$$

angewandt werden, $\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 0$. Daher folgt

$$|\lambda x + \mu y| = \left|\frac{\lambda}{p} y' + \mu x\right| = \left|\left(-\frac{\alpha_0}{p}\lambda + \mu\right) x + \frac{\lambda}{p} y\right|$$

für alle $\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 0$. Mit anderen Worten, die Funktion

$$|\lambda x + \mu y|$$

ist invariant gegenüber der linearen Transformation

$$\lambda' = -\frac{\alpha_0}{p}\lambda + \mu, \quad \mu' = \frac{1}{p}\lambda, \tag{8}$$

jedenfalls, solange $\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 0$ ist. Die charakteristische Gleichung der Transformationsmatrix,

$$\begin{vmatrix} -\frac{\alpha_0}{p} - \varrho & 1 \\ \frac{1}{p} & -\varrho \end{vmatrix} = \varrho^2 + \frac{\alpha_0}{p}\varrho - \frac{1}{p} = 0 \tag{9}$$

hat wegen $p > 0$ zwei reelle Wurzeln ϱ^+, ϱ^- verschiedenen Vorzeichens. Es ist

$$\varrho^+ + \varrho^- = -\frac{\alpha_0}{p}, \quad \varrho^+ \varrho^- = -\frac{1}{p}. \tag{10}$$

Für $\varrho = \varrho^+$ haben die Gleichungen

$$\lambda' = \varrho\lambda, \quad \mu' = \varrho\mu, \tag{11}$$

wie man mit Hilfe von (10) ausrechnet, die Lösung

$$\lambda = 1, \quad \mu = -\varrho^-.$$

Für diese positiven Werte von λ, μ ist also

$$|\lambda x + \mu y| = |\lambda' x + \mu' y| = |\varrho^+(\lambda x + \mu y)| = \varrho^+ |\lambda x + \mu y|.$$

Daher ist $\varrho^+ = 1$ und wegen (9), $\varrho = \varrho^+$,

$$p = 1 - \alpha_0. \tag{12}$$

Wegen (6), $p \leqq 1$, ist also $\alpha_0 \geqq 0$. Nun ist aber ganz allgemein die Norm $|x'|$ eine (nach unten) konvexe Funktion ihres Argumentes. Insbesondere ist also $|y - \alpha x|$ eine konvexe Funktion der Veränderlichen α (Funktion nirgends oberhalb der Sehne). Andererseits ist $|y - \alpha x| \geqq |y| - |\alpha x|$, also wegen (4) $|y - \alpha x| \geqq 1 - \alpha$, solange $\alpha \geqq 0$. Für $\alpha = \alpha_0$ gilt jedoch die Gleichheit, wie aus (12), (5) und (6), erste Gleichung, folgt. Für $\alpha = 0$ gilt die Gleichheit trivialerweise. Das ist nur dann möglich, wenn $|y - \alpha x| = 1 - \alpha$ für alle α zwischen 0 und α_0 gilt. Wäre nun $\alpha_0 > 0$, so wäre

$$|\lambda y + \mu x| = \lambda + \mu$$

in dem Sektor $\lambda \geqq 0$, $0 \geqq \mu \geqq -\alpha_0 \lambda$ der durch x, y bestimmten Ebene E, d.h. die Kurve $|x'| = 1$ in E enthielte ein geradliniges Segment, im Widerspruch zu Lemma 1. Daher ist $\alpha_0 = 0$, und wegen (5) und (7) gilt $y \perp x$. Lemma 2 ist somit bewiesen.

LEMMA 3. *Die Norm ist symmetrisch*, $|-x| \equiv |x|$.

BEWEIS. Aus Lemma 2 folgt

$$x \perp y \Rightarrow -x \perp y. \tag{13}$$

In der Tat gilt

$$x \perp y \Rightarrow y \perp x \Rightarrow y \perp -x \Rightarrow -x \perp y.$$

Man betrachte nun in irgendeiner, den Nullpunkt enthaltenden Ebene E die beiden Kurven $|x'| = 1$ und $|-x'| = 1$. Jeder von 0 aus abgetragene Radiusvektor wird von jeder der beiden Kurven in genau einem Punkte getroffen, und aus (13) folgt, daß die beiden Kurven in den zwei Schnittpunkten mit demselben Radiusvektor genau die gleichen Stützrichtungen haben. Daraus schließt man, daß die Kurven homothetisch sind. Wegen der Homogenität der Norm muß also $|-x| = c|x|$ für alle x gelten. Ersetzt man darin x durch $-x$, so folgt $c = 1$ und Lemma 3 ist bewiesen.

BEWEIS DES SATZES. Man betrachte die von dem Zweibein in (2),

$$x \perp y, \quad |x| = |y| = 1, \tag{13}$$

bestimmte Ebene E. Wir wissen jetzt, daß $\lambda x \perp \mu y$ für beliebige reelle λ, μ gilt. Nach der Voraussetzung des Satzes und wegen $|\alpha z| = |\alpha||z|$ hängt die Norm in E,

$$|\lambda x + \mu y|, \tag{14}$$

nur von $|\lambda|$ und $|\mu|$ ab und sie behält denselben Wert, wenn das Zweibein (13) durch irgendein anderes mit denselben Eigenschaften (13) ersetzt wird.

Nach Lemma 2 darf z.B. das Zweibein x, y durch das Zweibein y, x ersetzt werden. Es folgt also, daß die Norm (14) in E gegenüber den Spiegelungen

$$\lambda' = -\lambda, \quad \mu' = \mu \tag{15}$$

und

$$\lambda' = \mu, \quad \mu' = \lambda \tag{16}$$

invariant ist. Es sei

$$z = \alpha x + \beta y, \quad |z| = 1, \tag{17}$$

ein beliebiger Einheitsvektor in E. Zu ihm existiert ein zweiter derartiger Vektor z', derart, daß

$$z' = \alpha' x + \beta' y, \quad |z'| = 1, \quad z \perp z' \tag{18}$$

gilt (Stützvektor von $|x'| = 1$ im Endpunkt von z). z, z' sind linear unabhängig. Da in z' ein Faktor ± 1 verfügbar ist, darf

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} > 0 \tag{19}$$

vorausgesetzt werden. Nach der Voraussetzung des Satzes gilt

$$|\lambda z + \mu z'| = |\lambda x + \mu y|$$

für beliebige λ, μ, d.h. die Norm (14) ist gegenüber der Transformation

$$\lambda' = \alpha \lambda + \alpha' \mu, \quad \mu' = \beta \lambda + \beta' \mu$$

invariant. Kombiniert man sie mit jeder der beiden Spiegelungen (15), (16), so erhält man wieder zwei Transformationen, die die Norm ungeändert lassen. Ihre Matrizen sind

$$\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha' \\ -\beta & \beta' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta & \beta' \\ \alpha & \alpha' \end{pmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung der ersten ist

$$\varrho^2 + (\alpha - \beta')\varrho - D = 0. \tag{20}$$

Wegen (19) sind ihre beiden Wurzeln reell und von verschiedenem Vorzeichen Auf Grund der beim Beweise von Lemma 2 angestellten Betrachtung, wobei jetzt jedoch keine Schwierigkeiten mehr mit den Vorzeichen bestehen, schließt man nicht nur, daß die positive Wurzel $= 1$, sondern auch, daß die negative Wurzel $= -1$ ist. Wegen (20) ist daher $\alpha - \beta' = 0$, $D = 1$. Im Falle der zweiten Matrix hat man

$$\varrho^2 - (\beta + \alpha')\varrho - D = 0,$$

und man schließt analog, daß $\beta + \alpha' = 0$ ist. Wegen (19) ist also $D = \alpha^2 + \beta^2 = 1$. Demnach gilt stets

$$|\alpha x + \beta y|^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

solange die linke Seite gleich Eins ist. Wegen der Homogenität beider Seiten gilt das also uneingeschränkt. Damit ist der Satz bewiesen.

Dept. of Math., University of Indiana, Bloomington, Ind. (U.S.A.)

(Eingegangen am 28. Januar 1959)

SYNGE, J. L.
Math. Zeitschr. 72, 82—87 (1959)

A theory of elasticity in general relativity

In memoriam LEON LICHTENSTEIN

By

J. L. SYNGE

1. The basic equations

In classical elasticity, the strain (or deformation) of an elastic body is measured relative to a natural (unstrained) state, and the basic stress-strain relation is a linear equation (Hooke's Law) connecting stress and strain.

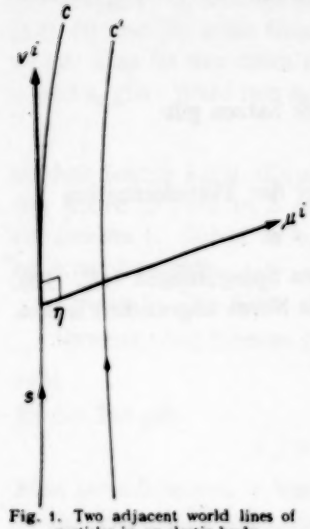


Fig. 1. Two adjacent world lines of particles in an elastic body

These ideas are not easy to carry over into Riemannian space-time in which the histories of particles appear as world lines. The concept of strain has to be reformulated in terms of the geometry of those world lines, and it is hard to see how a "natural" state can exist, since gravity is always operative. On examining the geometrical situation presented by a congruence of world lines, it is found that, though the concept of *strain* escapes us, the concept of *rate of strain* is easy to put into mathematical form. This suggests a revision of the formulation of Hooke's Law. If we use the letters LF to mean "is a linear function of", the classical Hooke's Law reads

(1.1) stress LF strain.

We modify this to read

(1.2) rate of change of stress LF rate of strain.

If this reformulation is accepted, our task is to express it in mathematical symbols, and then, with the aid of Einstein's field equations, to examine the mathematical theory of a gravitating elastic body, particularly in relation to the propagation of elastic waves. That is the purpose of the present paper.

Fig. 1 shows two adjacent timelike world lines C, C', representing the histories of two particles of an elastic body. We denote by V^i the unit tangent vector to C (4-velocity) and by η^i the infinitesimal displacement from C to C', drawn orthogonal to C.

Using a metric tensor g_{ij} for which the normal diagonal elements are $(1, 1, 1, -1)$, and denoting by ds the element of proper time on C (the so-called "velocity of light" is unity throughout the paper), we have

$$ds^2 = -g_{ij}\,dx^i\,dx^j, \tag{1.3}$$

and

$$V_i V^i = -1. \tag{1.4}$$

Then it can be shown that the rate of change of the magnitude η of the vector η^i is given by

$$\frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{ds} = \sigma_{ij}\mu^i\mu^j, \tag{1.5}$$

where μ^i is the unit vector in the direction of η^i and σ_{ij} is given by[1])

$$2\sigma_{ij} = V_{i|j} + V_{j|i} + V_{i|k}V^k V_j + V_{j|k}V^k V_i, \tag{1.6}$$

the vertical stroke indicating covariant differentiation. It is clear from (1.5) that it is appropriate to call σ_{ij} the *rate of strain tensor*. It has actually only six independent components, since it satisfies the identities

$$\sigma_{ij}V^j = 0. \tag{1.7}$$

For the energy tensor of matter we take the usual form

$$T_{ij} = \varrho V_i V_j - S_{ij}, \tag{1.8}$$

where ϱ is density and S_{ij} the (symmetric) stress tensor. In relativity the stress tensor is often subjected to a condition of orthogonality with the 4-velocity, but that restriction is *not* imposed here; thus in general

$$S_{ij}V^j \neq 0. \tag{1.9}$$

The basic equations which we shall now write down consist of the usual field equations of EINSTEIN and the modified Hooke's Law (1.2). The field equations read

$$G_{ij} = -\varkappa T_{ij}, \tag{1.10}$$

where G_{ij} is the Einstein tensor and $\varkappa = 8\pi\gamma$ (γ = gravitational constant), while (1.2) gives

$$S_{ij|k}V^k = c_{ijkm}\sigma^{km}, \tag{1.11}$$

where the tensor c_{ijkm} corresponds to the usual elastic constants. To avoid complications, we shall consider only the *isotropic* case for which

$$c_{ijkm} = \lambda g_{ij}g_{km} + \mu(g_{ik}g_{jm} + g_{im}g_{jk}); \tag{1.12}$$

here λ and μ are two invariant *elastic coefficients* which we take to be constants, or, more generally, functions of ϱ.

Eliminating S_{ij} by (1.8), we have now before us the following 21 equations.

$$\begin{cases} G_{ij} = -\varkappa T_{ij}, \\ T_{ij|k}V^k = (\varrho V_i V_j)_{|k}V^k - c_{ijkm}\sigma^{km}, \\ V_i V^i = -1. \end{cases} \tag{1.13}$$

[1]) A rigid motion satisfies $\sigma_{ij} = 0$; cf. N. ROSEN, Phys. Rev. **71**, 54 (1947), and G. SALZMAN and A. TAUB, Phys. Rev. **95**, 1659 (1954).

With four coordinate conditions, we have 25 equations for the following 25 unknowns:

$$g_{ij},\ T_{ij},\ V_i,\ \varrho. \tag{1.14}$$

Thus, on the mere basis of counting, we have before us a determinate elastic theory.

2. The Cauchy problem

We now examine the Cauchy problem for the system of equations (1.13), starting from an initial 3-space Σ. We choose a system of skew Gaussian coordinates x^i such that Σ has the equation $x^4=0$ and, throughout space-time,

$$g_{\alpha 4,4}=0, \quad g_{44}=-1, \tag{2.1}$$

where the comma indicates partial differentiation and Greek suffixes take the values 1, 2, 3. These are in fact the four coordinate conditions.

We take as Cauchy data (CD) on Σ the values of

$$g_{\alpha 4},\ g_{\alpha\beta},\ g_{\alpha\beta,4},\ T^i_j,\ V_\alpha,\ \varrho. \tag{2.2}$$

We do not have to consider V_4 because the last of (1.13) gives it algebraically. In the other members of (1.13) and the first of (2.1) we have 23 algebraic equations for the 23 derivatives

$$g_{\alpha 4,4},\ g_{\alpha\beta,44},\ T^i_{j,4},\ V_{\alpha,4},\ \varrho_{,4}. \tag{2.3}$$

If there exists a unique algebraic solution, then we know that in the neighbourhood of Σ the CD (2.2) determine a unique solution of the elastic equations. But if the algebraic equations do not possess a unique solution, then Σ is a *characteristic 3-space*, or, in more physical language, it is an elastic *shock wave*.

We shall use the notation CD for any quantities uniquely determined by the original CD (2.2) and the equations (1.13).

In (2.1) we have $g_{\alpha 4,4}=0$ and we need not consider these terms further. As for $g_{\alpha\beta,44}$, these occur only in the first equations in (1.13), and in those equations the other terms are all CD. It is known that no unique algebraic solution exists if

$$g^{44}=0, \tag{2.4}$$

and here we encounter the first elastic shock waves. The condition (2.4) implies that Σ is a *null surface*, like the history of an optical disturbance in vacuo, and so we get a result we might expect — *elastic shock waves include waves travelling with the fundamental speed in space-time.*

We now suppose Σ chosen so that

$$g^{44}\neq 0, \tag{2.5}$$

and proceed to investigate other shock waves, using a technique due to LICHNEROWICZ[2]). Under the condition (2.5), the equations (1.13) are equivalent to the following set:

$$R_{\alpha\beta} = -\varkappa(T_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} T^k_k), \tag{2.6}$$

$$T^i_{j|i} = 0, \tag{2.7}$$

$$T^i_{j|k} V^k = (\varrho V^i V_j)_{|k} V^k - c^i_{\cdot jkm} \sigma^{km}, \tag{2.8}$$

$$V_i V^i = -1, \tag{2.9}$$

together with the initial condition

$$G^4_i + \varkappa T^4_i = 0 \quad \text{on } \Sigma. \tag{2.10}$$

This last is a condition on the CD (2.2), since G^4_i do not involve second derivatives. We suppose it satisfied.

Now (2.6) can be solved, giving

$$g_{\alpha\beta,44} = \text{CD}, \tag{2.11}$$

and (2.7) gives

$$T^4_{j,4} = \text{CD}. \tag{2.12}$$

Of the quantities (2.3) there remain

$$T^\alpha_{j,4}, \; V_{\alpha,4}, \; \varrho_{,4}, \tag{2.13}$$

and for them we have the equations (2.8). We break these equations into two sets as follows:

$$T^\alpha_{j|k} V^k = (\varrho V^\alpha V_j)_{|k} V^k - c^\alpha_{\cdot jkm} \sigma^{km}, \tag{2.14}$$

$$T^4_{j|k} V^k = (\varrho V^4 V_j)_{|k} V^k - c^4_{\cdot jkm} \sigma^{km}. \tag{2.15}$$

Now by (2.12) the left hand side of (2.15) is CD, and so we have in (2.15) four equations for $V_{\alpha,4}$ and $\varrho_{,4}$. If these four equations can be solved uniquely, the right hand sides of (2.14) become CD, and we can solve for $T^\alpha_{j,4}$ provided V^4 does not vanish. Thus

$$V^4 = 0 \tag{2.16}$$

gives a characteristic. It implies that the world lines of matter lie in the 3-space Σ, and corresponds to a disturbance which has zero velocity relative to the matter.

Dismissing this case, we assume Σ to be such that

$$V^4 \neq 0, \tag{2.17}$$

and we concentrate our attention on the four equations (2.15); if they can be solved for $V_{\alpha,4}$ and $\varrho_{,4}$, then (2.14) gives

$$T^\alpha_{j,4} = \text{CD}. \tag{2.18}$$

[2]) LICHNEROWICZ, A.: Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, p. 31. Paris: Masson & Cie. 1955.

3. Elastic waves

We may write the crucial equations (2.15) in the form

$$(\varrho\, V^4 V_j)_{|k}\, V^k - c^4_{\cdot jkm}\, \sigma^{km} = \mathrm{CD}. \tag{3.1}$$

We seek to solve these four equations for $V_{\alpha,4}$ and $\varrho_{,4}$.

Hitherto we have used any skew Gaussian coordinates based on $\Sigma(x^4=0)$, such coordinates being defined by an arbitrary vector field chosen on Σ. We now tie the skew Gaussian coordinates to the matter on Σ by demanding that *the defining vector field shall be tangent to the world lines of the matter*. This tangency holds only on Σ, for the parametric lines of the coordinates are geodesics (by definition), whereas the world lines are not.

With this special choice of coordinates, we have

$$V^\alpha = 0, \qquad V^4 = 1 \text{ on } \Sigma, \tag{3.2}$$

and the following special equations result:

$$\left.\begin{array}{c} V_\alpha = g_{\alpha 4}, \qquad V_4 = -1, \\ V_{4|j} = 0, \qquad V_{4,4} = 0, \qquad V^4{}_{,4} = g^{4\alpha} V_{\alpha,4} + \mathrm{CD}, \\ g^{\alpha 4} g_{\alpha 4} = 1 + g^{44}, \qquad \sigma_{i4} = 0, \end{array}\right\} \text{ on } \Sigma \tag{3.3}$$

and also

$$\sigma_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(V_\alpha V_{\beta,4} + V_\beta V_{\alpha,4}) + \mathrm{CD} = \tfrac{1}{2}(g_{\alpha 4} V_{\beta,4} + g_{\beta 4} V_{\alpha,4}) + \mathrm{CD} \text{ on } \Sigma. \tag{3.4}$$

It is now easy to see that, if we take $j=4$ in (3.1), we can solve for $\varrho_{,4}$ in terms of $V_{\alpha,4}$ and CD. In fact, we can eliminate $\varrho_{,4}$ from (3.1), and reduce our problem to that of solving for $V_{\alpha,4}$ the three equations

$$K^\nu_\alpha V_{\nu,4} = \mathrm{CD}, \tag{3.5}$$

where

$$K^\nu_\alpha = \varrho\, \delta^\nu_\alpha - c^{4\beta\nu}_{\cdot\cdot 4}\, g_{\alpha 4} g_{\beta 4} - c^{4\beta\nu}_{\cdot\cdot\alpha}\, g_{\beta 4}. \tag{3.6}$$

Accordingly

$$\det K^\nu_\alpha = 0 \tag{3.7}$$

is the equation which determines the characteristic 3-spaces (other than those discussed previously).

Introducing the isotropy equation (1.12), we find

$$K^\nu_\alpha = (\varrho - \mu\, g^{4\beta} g_{4\beta})\, \delta^\nu_\alpha - (\lambda+\mu)\, g^{4\nu} g_{4\alpha}, \tag{3.8}$$

and hence (simplifying the algebra by temporary use of special coordinates to obtain an invariant result) we obtain

$$\det K^\nu_\alpha = [\varrho - (\lambda+2\mu)\, g^{4\beta} g_{4\beta}]\, [\varrho - \mu\, g^{4\gamma} g_{4\gamma}]^2. \tag{3.9}$$

Using (3.3), we thus get for the characteristic 3-spaces the equations

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + g^{44} = \varrho\, (\lambda+2\mu)^{-1}, \\ 1 + g^{44} = \varrho\, \mu^{-1} \qquad \text{(repeated)}. \end{array}\right. \tag{3.10}$$

Now a 3-space in space-time may be regarded as the history of a moving wave, and its speed may be computed relative to the world line of an observer. It can be shown that, for the type of coordinates we are using, the speed u of $x^4=0$ relative to the parametric lines of x^4 is given by

$$u^{-2}=1+g^{44}=g^{\alpha 4}g_{\alpha 4} \tag{3.11}$$

by (3.3). On applying this kinematical result to (3.10), we see that *elastic waves are propagated, relative to the elastic material, with speeds*

$$u_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}}, \qquad u_2=\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}. \tag{3.12}$$

It is rather remarkable that these values agree precisely with the formulae for the speeds of elastic waves in classical elasticity, λ and μ being the usual elastic constants. A further analysis shows that u_1 corresponds to longitudinal waves (P-waves) and u_2 to transverse waves (S-waves).

This theory was presented in detail in lectures delivered at the International Mathematical Summer Center, Sestriere, 20—30 July, 1958, and in a brief communication to the International Congress of Mathematicians, Edinburgh, 1958. I am indebted to Dr. C. B. RAYNER for helpful discussions and suggestions.

Dublin Institute for Advanced Studies

(Eingegangen am 6. März 1959)

KURATOWSKI, K.
Math. Zeitschr. 72, 88–94 (1959)

Un critère de coupure de l'espace euclidien par un sous-ensemble arbitraire

A la mémoire de LEON LICHTENSTEIN

Par

K. KURATOWSKI

Soit X un sous-ensemble compact de l'espace euclidien E^n à $n \geqq 2$ dimensions. Soit S_n l'espace E^n augmenté du point à l'infini (sphère n-dimensionnelle) et soit P_n l'espace E^n privé du point 0. D'après un théorème de K. BORSUK, *la condition nécessaire et suffisante pour que le complémentaire $S_n - X$ de X soit connexe, est que l'espace des transformations continues de X en P_n* (désigné par P_n^X) *soit connexe* (voir [1] et [6], p. 347)[1]. Je me propose de démontrer dans cette Note que le théorème de BORSUK reste vrai en omettant l'hypothèse de *compacité* de X (théorème II). Je vais établir en même temps, pour l'espace à n dimensions, un théorème suggéré par un énoncé important de S. EILENBERG (voir § 5) concernant le plan (théorème I)[2].

§ 1. Connexité entre deux points. Quasi-composantes

Rappelons qu'un espace (topologique) est dit *connexe entre les points p et q* — en symbole: $p \sim q$ — lorsque tout ensemble qui est à la fois fermé et ouvert et qui contient l'un de ces points contient aussi l'autre.

D'une façon plus générale, Z étant un sous-ensemble de l'espace envisagé et p et q deux points de Z, nous écrirons

$$p \sim q \quad \textit{dans} \quad Z,$$

lorsque Z, considéré comme l'espace, est connexe entre p et q; autrement dit, lorsqu'il est impossible de décomposer Z en deux ensembles séparés P et Q (c'est-à-dire tels que $\overline{P} \cap Q = 0 = P \cap \overline{Q}$) de façon que $p \in P$ et $q \in Q$.

On démontre facilement l'implication suivante:

1.1 $(p \sim q \textit{ dans } Z) \Rightarrow (p \sim q \textit{ dans } W \textit{ pour tout } W \supset Z)$.

Pour les espaces métriques on a l'énoncé plus précis suivant:

1.2 $(p \sim q \textit{ dans } Z) \equiv (p \sim q \textit{ dans } G \textit{ pour tout } G \textit{ ouvert} \supset Z)$.

---

[1]) Dans les énoncés précités on considère la sphère S_{n-1} à la place de l'espace P_n. Cela ne présente pas de différence essentielle.

[2]) Ces deux résultats ont été signalés par moi, sans démonstration, au Congrès d'Edinburgh (le 15 Août 1958).

En effet, en supposant que Z n'est pas connexe entre p et q, il existe une décomposition de Z en deux ensembles séparés P et Q contenant respectivement p et q. Or, d'après un théorème de TIETZE sur les espaces métriques (cf. [5], p. 128, th. 5), on peut faire correspondre aux ensembles P et Q deux ensembles ouverts et disjoints A et B tels que $P \subset A$ et $Q \subset B$. En posant $G = A \cup B$, la relation «$p \sim q$ dans G» est donc en défaut.

On constate aussitôt que:

1.3 *La relation $p \sim q$ est une relation d'équivalence.*

Les classes d'équivalence définies par cette relation sont nommées (d'après HAUSDORFF) *quasi-composantes*. La quasi-composante du point p c'est donc la partie commune de tous les ensembles fermés-ouverts qui contiennent p.

§ 2. Espace fonctionnel Y^X

Nous désignons dans ce § par X et Y des espaces métriques arbitraires.

Le symbole Y^X désigne, comme d'habitude, l'ensemble des transformations continues de X en sous-ensembles de Y. Dans le cas particulier où X est compact, on confère à l'ensemble Y^X le caractère d'espace topologique (même métrique), en entendant par convergence des fonctions (points de Y^X) la convergence uniforme. Dans le cas général, on introduit la topologie dans Y^X en définissant la fermeture de $\Phi \subset Y^X$ par l'équivalence (voir [6], Appendice)

$$(1) \qquad (f \in \bar{\Phi}) \equiv (f|F \in \overline{\Phi|F} \text{ quel que soit } F \text{ compact} \subset X)^3),$$

la fermeture dans le membre droit étant conçue dans le sens de la topologie de Y^F.

On démontre sans peine que, la fermeture $\bar{\Phi}$ étant définie par la formule (1), Y^X est un espace topologique (complètement régulier). Evidemment, dans le cas où X est compact, la topologie de Y^X coïncide avec celle de convergence uniforme (et, plus généralement: si X est localement compact — avec celle de convergence continue). Une autre conséquence immédiate de l'équivalence (1) est la continuité de l'opération $f|F$ (considérée, pour F fixe, comme fonction de f); plus précisément:

2.1 *L'opération $f|F$ transforme de façon continue l'espace Y^X en sous-ensemble de Y^F.*

On démontre aussi facilement l'énoncé suivant:

2.2 *Etant donnée une fonction h de deux variables $x \in X$ et $t \in T$, où T est compact, posons*

$$(2) \qquad g(t) = h(x, t).$$

[3]) $f|F$ désigne la fonction partielle qui s'obtient de f en restreignant la variabilité de son argument à l'ensemble F. Le symbole $\Phi|F$ désigne l'ensemble des fonctions partielles $f|F$ ou $f \in \Phi$.

On a alors l'équivalence suivante:

$$h \in Y^{X \times T} \equiv g \in (Y^X)^T, \tag{3}$$

autrement dit, *pour que la fonction g soit continue, il faut et il suffit que h le soit.*

Voici une conséquence importante de 2.2:

2.3. *Soient f_0 et f_1 deux fonctions-éléments de Y^X. Pour que ces fonctions soient homotopes, il faut et il suffit qu'elles appartiennent (considérées comme points de Y^X) à un arc contenu dans l'espace Y^X.*

En effet, en supposant que f_0 et f_1 sont homotopes, il existe (d'après la définition d'homotopie) une fonction $h \in Y^{X \times T}$, où T désigne l'intervalle 01, telle que $h(x, 0) = f_0(x)$ et $h(x, 1) = f_1(x)$. On a donc suivant (2): $f_0 = g(0)$ et $f_1 = g(1)$, et par conséquent $f_0, f_1 \in g(T) \subset Y^X$. La fonction g étant continue [d'après (3)], l'ensemble $g(T)$, comme image continue de l'intervalle, contient un arc unissant f_0 et f_1.

Réciproquement: si A est un arc unissant f_0 à f_1 dans Y^X, il admet une représentation continue g sur l'intervalle $T = 01$ telle que $g(0) = f_0$, $g(1) = f_1$ et $g(T) = A$. En appliquant l'équivalence (3) (de droite à gauche), on en conclut que f_0 et f_1 sont homotopes.

§ 3. Composantes de l'espace Y^X

X et Y désigneront dans ce § des espaces métriques séparables, dont Y est un *rétracte de voisinage*[4]).

Rappelons d'abord deux théorèmes importants qui interviendront dans la suite:

3.1. *Si X est compact, les composantes*[5]) *de l'espace Y^X sont fermées-ouvertes et connexes par arcs* (cf. [6], p. 260, théorème 3).

3.2. *Théorème de* K. BORSUK ([2], cf. [6], p. 278, th. 3). *Soient: F un sous-ensemble compact de X, Y un rétracte de voisinage, $f \in Y^X$ et $g \in Y^F$. Si les fonctions $f|F$ et g sont homotopes, il existe une extension $g^* \in Y^X$ de g qui est homotope à f, donc* (selon 2.3) *qui se laisse unir à f par un arc $\subset Y^X$.*

Autrement dit (en tenant compte de 3.1):

Si les fonctions $f|F$ et g appartiennent à la même composante de Y^F, g est de la forme $g = g^*|F$ où g^* et f appartiennent à la même composante de Y^X.

3.3. *Si Γ est une composante de Y^X, l'ensemble $\Gamma|F$ est une composante de Y^F, quel que soit F compact $\subset X$.*

---

[4]) Un espace (métrique séparable) Y est dit un *rétracte de voisinage*, si pour tout espace métrique séparable X, tout sous-ensemble fermé F de X et toute fonction $f \in Y^F$, il existe un entourage E de F et une extension $g \in Y^E$ de f.

[5]) On appelle *composante* d'un espace (non vide) X tout sous-ensemble connexe de X qui n'est contenu dans aucun autre sous-ensemble connexe de X.

En effet[6]), Γ étant connexe, $\Gamma|F$ l'est également (comme image continue de Γ selon 2.1). Il existe donc une composante Δ de Y^F telle que $(\Gamma|F)\subset\Delta$. Il s'agit de montrer que $(\Gamma|F)=\Delta$, autrement dit, que pour tout $g\in\Delta$, on a $g\in(\Gamma|F)$.

Or soit $f\in\Gamma$. Il vient $(f|F)\in(\Gamma|F)$, d'où $(f|F)\in\Delta$, et on conclut de 3.2 que $g=g^*|F$ où $g^*\in\Gamma$. Donc $g\in(\Gamma|F)$.

3.4. *Γ étant une composante de Y^X, on a l'équivalence:*

$$(f\in\Gamma)\equiv[(f|F)\in(\Gamma|F)\ \textit{pour tout } F \textit{ compact} \subset X].$$

En effet, comme composante de Y^X, Γ est un ensemble fermé, et on déduit 3.4 de la formule (1) en y substituant Γ à Φ.

Passons au théorème important suivant:

3.5. *Les quasi-composantes de Y^X sont connexes*; autrement dit: *dans l'espace Y^X, les quasi-composantes coïncident avec les composantes.*

En conséquence, *la relation $f_0\sim f_1$, où $f_0, f_1\in Y^X$, veut dire que f_0 et f_1 appartiennent à la même composante de Y^X.*

Soient en effet: Γ une composante de Y^X, $f_0\in\Gamma$ et $f_1\in(Y^X-\Gamma)$. Il s'agit de montrer que f_1 n'appartient pas à la quasi-composante de f_0, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble Φ fermé-ouvert tel que $f_0\in\Phi$ et $f_1\in(Y^X-\Phi)$.

Or, il existe d'après 3.4 un F compact $\subset X$ tel que $(f_1|F)\in[Y^F-(\Gamma|F)]$, et il ne reste qu'à définir Φ par l'équivalence:

$$(f\in\Phi)\equiv[(f|F)\in(\Gamma|F)].$$

Car, F étant compact, l'ensemble $\Gamma|F$, comme composante de Y^F, est fermé-ouvert dans Y^F (selon 3.1), donc – l'opération $f|F$ étant continue (cf. 2.1) – l'ensemble Φ est fermé-ouvert dans Y^X.

3.6. $(f_0\sim f_1)\equiv[(f_0|F)\sim(f_1|F)$ *pour tout* F *compact* $\subset X]$.

Soit, en effet, Γ_0 la composante de f_0. Il vient d'après 3.5 et 3.4:

$$(f_0\sim f_1)\equiv(f_1\in\Gamma_0)\equiv[(f_1|F)\in(\Gamma_0|F)]\equiv[(f_1|F)\sim(f_0|F)]$$

puisque $\Gamma_0|F$ est la composante de $f_0|F$ (dans Y^F, selon 3.3).

§ 4. Théorèmes de dualité

Théorème I. *Soient $X\subset E^n$ et $p, q\in S_n-X$. On a l'équivalence*

$$(4)\qquad (x-p\sim x-q\ \textit{dans}\ P_n^X)\equiv(p\sim q\ \textit{dans}\ S_n-X);$$

autrement dit: *les translations $x-p$ et $x-q$ (où $x\in X$)*[7]) *appartiennent à la même composante de l'espace P_n^X dans ce cas et dans ce cas seulement lorsque les points p et q appartiennent à la même quasi-composante de S_n-X.*

[6]) Nous reproduisons ici la démonstration d'un théorème analogue, énoncé pour le cas particulier des espaces X localement compacts. Voir [7].

[7]) Nous convenons que $|x-q|=1$ si $q=\infty$.

Démonstration. Remarquons d'abord que dans le cas particulier où X est compact, l'équivalence (4) veut dire que, pour que les fonctions $x-p$ et $x-q$ soient homotopes sur X relativement à P_n (c'est-à-dire: se laissent unir par un arc dans l'espace P_n^X), il faut et il suffit que les points p et q se laissent unir par un arc dans S_n-X; car, en supposant X compact, les composantes de P_n^X sont connexes par arcs (cf. 3.1), ainsi que les quasi-composantes de S_n-X (qui sont alors des ensembles ouverts connexes). Ainsi formulée, l'équivalence (4) (pour X compact) est un fait connu (cf. par exemple [5], p. 97, th. VI, 10).

Le théorème I étant donc vrai dans le cas de X compact, on n'a qu'à appliquer, dans le cas de X arbitraire, les équivalences 3.6 et 1.2 (en posant $G=S_n-F$ et $Z=S_n-X$):

$$\begin{aligned}(x-p\sim x-q \text{ dans } P_n^X) &\equiv [(x-p|F)\sim(x-q|F) \text{ pour tout } F \text{ compact} \subset X]\\ &\equiv (p\sim q \text{ dans } S_n-F \text{ pour tout } F \text{ compact} \subset X)\\ &\equiv (p\sim q \text{ dans } G \text{ pour tout } G \text{ ouvert} \supset S_n-X)\\ &\equiv (p\sim q \text{ dans } S_n-X).\end{aligned}$$

Théorème II. *Soit $X\subset E^n$. Pour que l'espace P_n^X soit connexe, il faut et il suffit que l'ensemble S_n-X le soit.*

Démonstration. 1° Admettons que l'ensemble S_n-X n'est pas connexe. Il se décompose alors en deux ensembles séparés et non vides P et Q. Posons $p\in P$ et $q\in Q$. Le membre droit de (4) est donc en défaut et d'après le théorème I, il en est de même du membre gauche. Cela veut dire que les fonctions $x-p$ et $x-q$ appartiennent à deux composantes distinctes de l'espace P_n^X. Cet espace n'est donc pas connexe.

2° Admettons que S_n-X est connexe. Soit $f_0, f_1\in P_n^X$. Il s'agit de prouver que $f_0\sim f_1$, donc, selon 3.6, que pour tout F compact $\subset X$, on a $f_0|F\sim f_1|F$.

Soit R la composante de S_n-F qui contient l'ensemble (connexe) S_n-X. Posons

$$F^*=S_n-R, \qquad \text{d'où } F\subset F^*\subset X.$$

Le complémentaire de F^* étant connexe (comme égal à R) et le théorème II étant vrai pour les ensembles compacts (comme nous l'avons indiqué au début), il vient $f_0|F^*\sim f_1|F^*$. On en conclut finalement que $f_0|F\sim f_1|F$ (en tenant compte de 3.6 où l'on remplace X par F^*).

§ 5. Remarques

Remarque 1. Comme nous l'avons indiqué au § 3, si X est compact et Y est un rétracte de voisinage, les composantes de l'espace Y^X sont connexes par arcs (théorème 3.1). Il importe de remarquer que, dans cet énoncé, l'hypothèse de compacité ne peut pas être omise, même dans le cas où $Y=P_2$.

Plus encore, on a le théorème général suivant:

X étant un sous-ensemble du plan tel que l'ensemble $S_2 - X$ est connexe sans être un semi-continu[8]*), l'espace P_2^X est connexe sans être connexe par arcs.*

Cela résulte du théorème II, rapproché du théorème suivant de S. EILENBERG ([3], p. 75, cf. [6], p. 389):

Soient $X \subset E^2$ et $p, q \in S_2 - X$. On a l'équivalence:

$$(x - p \text{ et } x - q \text{ appartiennent à un arc dans } P_2^X)$$
$$\equiv (p \text{ et } q \text{ appartiennent à un continu dans } S_2 - X).$$

Ainsi, par exemple, si l'on prend pour X l'ensemble formé par la réunion des segments $|x| \leqq 1$, $y = \pm 1/n$, et du segment $|x| \leqq 1$, $y = 0$, privé du point $(0, 0)$, les fonctions $f_0(x) \equiv x$ et $f_1(x) \equiv 1$ $(x \in X)$ ne se laissent pas unir par un arc dans P_2^X [car il n'existe évidemment aucun continu dans $S_2 - X$ qui unisse le point $(0, 0)$ au point à l'infini].

Remarque 2. La singularité envisagée dans la remarque 1 — à savoir que les composantes de P_2^X ne sont pas connexes par arcs — ne peut pas se présenter pour X *ouvert* $\subset E^2$. On montre, en effet, que dans ce cas, si f_0 et f_1 sont deux fonctions (éléments de P_n^X) homotopes sur tout sous-ensemble compact de X, ces fonctions sont homotopes (sur X tout entier) (voir [6], p. 329, 4).

Il est cependant remarquable que la singularité en question se présente parmi les sous-ensembles ouverts de l'espace à *trois* dimensions (comme me l'a fait observer J. H. C. WHITEHEAD, voir [9]).

Remarque 3. Les théorèmes I et II ont un caractère purement *qualitatif*. Des théorèmes *quantitatifs* (concernant, par exemple, le nombre des composantes de $S_n - X$) s'obtiennent en considérant l'ensemble des composantes de P_n^X comme groupe relativement à la *multiplication cohomotopique* de BORSUK (voir par exemple [8]). On montre alors — en précisant le théorème II — que, pour que le nombre des composantes de $S_n - X$ soit $m+1$, il faut et il suffit que le groupe des composantes de P_n^X soit isomorphe au groupe (additif) des points entiers de l'espace E^m. Le théorème I se laisse préciser comme suit: si les points $p_1, \ldots, p_m$ appartiennent à des quasi-composantes bornées de $S_n - X$, différentes deux à deux, les translations $x - p_1, \ldots, x - p_m$ sont linéairement indépendantes dans le sens de la multiplication cohomotopique, c'est-à-dire qu'une relation de la forme

$$(x - p_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - p_m)^{k_m} \sim 1$$

implique que $k_1 = 0, \ldots, k_m = 0$.

Les démonstrations de ces théorèmes (qui ont recours à des méthodes bien moins élémentaires que celles de la note présente) paraîtront prochainement dans la nouvelle édition du II-ème volume de ma Topologie.

[8]) Un ensemble est dit un *semi-continu* lorsque tout couple de ses points s'y laisse unir par un continu.

Ouvrages cités

[1] BORSUK, K.: Über Schnitte der n-dimensionalen Euklidischen Räume. Math. Ann. **106** (1932). — [2] BORSUK, K.: Sur les prolongements des transformations continues Fund. Math. **28**, 99–110 (1936). — [3] EILENBERG, S.: Transformations continues en circonférence et la topologie du plan. Fund. Math. **26**, 61–112 (1936). — [4] HUREWICZ, W., and H. WALLMAN: Dimension theory. Princeton Math. Series 1948. — [5] KURATOWSKI, K.: Topologie, vol. I, Monogr. Mat., 4-me éd. 1958. — [6] KURATOWSKI, K.: Topologie, vol. II, 3-me éd. 1959. — [7] KURATOWSKI, K.: Sur les composantes de l'espace des transformations d'un espace localement compact en un rétracte de voisinage. Bull. Acad. Pol. **6**, 565–571 (1958). — [8] KURATOWSKI, K.: Cohomotopic multiplication and duality theorems concerning arbitrary subsets of Euclidean space. Bull. Acad. Pol. **6**, 753–758 (1958). — [9] STEENROD, N. E.: Regular cycles of compact metric spaces. Ann. of Math. **41**, 833–851 (1940).

Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences
et
Université de Varsovie, Warszawa (Pologne)

(Eingegangen am 21. März 1959)

HILLE, E.
Math. Zeitschr. 72, 95–106 (1959)

An Application of Prüfer's Method to a Singular Boundary Value Problem

In memoriam LEON LICHTENSTEIN

By

EINAR HILLE *

1. Introduction. In 1926 H. PRÜFER [7] introduced a powerful method for the study of regular boundary value problems for ordinary linear second order differential equations. This method is based on a clever use of polar coordinates and leads to a simple proof of the existence of infinitely many characteristic values as well as to estimates of the latter and of the characteristic functions. See also the presentation in E. KAMKE [5] pp. 274–295. In recent years several other applications of the method have been given. We mention only the papers by P. HARTMAN [1] and R. A. MOORE [6].

In the present paper we shall employ a variant of the method for a study of the rate of growth of the characteristic values of a particular singular boundary value problem. Let $b(x)$ be a positive and continuous function defined in $[0, \infty)$, which will be further restricted below, and consider the system

$$b(x)\,y'' + \lambda\,y = 0, \tag{1.1}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \tag{1.2}$$

We ask for what values of λ does there exist a solution $y_0(x, \lambda)$ of this system such that $y_0(x, \lambda) \in C[0, \infty]$, that is, such that $y_0(x, \lambda)$ tends to a finite limit as $x \to \infty$. These values of λ form the *spectrum* of the boundary value problem (= the spectrum of the operator $-b(x)\,d^2/dx^2$ in the space $C[0, \infty]$ when restricted to elements satisfying (1.2)). In the cases considered here we shall have a *pure discrete point spectrum* $\{\lambda_n\}$ where

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots, \quad \lambda_n \to \infty.$$

Our main concern will be with the rate of growth of λ_n as a function of n.

We say that the equation (1.1) is

(1) *oscillatory* in $[0, \infty)$ if there exists a solution, not identically zero, which has infinitely many zeros in the interval;

(2) *non-oscillatory* in $[0, \infty)$ if every solution has a finite number of zeros there; and

* This research was supported by the United States Air Force through the Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command under Contract No. SAR/AF 49 (638) 224.

(3) *strictly non-oscillatory* in $[a, \infty)$ if every solution has at most one zero in $[a, \infty)$.

For the boundary problem under consideration we may disregard the oscillatory case since in this case the spectrum would contain the positive real axis in the λ-plane. In order that (1.1) be non-oscillatory for every fixed positive λ, we must have

$$\lim_{x\to\infty} x\int_x^\infty \frac{ds}{b(s)} = 0. \tag{1.3}$$

See [2], pp. 243—246. But this condition is not sufficient to guarantee the existence of solutions in $C[0, \infty]$. If $y_0(x, \lambda)\in C[0, \infty]$, we may assume that its sign is ultimately positive so that the sign of $y_0''(x, \lambda)$ is ultimately negative and the curve $y = y_0(x, \lambda)$ is concave downwards. Thus $y_0(x, \lambda)$ must tend to a finite positive limit. For this to be the case it is necessary and sufficient that

$$\int_0^\infty \frac{s\,ds}{b(s)} < \infty. \tag{1.4}$$

In this case we have two linearly independent solutions of the form

$$y_1(x, \lambda) = x[1+o(1)], \qquad y_2(x, \lambda) = 1+o(1) \tag{1.5}$$

and the characteristic values of the boundary problem are those values of λ for which $y_0(x, \lambda)$ and $y_2(x, \lambda)$ are linearly dependent.

The existence of a point spectrum $\{\lambda_n\}$, with the property

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n} < \infty, \tag{1.6}$$

may be concluded from the results of [3], Theorem 11.3, by suitable specialization. One takes $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$, and $b(-x) = b(x)$. The last assumption implies that the characteristic values contain an infinite subset corresponding to odd characteristic functions. Such a function satisfies condition (1.2), if suitably normalized, and is consequently a solution of the boundary value problem (1.1) and (1.2).

In a later paper [4], the author examined the rate of growth of the λ_n and of the C-norms of the characteristic functions $\omega_n(x)$ if

$$\int_{-\infty}^\infty [\omega_n(x)]^2 \frac{dx}{b(x)} = 1.$$

These results also have a bearing on the present problem when $b(x) = b(-x)$. From these results one can conclude that there are two essentially different subcases according as the integral

$$J \equiv \int_0^\infty \frac{ds}{[b(s)]^{\frac{1}{2}}} \tag{1.7}$$

is finite or infinite.

In the first case one finds that

$$\lambda_n = O(n^2)$$

and the rate of growth of $b(x)$ appears to affect the distribution of the λ_n's very little, if at all, as long as $J<\infty$.

In the second case, called the *fringe case* below, the rate of divergence of the integral affects the rate of growth of the λ_n's sharply, though it was not possible with the aid of the methods of [4] to prove that the estimates obtained there are of the correct order of magnitude.

This gap will be covered in the present paper where we obtain sharper estimates also in the fringe case. We shall prove the two theorems that follow.

THEOREM 1. *Suppose that* $b(x)=(x+1)^2\omega(x)$ *where* (i) $\omega(x)>0$, (ii) $\omega(x)$ *is continuously differentiable and* $\omega'(x)>0$ *for large* x, *and* (iii) $J<\infty$. *Then the* n*-th characteristic value of the boundary value problem* (1.1) *and* (1.2) *satisfies*

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{J}\right)^2 [1+o(1)], \qquad n\to\infty. \tag{1.8}$$

THEOREM 2. *Suppose that* (i) *and* (ii) *hold but not* (iii). *Suppose instead that* (iv) $\omega(x)$ *is feebly increasing,* (v) (1.4) *holds, and* (vi) *there exists an integer* $p\geqq 1$ *such that if*

$$L_p(x) = \log x \log_2 x \dots \log_p x, \tag{1.9}$$

then

$$\lim_{x\to\infty} \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix} \frac{[\omega(x)]^{\frac{1}{2}}}{L_p(x)} \int_0^x \frac{ds}{(1+s)\,[\omega(s)]^{\frac{1}{2}}} = \begin{cases}\mu_p\\ \beta_p\end{cases}, \tag{1.10}$$

where

$$1\leqq \beta_p \leqq \mu_p < \infty$$

except for $p=1$ *when we require* $1<\beta_1$. *Then*

$$\lambda_n = \varrho_n^2 \omega[L_p^{-1}(\sigma_n n)] \tag{1.11}$$

where $\varrho_n>\frac{1}{2}$ *and tends to* $\frac{1}{2}$ *when* $n\to\infty$. *Further* $L_p^{-1}(\cdot)$ *is the inverse function of* $L_p(\cdot)$. *The limits of indetermination of* σ_n *are*

$$\frac{2\pi}{\mu_1+1} \leqq \liminf \sigma_n \leqq \limsup \sigma_n \leqq \frac{2\pi}{\beta_1-1}, \qquad p=1, \tag{1.12}$$

$$\frac{2\pi}{\mu_p} \leqq \liminf \sigma_n \leqq \limsup \sigma_n \leqq \frac{2\pi}{\beta_p}, \qquad p>1. \tag{1.13}$$

Similar results hold if (1.2) is replaced by other boundary conditions of the usual type.

We say that $\omega(x)$ is *feebly increasing* if for every $\varepsilon>0$ and $C>1$ there exists an $x(\varepsilon, C)$ such that

$$\omega(x)<\omega(y)<(1+\varepsilon)\,\omega(x) \quad \text{when} \quad x(\varepsilon,C)\leqq x<y<Cx. \tag{1.14}$$

Further, as usual, $\log_p x$ denotes the p times iterated logarithm.

Without restricting the generality we may assume that $\omega'(x)>0$ for $x>0$. This will be done below.

2. The Polar Coordinates. Let $y_0(x,\lambda)$ be the solution of (1.1) and (1.2) where $0<\lambda$. Using a modification of PRÜFER's device, we introduce polar coordinates R,Θ as follows. We set

$$y_0(x,\lambda)=[b(x)]^{\frac{1}{4}}R(x)\sin[\Theta(x)], \tag{2.1}$$

$$y_0'(x,\lambda)=\lambda^{\frac{1}{2}}[b(x)]^{-\frac{1}{4}}R(x)\cos[\Theta(x)]. \tag{2.2}$$

Here and below all roots are taken to be positive. Substitution of these expressions into (1.1) gives two equations which may be solved for $R'(x)$ and $\Theta'(x)$ with the following result:

$$\frac{R'(x)}{R(x)}=\frac{1}{4}\frac{b'(x)}{b(x)}\cos[2\Theta(x)], \tag{2.3}$$

$$\Theta'(x)=\left\{\frac{\lambda}{b(x)}\right\}^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\frac{b'(x)}{b(x)}\sin[2\Theta(x)]. \tag{2.4}$$

The existence of $b'(x)$ follows from condition (ii); $b'(x)$ is positive for all x since we assume that $\omega'(x)$ has this property.

The second of these equations with the initial condition

$$\Theta(0)=0$$

determines $\Theta(x)=\Theta(x,\lambda)$ uniquely for all $x>0$. Once $\Theta(x)$ is known, we can find $R(x)=R(x,\lambda)$ from the first equation together with the initial condition

$$R(0)=\lambda^{-\frac{1}{4}}[b(0)]^{\frac{1}{4}}$$

which follows from (2.2) and (1.2). We note that

$$[R(x,\lambda)]^2=[b(x)]^{-\frac{1}{2}}[y_0(x,\lambda)]^2+\frac{1}{\lambda}[b(x)]^{\frac{1}{2}}[y_0'(x,\lambda)]^2, \tag{2.5}$$

whence it follows that $R(x,\lambda)>0$ for all x. More precisely, (2.3) shows that

$$\lambda^{-\frac{1}{2}}[b(x)]^{-\frac{1}{4}}<R(x,\lambda)<\lambda^{-\frac{1}{2}}[b(x)]^{\frac{1}{4}}. \tag{2.6}$$

We shall devote most of our attention to $\Theta(x,\lambda)$. This function is chosen so that $y_0(x,\lambda)=0$ if and only if $\Theta(x,\lambda)\equiv 0 \pmod{\pi}$ while $y_0'(x,\lambda)=0$ if an only if $\Theta(x,\lambda)\equiv\frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

LEMMA 2.1. *For each fixed $x>0$, the arc $\Theta(x,\lambda)$ is an increasing function of λ for $0<\lambda$.*

This follows from the fact that the right hand side of (2.4) is an increasing function of λ for $0<\lambda$. A formal proof can be given along the lines of that of Hilfsatz 1 in E. KAMKE [5] p. 274. As a function of x for λ fixed, $\Theta(x,\lambda)$ need not be strictly increasing. It will certainly have this property as long as

$$\frac{b'(x)}{[b(x)]^{\frac{3}{2}}}<4\lambda^{\frac{1}{2}},$$

but this inequality will be reversed for large values of x. In any case, however, the integral part of

$$\frac{2}{\pi}\,\Theta(x,\lambda)$$

is never decreasing, for equation (2.4) shows that $\Theta'(x,\lambda)>0$ at the points where $2\Theta(x,\lambda)$ is a multiple of π. Integration of (2.4) gives the formula

$$\Theta(x,\lambda)=\lambda^{\frac{1}{2}}\int_0^x\frac{ds}{[b(s)]^{\frac{1}{4}}}-\frac{1}{4}\int_0^x\frac{b'(s)}{b(s)}\sin[2\Theta(s,\lambda)]\,ds \tag{2.7}$$

which is basic for our discussion.

We note next that in both cases under consideration, condition (1.4) is satisfied so that equation (1.1) is non-oscillatory in the interval $[0,\infty)$. In the case of Theorem 2, this is part of the assumptions, but for Theorem 1 it follows from (ii) and (iii). Thus $y_0(x,\lambda)$ has a finite number of zeros on $(0,\infty)$. Suppose the number is n and let us denote the last zero by $x_n(\lambda)$.

LEMMA 2.2. *We have* $\Theta(x_n(\lambda),\lambda)=n\pi$ *and*

$$n\pi<\Theta(x,\lambda)<(n+\tfrac{1}{2})\,\pi \quad \textit{for} \quad x_n(\lambda)<x<\infty. \tag{2.8}$$

The first assertion follows from the definition of $x_n(\lambda)$ together with the fact that the integral part of $\frac{1}{\pi}\,\Theta(x,\lambda)$ is a never decreasing step function whose jumps are located at the zeros of $y_0(x,\lambda)$. From this fact we also get the first part of (2.8). Since the integral part of $\frac{2}{\pi}\,\Theta(x,\lambda)$ is also never decreasing with jumps at the zeros of $y_0(x,\lambda)$ $y_0'(x,\lambda)$, the second part of the inequality is equivalent to the assertion that $y_0'(x,\lambda)$ does not change its sign in $[x_n(\lambda),\infty)$. Suppose that $y_0(x_0,\lambda)>0$, $y_0'(x_0,\lambda)=0$, $x_n(\lambda)<x_0<\infty$, so that $y_0(x,\lambda)$ has a maximum at $x=x_0$. Since $y_0(x,\lambda)$ cannot have a zero beyond x_0 it must tend to a positive finite limit as $x\to\infty$. This calls for a change in sign of $y''(x,\lambda)$. Since the sign of the latter is opposite to that of $y_0(x,\lambda)$, we see that this situation cannot arise and $y_0'(x,\lambda)$ must keep a constant sign. This completes the proof of the lemma.

LEMMA 2.3. *We have*

$$\lim_{x\to\infty}\Theta(x,\lambda)=n\pi \quad \textit{or} \quad (n+\tfrac{1}{2})\,\pi, \tag{2.9}$$

according as $y_0(x,\lambda)$ *is unbounded or bounded as* $x\to\infty$.

If $y_0(x,\lambda)$ is unbounded, then it is of the form

$$y_0(x,\lambda)=C\,x[1+o(1)], \qquad y_0'(x,\lambda)=C[1+o(1)]$$

by formula (1.5). We now refer to formulas (2.1), (2.2), and (2.6). Since $y_0'(x,\lambda)\to C\neq 0$, we see that $\cos[\Theta(x,\lambda)]$ and $[b(x)]^{-\frac{1}{4}}R(x,\lambda)$ must be bounded away from zero. This means that

$$[b(x)]^{\frac{1}{4}}R(x,\lambda)>K[b(x)]^{\frac{1}{4}}=K(x+1)\,[\omega(x)]^{\frac{1}{4}}.$$

Since $x^{-1}y_0(x, \lambda)$ is bounded away from zero, this requires that

$$[\omega(x)]^{\frac{1}{4}} \sin[\Theta(x, \lambda)]$$

is bounded and this in turn shows that the sine factor must tend to zero. In view of (2.8) we conclude that $\Theta(x, \lambda) \to n\pi$ and, more precisely,

$$[\omega(x)]^{\frac{1}{4}} \{\Theta(x, \lambda) - n\pi\} \tag{2.10}$$

is bounded.

If, on the other hand, $y_0(x, \lambda)$ is bounded, then

$$y_0(x, \lambda) = C[1 + o(1)], \quad y_0'(x, \lambda) = o(1).$$

Since (1.1) gives

$$-y_0'(x, \lambda) = \lambda \int_x^\infty \frac{y_0(s, \lambda)}{b(s)}\, ds,$$

we see that

$$[b(x)]^{\frac{1}{4}} |y_0'(x, \lambda)| < |C|\, \lambda [b(x)]^{\frac{1}{4}} \int_x^\infty \frac{ds}{b(s)}$$

$$= |C|\, \lambda (x+1)\, [\omega(x)]^{\frac{1}{2}} \int_x^\infty \frac{ds}{(s+1)^2 \omega(s)} < |C|\, \lambda [\omega(x)]^{-\frac{1}{4}}.$$

According to (2.2) we have

$$[b(x)]^{\frac{1}{4}} y_0'(x, \lambda) = \lambda^{\frac{1}{4}} [b(x)]^{\frac{1}{4}} R(x, \lambda) \cos[\Theta(x, \lambda)]$$

and here the multiplier of the cosine is bounded away from zero by (2.6). It follows that $\cos[\Theta(x, \lambda)]$ must tend to zero and by (2.8) and the previous estimate we must have that

$$[\omega(x)]^{\frac{1}{4}} \{\Theta(x, \lambda) - (n + \tfrac{1}{2})\pi\} \tag{2.11}$$

is bounded.. The last two numbered formulas obviously prove Lemma 2.3 in a stronger form.

COROLLARY. *If μ is a characteristic value and if the corresponding characteristic function $y_0(x, \mu)$ has n positive zeros, then*

$$\lim_{x \to \infty} \Theta(x, \mu) = (n + \tfrac{1}{2})\pi. \tag{2.12}$$

3. The Characteristic Values. Though the existence of the characteristic values of this singular boundary value problem is known, we shall take another look at the problem with a view of showing that in the preceding Corollary we can let $n = 0, 1, 2, \ldots$, that is, the n-th characteristic function has exactly n zeros.

According to Lemma 2.1, $\Theta(x, \lambda)$ is an increasing function of λ for $0 < \lambda$. The value $\lambda = 0$ is singular, as we can see from (2.2), but we can expand $\Theta(x, \lambda)$ and $R(x, \lambda)$ in powers of $\lambda^{\frac{1}{2}}$ and $\Theta(x, \lambda)$ starts with a term in $\lambda^{\frac{1}{2}}$. This is in agreement with equation (2.4) which for $\lambda = 0$ has the unique solution

$$\Theta(x, 0) \equiv 0. \tag{3.1}$$

For small positive values of λ, $y_0(x, \lambda)$ is a monotone increasing function of x such that $y_0(x, \lambda) < x$ and $y_0'(x, \lambda)$ tends to a positive limit < 1 as $x \to \infty$. Since

$$y_0'(x, \lambda) = 1 - \lambda \int_0^x \frac{y_0(s, \lambda)}{b(s)}\, ds,$$

we see that

$$\lim_{x \to \infty} y_0'(x, \lambda) > 0$$

at least for

$$\lambda \leqq \left\{ \int_0^\infty \frac{s\, ds}{b(s)} \right\}^{-1} \tag{3.2}$$

For such values of λ we have $0 < \Theta(x, \lambda) < \frac{\pi}{2}$.

If λ keeps on increasing, we reach a value $\lambda = \lambda_0$ such that

$$\lim_{x \to \infty} y_0'(x, \lambda) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} \Theta(x, \lambda) = \frac{\pi}{2}.$$

This is the first characteristic value and it exceeds the right member of (3.2). The corresponding characteristic function is positive for $0 < x$. For $\lambda = \lambda_0 + \delta$, $y_0(x, \lambda)$ has a distant zero, $x_1(\lambda)$, as well as a positive maximum, both of which move to the left when λ increases. There cannot be more than one positive zero. This follows from

LEMMA 3.1. *Let $\xi(\lambda)$ be chosen so that*

$$\omega(\xi(\lambda)) = 4\lambda. \tag{3.3}$$

Then the equation (1.1) *is strictly non-oscillatory in the interval* $[\xi(\lambda), \infty)$.

For if $\xi(\lambda) < x$, then

$$\lambda x \int_x^\infty \frac{ds}{b(s)} = \lambda x \int_x^\infty \frac{ds}{(s+1)^2 \omega(s)} < \frac{\lambda x}{(x+1)\omega(x)} < \frac{1}{4}$$

and by [2], Corollary 1 on p. 246, the assertion holds.

This shows that $y_0(x, \lambda)$ can have at most one zero in $[\xi(\lambda), \infty)$. Thus if $y_0(x, \lambda_0 + \delta)$ is to have a second zero, it must be located in $(0, \xi(\lambda_0 + \delta))$. But $y_0(x, \lambda)$ is uniformly continuous with respect to (x, λ) for $0 \leqq x \leqq \xi(\lambda_0 + \delta)$, $\lambda_0 - \delta \leqq \lambda \leqq \lambda_0 + \delta$, so that for a preassigned $\varepsilon > 0$ we can find an η such that

$$y_0(x, \lambda_0 + \delta) > y_0(x, \lambda_0) - \varepsilon, \quad \eta > \delta, \quad \xi(\lambda_0 + \delta) \geqq x \geqq 0.$$

This excludes the existence of a second zero on the interval in question.

Thus, for sufficiently small values of δ, $y_0(x, \lambda_0 + \delta)$ has just one positive zero $x_1(\lambda_0 + \delta)$ and beyond this zero we have $\pi < \Theta(x, \lambda_0 + \delta) < \frac{3\pi}{2}$ by Lemma 2.2. As λ increases, we reach a stage where $x_1(\lambda) < \xi(\lambda)$ and a value of λ, $\lambda = \lambda_1$, such that

$$\lim_{x \to \infty} y_0'(x, \lambda_1) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} \Theta(x, \lambda_1) = \frac{3\pi}{2}.$$

This is the second characteristic value, $y_0(x, \lambda_1)$ has one positive zero $x_1(\lambda_1) < \xi(\lambda_1)$, and is negative beyond this value.

In this manner one shows the existence of a sequence of characteristic values λ_n such that

$$\lim_{x\to\infty} y_0'(x, \lambda_n) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} \Theta(x, \lambda_n) = (n + \tfrac{1}{2})\pi, \tag{3.4}$$

where $n = 0, 1, 2, \ldots$. The characteristic function $y_0(x, \lambda_n)$ has exactly n positive zeros and the last one of them satisfies

$$x_n(\lambda_n) < \xi(\lambda_n) = \omega^{-1}(4\lambda_n), \tag{3.5}$$

where $\omega^{-1}(\cdot)$ is the inverse of $\omega(\cdot)$.

We are now ready to prove Theorem 1. We go back to formula (2.7) which we rewrite as

$$\Theta(x, \lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}} J(x) + S(x, \lambda) \tag{3.6}$$

with obvious notation. Here we set

$$\lambda = \lambda_n, \qquad x = x_n(\lambda_n)$$

and obtain

$$n\pi = \lambda_n^{\frac{1}{2}} J\big(x_n(\lambda_n)\big) + S\big(x_n(\lambda_n), \lambda_n\big), \tag{3.7}$$

where obviously

$$J\big(x_n(\lambda_n)\big) = J[1 + o(1)], \qquad |S\big(x_n(\lambda_n), \lambda_n\big)| \leqq \tfrac{1}{4} \log b\big(x_n(\lambda_n)\big).$$

To prove (1.8) we have merely to show that

$$\log b\big(x_n(\lambda_n)\big) = o(\lambda_n^{\frac{1}{2}})$$

as $n \to \infty$. Since (3.5) holds, it is sufficient to show that

$$\log b\big(\xi(\lambda_n)\big) = o(\lambda_n^{\frac{1}{2}}), \tag{3.8}$$

and this is proved as follows. Since $\omega(x)$ is increasing,

$$\int_{\sqrt{x}}^{x} \frac{ds}{(s+1)\sqrt{\omega(s)}} > \frac{1}{\sqrt{\omega(x)}} \log \frac{x+1}{\sqrt{x}+1} > \frac{\log(x+1)}{3\sqrt{\omega(x)}} \qquad (x > 5) \tag{3.9}$$

and here the first member tends to zero as $x \to \infty$ because J is finite. In particular, for $x = \xi(\lambda_n)$ we see that

$$\lambda_n^{-\frac{1}{2}} \log[\xi(\lambda_n) + 1] \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{3.10}$$

But

$$\log b\big(\xi(\lambda_n)\big) = 2 \log[\xi(\lambda_n) + 1] + \log \omega\big(\xi(\lambda_n)\big),$$

where the last term equals $\log 4\lambda_n$. This proves (3.8) and hence also (1.8) and completes the proof of Theorem 1.

It is not difficult to elaborate the method so as to get an estimate of the remainder term in (1.8), but we shall not attempt to do so here.

4. The Fringe Case. We return to formula (3.7) where we now assume that $b(x)$ satisfies the conditions of Theorem 2. In this case $J(x_n(\lambda_n))$ becomes infinite with n and the problem of showing that the first term on the right still dominates the second is not as easy as in the case when J is finite. The case $p>1$ is slightly simpler than the case when $p=1$, but the latter is more interesting.

To simplify the formulas we write

$$x_n(\lambda_n) = x_n, \qquad \xi(\lambda_n) = \xi_n. \tag{4.1}$$

We start with

LEMMA 4.1. *If $\omega(x)$ is a feebly increasing function, then we can find a quantity ϱ_n which is greater than $\frac{1}{2}$ but tends to $\frac{1}{2}$ when n becomes infinite such that*

$$\omega(x_n) = \frac{\lambda_n}{\varrho_n^2}. \tag{4.2}$$

To prove this we choose a quantity $\varrho>\frac{1}{2}$, but as near to $\frac{1}{2}$ as we please. We then determine η_n such that

$$\omega(\eta_n) = \frac{\lambda_n}{\varrho^2}.$$

Here η_n is uniquely defined and $\eta_n<\xi_n$. For $0<x<\eta_n$ we have

$$\frac{\lambda_n}{b(x)} = \frac{\lambda_n}{(x+1)^2\omega(x)} > \frac{\lambda_n}{(x+1)^2\omega(\eta_n)} = \frac{\varrho^2}{(x+1)^2}. \tag{4.3}$$

The auxiliary differential equation

$$u'' + \frac{\varrho^2}{(x+1)^2}u = 0 \tag{4.4}$$

is oscillatory since $\varrho^2>\frac{1}{4}$. It has solutions of the form

$$(x+1)^{\frac{1}{2}}\sin\left[(\varrho^2-\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}}\log(x+1)+a\right],$$

where a is any constant. In particular, there is a solution which has a zero at $x=\eta_n$ and the preceding zero of this solution is at

$$\zeta_n \equiv (\eta_n+1)\exp\left[-\pi(\varrho^2-\tfrac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}\right]-1. \tag{4.5}$$

By a classical comparison theorem due to STURM, the inequality (4.3) implies that every solution of (1.1) has a zero in the interval (ζ_n, η_n). In particular, $y_0(x, \lambda_n)$ must have this property. Thus we have

$$\zeta_n \leqq x_n, \qquad \omega(\zeta_n) \leqq \omega(x_n). \tag{4.6}$$

We now use the fact that $\omega(x)$ is supposed to be feebly increasing. This property is defined by (1.14). We observe that there exists a fixed quantity C,

$$C > \exp\left[\pi(\varrho^2-\tfrac{1}{4})^{-1}\right],$$

such that for all large n we have

$$\zeta_n < \eta_n < C\zeta_n.$$

Hence, for a given $\varepsilon > 0$, there exists an $N(\varepsilon, C)$ such that

$$\omega(\zeta_n) < \omega(\eta_n) < (1+\varepsilon)\,\omega(\zeta_n), \qquad N(\varepsilon, C) < n.$$

By (4.3) we then have

$$\frac{\lambda_n}{\varrho^2(1+\varepsilon)} < \omega(\zeta_n) < \frac{\lambda_n}{\varrho^2}.$$

Hence, for such values of n

$$\frac{\lambda_n}{\varrho^2(1+\varepsilon)} < \omega(x_n) < \omega(\xi_n) = 4\lambda_n.$$

It follows that we can find a ϱ_n such that

$$\omega(x_n) = \frac{\lambda_n}{\varrho_n^2}, \quad \frac{1}{2} < \varrho_n < \varrho(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}.$$

Since ϱ is as close to $\frac{1}{2}$ as we please, we see that ϱ_n has the properties stated in the lemma.

We now return to formula (3.7) which we rewrite as

$$n\pi = \lambda_n^{\frac{1}{2}} J(x_n) + S(x_n, \lambda_n). \tag{4.7}$$

By condition (vi), more precisely by (1.10), we have

$$J(x_n) = \gamma_n \frac{L_p(x_n)}{[\omega(x_n)]^{\frac{1}{2}}}, \tag{4.8}$$

where

$$\beta_p - \varepsilon < \gamma_n < \mu_p + \varepsilon$$

for large values of n. By Lemma 4.1 (4.7) becomes

$$n\pi = \gamma_n \varrho_n L_p(x_n) + S(x_n, \lambda_n). \tag{4.9}$$

Since

$$|S(x_n, \lambda_n)| < \tfrac{1}{2}\log(x_n + 1) + \tfrac{1}{4}\log 4\lambda_n, \tag{4.10}$$

we see that when $p > 1$ the term $L_p(x_n)$ clearly dominates $S(x_n, \lambda_n)$. Thus in this case we get

$$L_p(x_n) = \frac{\pi}{\gamma_n \varrho_n}(1+\delta_n)\, n \equiv \sigma_n n,$$

where $\delta_n \to 0$ as $n \to \infty$. Hence

$$x_n = L_p^{-1}(\sigma_n n), \qquad \omega(x_n) = \omega[L_p^{-1}(\sigma_n n)]$$

and by Lemma 4.1 finally

$$\lambda_n = \varrho_n^2\, \omega[L_p^{-1}(\sigma_n n)]$$

as asserted. Since $\varrho_n \to \frac{1}{2}$, we conclude that the limits of indetermination of σ_n satisfy (1.13).

For $p=1$ the situation is slightly more delicate for now the two terms in the right member of (4.9) may be very nearly equal. Since $L_1(x)=\log x$ we have

$$n\pi = \gamma_n \varrho_n \log x_n + S(x_n, \lambda_n).$$

In view of (4.10) we have

$$\log x_n = \sigma_n n,$$

where for large n

$$\pi(\gamma_n \varrho_n + \tfrac{1}{2} + \varepsilon)^{-1} < \sigma_n < \pi(\gamma_n \varrho_n - \tfrac{1}{2} - \varepsilon)^{-1}.$$

The limits of indetermination for σ_n then satisfy (1.12) instead. Since $\beta_1 > 1$ by assumption, σ_n is bounded away from 0 and ∞. The rest of the argument proceeds as above. Since

$$L_1^{-1}(u) = e^u,$$

the final result takes the simpler form

$$\lambda_n = \varrho_n^2 \omega(e^{\sigma_n n}). \tag{4.11}$$

This completes the proof of Theorem 2.

As an illustration of the results we take the following three examples in which $\omega(x)$ has the values

(I) $[\log(x+e)]^2$,

(II) $[\log(x+e)]^\alpha$, $1<\alpha<2$,

(III) $\log(x+e)\,[\log_2(x+e^e)]^2$

respectively. The results are listed in the table below. Here τ is the exponent of convergence of the series $\sum \lambda_n^{-\sigma}$.

Table

Property	I	II	III
p	2	1	1
$\beta_p = \mu_p$	1	$\frac{2}{\alpha}$	2
λ_n	$\left(\varrho_n \sigma_n \frac{n}{\log n}\right)^2$	$\varrho_n^2 \sigma_n^\alpha n^\alpha$	$\varrho_n^2 \sigma_n n (\log \sigma_n n)^2$
$\liminf \sigma_n$	2π	$\geqq \frac{2\alpha\pi}{2+\alpha}$	$\geqq \frac{2}{3}\pi$
$\limsup \sigma_n$	2π	$\leqq \frac{2\alpha\pi}{2-\alpha}$	$\leqq 2\pi$
τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\alpha}$	1

These results should be compared with these of [4], pp. 235 and 248. They show that the results previously obtained are of the right order of magnitude with respect to n and confirm various conjectures made by the author.

References

[1] HARTMAN, P.: On the zeros of solutions of second order linear differential equations. J. London Math. Soc. **27**, 492–496 (1952). — [2] HILLE, E.: Non-oscillation theorems. Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 234–252 (1948). — [3] HILLE, E.: The abstract Cauchy problem and Cauchy's problem for parabolic differential equations. J. d'Analyse Mathématique **3**, 81–196 (1953/54). — [4] HILLE, E.: On a class of orthonormal functions. Rendiconti Seminario Mat. Univ. Padova **25**, 214–249 (1956). — [5] KAMKE, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. Leipzig 1930. — [6] MOORE, R. A.: The behavior of linear differential equations of the second order. Pacific J. Math. **5**, 125–145 (1955). — [7] PRÜFER, H.: Neue Herleitung der Sturm-Liouvilleschen Reihenentwicklung stetiger Funktionen. Math. Annalen **95**, 499–518 (1926).

Dept. of Math., Yale University, New Haven, Conn. (U.S.A.)

(Eingegangen am 16. Februar 1959)

HEINZ, E.
Math. Zeitschr. 72, 107–126 (1959)

Über die Differentialungleichung $0<\alpha\leqq rt-s^2\leqq\beta<\infty$

LEON LICHTENSTEIN zum Gedächtnis

Von

ERHARD HEINZ [1])

Problemstellung

Es sei $z=z(x, y)$ eine in einer offenen Punktmenge Ω der xy-Ebene reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktion, die der Differentialungleichung

$$(1)\qquad \begin{cases} rt-s^2>0 \\ (p=z_x,\ q=z_y;\ r=z_{xx},\ s=z_{xy},\ t=z_{yy}) \end{cases}$$

genügt. Außerdem sei

$$(2)\qquad |z(x, y)|\leqq\delta<\infty$$

für $(x, y)\in\Omega$, und Ω_d bezeichne die Teilmenge aller Punkte von Ω, deren Abstand vom Rande von Ω eine positive Zahl d überschreitet. Bekanntlich gilt dann für $(x, y)\in\Omega_d$ die Ungleichung

$$(3)\qquad \sqrt{p^2+q^2}\leqq\frac{2\delta}{d}\ ^2).$$

Außerdem ist die Abbildung $(x, y)\to(p, q)$ eineindeutig, falls Ω als konvex vorausgesetzt wird.

Wenn man (1) durch die Differentialungleichung

$$(4)\qquad 0<\alpha\leqq rt-s^2\leqq\beta<\infty$$

ersetzt, so kann man über das Verhalten der ersten Ableitungen schärfere Aussagen machen, die über die triviale Abschätzung (3) hinausgehen. Das erste Resultat in dieser Richtung rührt von A. D. ALEXANDROW [*1*]^3) her, der u. a. zeigte: *Wenn die verallgemeinerte Gaußsche Krümmung einer konvexen Fläche zwischen zwei positiven Zahlen liegt, dann ist die Fläche glatt und enthält keine geradlinigen Strecken.* Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, aus den Ungleichungen (2) und (4) quantitative Abschätzungen für den Gradienten (p, q) der Fläche $z=z(x, y)$ zu gewinnen, die dem Alexandrowschen Theorem entsprechen. Die diesbezüglichen Resultate lassen sich folgendermaßen aussprechen:

[1]) Diese Arbeit wurde teilweise von einem Kontrakt des Office of Naval Research in Stanford University unterstützt.

[2]) Vgl. z. B. Hilfssatz 11 dieser Arbeit.

[3]) Vgl. dazu POGORELOW [*10*], Kap. II, § 1.

SATZ 1. *Es sei $z=z(x, y)$ eine in einer offenen Punktmenge Ω der xy-Ebene reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktion, die den Ungleichungen* (2) *und* (4) *genügt. Ferner sei Ω_d die Teilmenge aller Punkte in Ω, deren Abstand vom Rande von Ω größer als eine positive Zahl d ist. Dann gilt für irgend zwei Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) von Ω_d die Abschätzung*

$$(5)\quad \begin{cases} \sqrt{(p(x_1, y_1) - p(x_0, y_0))^2 + (q(x_1, y_1) - q(x_0, y_0))^2} \\ \qquad \leqq \Gamma_1(\alpha, \beta, \delta, d)\left(\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\right)^{\mu}. \end{cases}$$

Dabei ist $\mu = \sqrt{\alpha/\beta}$, und $\Gamma_1(\alpha, \beta, \delta, d)$ ist eine stetige positive Funktion für $0<\alpha\leqq\beta$ und alle positiven Werte von δ und d.

SATZ 2. *Es sei $z=z(x, y)$ eine in einer offenen konvexen Punktmenge Ω der xy-Ebene reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktion, die den Ungleichungen* (2) *und* (4) *genügt. Ferner sei (x_0, y_0) ein Punkt in Ω, dessen Abstand vom Rande von Ω größer als eine positive Zahl d ist.*

Dann besteht für jeden Punkt $(x, y)\in\Omega$ mit $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2>0$ die Ungleichung

$$(6)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{(x - x_0)(p - p_0) + (y - y_0)(q - q_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}\right| \geqq \Gamma_2(\alpha, \beta, \delta, d)\left(\Lambda_d\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)\right)^{\nu} \\ \qquad (p_0 = p(x_0, y_0),\ q_0 = q(x_0, y_0);\ \nu = \sqrt{\beta/\alpha}). \end{cases}$$

Dabei ist $\Gamma_2(\alpha, \beta, \delta, d)$ eine stetige positive Funktion für $0<\alpha\leqq\beta$ und alle positiven Werte von δ und d, und die Funktion $\Lambda_d(\varrho)$ ist durch die Gleichungen

$$(7)\quad \Lambda_d(\varrho) = \begin{cases} \varrho, & 0 \leqq \varrho \leqq \dfrac{d}{2} \\ \dfrac{d}{2}, & \dfrac{d}{2} \leqq \varrho < \infty \end{cases}$$

erklärt.

Aus (6) ergibt sich unmittelbar die folgende Ungleichung

$$(8)\quad \sqrt{(p - p_0) + (q - q_0)^2} \geqq \Gamma_2(\alpha, \beta, \delta, d)\left(\Lambda_d\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)\right)^{\nu}$$

für irgend zwei Punkte (x_0, y_0) und (x, y) in Ω_d, falls man Ω als konvex voraussetzt.

Satz 1 und Satz 2 können als Aussagen über die Lösungen der elliptischen Monge-Ampèreschen Differentialgleichung

$$(9)\quad r t - s^2 = E(x, y)$$

aufgefaßt werden, wobei die Funktion $E(x, y)$ durch die Ungleichung

$$(10)\quad 0 < \alpha \leqq E(x, y) \leqq \beta < \infty$$

eingeschränkt ist. Wie in [5] und [7] werden wir zum Beweis von Satz 1 und Satz 2 die zu (9) gehörigen charakteristischen Parameter (u, v) heranziehen. Diese sind in unserem Falle durch die Gleichung

$$(11)\quad r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = \lambda(du^2 + dv^2),\quad (\lambda \neq 0)$$

definiert und können auf Grund des Uniformisierungstheorems im Großen eingeführt werden. Es ist wohlbekannt, daß (9) einem elliptischen System von Differentialgleichungen erster Ordnung für x, y, p und q äquivalent ist, falls man diese Größen als Funktionen von u und v betrachtet. Die Hauptschwierigkeit beim Beweis der Ungleichungen (5) und (6) liegt in der Rückkehr von den Hilfsvariablen (u, v) zu den ursprünglichen Veränderlichen (x, y).

Um diesen Schritt auszuführen, werden wir zunächst in § 1 dieser Arbeit die erforderlichen Hilfssätze über quasikonforme Abbildungen und Abbildungen mit endlichem Dirichlet-Integral herleiten. Abgesehen von den wohlbekannten Hilfssätzen 1 und 2 werden die Beweise alle gegeben. In § 2 werden die Variablen x, y, p und q als Funktionen der charakteristischen Parameter (u, v) betrachtet. Insbesondere wird der Monge-Ampèreschen Gl. (9) eine einparametrige Schar eineindeutiger quasikonformer Abbildungen zugeordnet, deren maximale Dilatation durch die Größen α und β abgeschätzt werden kann. Anwendung dieser Resultate ergibt dann den Beweis von Satz 1 und Satz 2 im letzten Abschnitt dieser Arbeit.

§ 1. Hilfssätze über quasikonforme Abbildungen und Abbildungen mit endlichem Dirichlet-Integral

Es sei $\zeta=\zeta(w)$ $(w=u+iv;\ \zeta=\xi+i\eta)$ eine eineindeutige, stetig differenzierbare Abbildung eines Gebietes D auf ein Gebiet D^*. Im folgenden setzen wir stets voraus, daß die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}$ in D nicht verschwindet. Mit den üblichen Bezeichnungen

$$\frac{\partial}{\partial w}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}-i\frac{\partial}{\partial v}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{w}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}+i\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

gilt dann $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}=|\zeta_w|^2-|\zeta_{\bar{w}}|^2\neq 0$. Daher ist der Quotient $\frac{|\zeta_w|+|\zeta_{\bar{w}}|}{||\zeta_w|-|\zeta_{\bar{w}}||}$ wohldefiniert und wird als *Dilatation* der Abbildung $w\to\zeta$ im Punkte w bezeichnet. Eine Abbildung von D auf D^* ist *quasikonform*, wenn ihre Dilatation in D gleichmäßig beschränkt ist. Offenbar ist die Dilatation gegenüber konformen Transformationen der Variablen w und ζ invariant, und die zueinander inversen Abbildungen $w\to\zeta$ und $\zeta\to w$ haben in entsprechenden Punkten die gleiche Dilatation. Für unsere Zwecke genügt es, den Fall zu betrachten, wo die Funktionaldeterminante $|\zeta_w|^2-|\zeta_{\bar{w}}|^2$ immer positiv ist. Der folgende Hilfssatz, der im wesentlichen von C. B. Morrey [9][4]) herrührt, ist für unsere späteren Betrachtungen grundlegend:

Hilfssatz 1. *Die Funktion $\zeta=\zeta(w)$ bilde die Kreisscheibe $|w|<1$ eineindeutig und stetig auf die Kreisscheibe $|\zeta|<1$ ab mit $\zeta(0)=0$. Ferner sei $\zeta(w)$ einmal stetig differenzierbar und genüge den Differentialungleichungen*

$$|\zeta_w|-|\zeta_{\bar{w}}|>0 \tag{1.1}$$

[4]) Weitere Beweise und Literaturangaben bei Ahlfors [1], Finn-Serrin [4] und Mori [8]. Mori zeigte, daß $c(K)=16$ die bestmögliche Konstante ist, mit der die Ungleichung (1.3) gilt.

und

$$\frac{|\zeta_w| + |\zeta_{\bar{w}}|}{|\zeta_w| - |\zeta_{\bar{w}}|} \leqq K, \tag{1.2}$$

wobei K eine feste positive Zahl bedeutet. Dann ist die Funktion $\zeta(w)$ für $|w| \leqq 1$ stetig, und es gilt für $|w_1| \leqq 1$ und $|w_2| \leqq 1$ eine Abschätzung der Form

$$|\zeta(w_2) - \zeta(w_1)| \leqq c(K)\,|w_2 - w_1|^{1/K}. \tag{1.3}$$

Dabei ist $c(K)$ eine von der Abbildung $w \to \zeta(w)$ unabhängige, stetige Funktion von K, die für $1 \leqq K < \infty$ der Ungleichung $c(K) \geqq 1$ genügt.

Wenn wir (1.1) und (1.2) durch eine Ungleichung der Form

$$\iint\limits_{|w|<1} (|\zeta_u|^2 + |\zeta_v|^2)\,du\,dv \leqq N < \infty \tag{1.4}$$

ersetzen, so erhalten wir eine allgemeinere Klasse von Abbildungen, für die der folgende Hilfssatz[5]) gilt:

HILFSSATZ 2. *Es sei $\zeta = \zeta(w)$ eine eineindeutige, stetige Abbildung der Kreisscheibe $|w| < 1$ auf die Kreisscheibe $|\zeta| < 1$ mit $\zeta(0) = 0$. Außerdem sei die Funktion $\zeta(w)$ für $|w| < 1$ einmal stetig differenzierbar, und es gelte die Ungleichung* (1.4).

Dann ist $\zeta(w)$ für $|w| \leqq 1$ stetig, und es besteht für zwei Punkte w_1 und w_2 der Kreisscheibe $|w| \leqq 1$ mit $0 < |w_2 - w_1| < 1$ die Abschätzung

$$|\zeta(w_2) - \zeta(w_1)| \leqq 4 \sqrt{\frac{\pi N}{-\log|w_2 - w_1|}}. \tag{1.5}$$

Wir betrachten nun eineindeutige quasikonforme Abbildungen der Kreisscheibe $|w| < 1$ auf ein Bildgebiet D^*, welches in der Kreisscheibe $|\zeta| < 1$ enthalten ist. Zu diesem Zweck benötigen wir die beiden wohlbekannten Hilfssätze über analytische Funktionen[6]).

HILFSSATZ 3. *Es sei $\varphi(\zeta)$ eine für $|\zeta| < 1$ regulär-analytische Funktion mit $\varphi(\zeta) \neq 0$ und $|\varphi(\zeta)| \leqq 1$. Dann gilt für $|\zeta_1| < 1$ und $|\zeta| < 1$ die Ungleichung*

$$|\varphi(\zeta)| \leqq |\varphi(\zeta_1)|^{\frac{(1-|\zeta_1|)(1-|\zeta|)}{(1+|\zeta_1|)(1+|\zeta|)}} \tag{1.6}$$

BEWEIS. Nach Voraussetzung ist die Funktion $\psi(\zeta) = -\log|\varphi(\zeta)|$ für $|\zeta| < 1$ harmonisch und nicht-negativ. Durch Anwendung der Harnackschen Ungleichung folgt daher

$$\frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|}\,\psi(0) \leqq \psi(\zeta) \leqq \frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}\,\psi(0), \qquad (|\zeta| < 1), \tag{1.7}$$

[5]) Vgl. z.B. [6], S. 252–253. Dort wird die zusätzliche Voraussetzung gemacht, daß $\zeta(w)$ für $|w| \leqq 1$ stetig ist und $|w_2 - w_1| < \frac{1}{4}$ gilt. Der loc. cit. gegebene Beweis macht jedoch keinen Gebrauch von der Stetigkeit der Funktion $\zeta(w)$ bei $|w| = 1$; ferner ist wegen

$$N \geqq \iint\limits_{|w|<1} (|\zeta_u|^2 + |\zeta_v|^2)\,du\,dv \geqq 2 \iint\limits_{|w|<1} \left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \geqq 2\pi$$

die Abschätzung (1.5) trivial für $\frac{1}{4} \leqq |w_2 - w_1| < 1$.

[6]) Vgl. PÓLYA-SZEGÖ [11], S. 140. Der Vollständigkeit halber führen wir die Beweise noch einmal an.

oder, was damit äquivalent ist,

$$|\varphi(0)|^{\frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}}\leqq|\varphi(\zeta)|\leqq|\varphi(0)|^{\frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|}}\qquad(|\zeta|<1). \tag{1.8}$$

Dies ergibt

$$|\varphi(0)|\leqq|\varphi(\zeta_1)|^{\frac{1-|\zeta_1|}{1+|\zeta_1|}}. \tag{1.9}$$

Wenn wir dies in die rechte Seite von (1.8) einsetzen, so entsteht (1.6), womit die Behauptung bewiesen ist.

HILFSSATZ 4. *Es sei $\Phi(\zeta)$ eine für $|\zeta|<1$ regulär-analytische, schlichte Funktion mit $\Phi(0)=0$ und $|\Phi(\zeta)|<1$. Dann gilt für $0<|\zeta_1|<1$ und $|\zeta|<1$ die Abschätzung*

$$|\Phi(\zeta)|\leqq|\zeta|\left|\frac{\Phi(\zeta_1)}{\zeta_1}\right|^{\frac{(1-|\zeta_1|)(1-|\zeta|)}{(1+|\zeta_1|)(1+|\zeta|)}} \tag{1.10}$$

BEWEIS. Nach Voraussetzung ist die Funktion

$$\varphi(\zeta)=\begin{cases}\dfrac{\Phi(\zeta)}{\zeta}, & \zeta\neq 0\\ \Phi'(0), & \zeta=0\end{cases} \tag{1.11}$$

in $|\zeta|<1$ regulär-analytisch, und es gilt $\varphi(\zeta)\neq 0$. Ferner hat man auf Grund des Schwarzschen Lemmas die Abschätzung $|\varphi(\zeta)|<1$ für $|\zeta|<1$. Daraus ergibt sich durch Anwendung von Hilfssatz 4 die Ungleichung (1.10), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

HILFSSATZ 5. *Es sei $f(w)$ eine für $|w|<1$ einmal stetig differenzierbare, schlichte Funktion mit $f(0)=0$ und $|f(w)|<1$. Außerdem genüge $f(w)$ den Differentialungleichungen*

$$|f_w|-|f_{\bar w}|>0 \tag{1.12}$$

und

$$\frac{|f_w|+|f_{\bar w}|}{|f_w|-|f_{\bar w}|}\leqq K \tag{1.13}$$

mit einer festen positiven Konstanten K. Dann gelten die Abschätzungen

$$|f(w)|\leqq c(K)\,|w|^{1/K},\qquad(|w|<1) \tag{1.14}$$

und

$$|f(w)|\leqq c(K)^{1-K}\left(\frac{|f(w_1)|}{|w_1|^K}\right)^{\frac{1}{1-c(K)^{-2K}(1-|w_1|)^K(1-|w|)^K}}\qquad(|w|<1;\ 0<|w_1|<1), \tag{1.15}$$

wobei $c(K)$ in Hilfssatz 1 erklärt ist.

BEWEIS. Es sei D^* das Bildgebiet der Kreisscheibe $|w|<1$ bei der Abbildung $w\to f(w)$. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es eine eindeutig bestimmte regulär-analytische Funktion $\Phi(\zeta)$ mit $\Phi(0)=0$ und $\Phi'(0)>0$, die die Kreisscheibe $|\zeta|<1$ konform auf D^* abbildet. Es sei nun Φ^{-1} die zu Φ inverse Funktion. Dann erfüllt offenbar die Funktion $\zeta(w)=\Phi^{-1}(f(w))$ alle Voraussetzungen von Hilfssatz 1, und es gilt die Darstellung

$$f(w)=\Phi(\zeta(w)),\qquad(|w|<1). \tag{1.16}$$

Indem wir zuerst das Schwarzsche Lemma auf die Funktion $\Phi(\zeta)$ und dann Hilfssatz 1 auf die quasikonforme Abbildung $\zeta=\zeta(w)$ anwenden, erhalten wir

die Ungleichung

$$|f(w)| \leqq |\zeta(w)| \leqq c(K)\,|w|^{1/K}. \tag{1.17}$$

Damit ist (1.14) bewiesen.

Um (1.15) zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß auf Grund von (1.16) und Hilfssatz 4 für $|w|<1$ und $0<|w_1|<1$ die Ungleichung

$$|f(w)| \leqq |\zeta(w)| \cdot \left|\frac{f(w_1)}{\zeta(w_1)}\right|^{\frac{(1-|\zeta(w_1)|)\,(1-|\zeta(w)|)}{(1+|\zeta(w_1)|)\,(1+|\zeta(w)|)}} \tag{1.18}$$

besteht. Wir schätzen nun die rechte Seite von (1.18) nach oben ab, indem wir Hilfssatz 1 auf die zu $\zeta(w)$ inverse Funktion $w(\zeta)$ anwenden. Zunächst gilt

$$|w(\zeta_2) - w(\zeta_1)| \leqq c(K)\,|\zeta_2 - \zeta_1|^{1/K} \tag{1.19}$$

für $|\zeta_1| \leqq 1$ und $|\zeta_2| \leqq 1$, oder, was damit äquivalent ist,

$$|\zeta(w_2) - \zeta(w_1)| \geqq c(K)^{-K}\,|w_2 - w_1|^K \tag{1.20}$$

für $|w_1| \leqq 1$ und $|w_2| \leqq 1$. Setzen wir hierin $w_1 = 0$, so folgt

$$|\zeta(w)| \geqq c(K)^{-K}\,|w|^K \quad \text{für} \quad |w| \leqq 1. \tag{1.21}$$

Es sei nun $w_1 \neq 0$. Dann gibt es offenbar eine komplexe Zahl w_2 mit $|w_2| = 1$ und $\zeta(w_2) = \dfrac{\zeta(w_1)}{|\zeta(w_1)|}$. Durch Anwendung von (1.20) folgt

$$1 - |\zeta(w_1)| = |\zeta(w_2) - \zeta(w_1)| \geqq c(K)^{-K}\,|w_2 - w_1|^K \geqq c(K)^{-K}\,(1 - |w_1|)^K \tag{1.22}$$

und entsprechend

$$1 - |\zeta(w)| \geqq c(K)^{-K}\,(1 - |w|)^K \quad \text{für} \quad |w| \leqq 1. \tag{1.23}$$

Wenden wir nun sukzessiv die Ungleichungen (1.22), (1.23) und (1.21) an und berücksichtigen (1.17), so gewinnen wir aus (1.18) für $|w|<1$ und $0<|w_1|<1$ die folgende Abschätzung:

$$\left\{\begin{aligned} |f(w)| &\leqq \left|\frac{f(w_1)}{\zeta(w_1)}\right|^{\frac{1}{2}c(K)^{-2K}(1-|w_1|)^K(1-|w|)^K} \\ &\leqq \left(c(K)^K \cdot \frac{|f(w_1)|}{|w_1|^K}\right)^{\frac{1}{2}c(K)^{-2K}(1-|w_1|)^K(1-|w|)^K} \\ &\leqq c(K)^{\frac{1}{2}K} \cdot \left(\frac{|f(w_1)|}{|w_1|^K}\right)^{\frac{1}{2}c(K)^{-2K}(1-|w_1|)^K(1-|w|)^K}, \end{aligned}\right. \tag{1.24}$$

die mit (1.15) identisch ist. Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

§ 2. Charakteristische Parameter

In diesem Paragraphen betrachten wir die Variablen $x, y, p = z_x$ und $q = z_y$ als Funktionen der zur Differentialgleichung $rt - s^2 = E(x, y)$ gehörigen charakteristischen Parameter (u, v), wobei wir voraussetzen, daß die Funktionen $E(x, y)$ der Ungleichung $0 < \alpha \leqq E(x, y) \leqq \beta < \infty$ genügt. Im Gegensatz zu [5] und [7] sind alle hierbei auftretenden Differentialgleichungen von erster Ordnung[7]). Insbesondere werden wir der Monge-Ampèreschen Gleichung $rt - s^2 = E(x, y)$ eine einparametrige Schar schlichter quasikonformer

[7]) Für den hyperbolischen Fall vgl. COURANT-HILBERT [3], Kap. V.

Abbildungen zuordnen, auf die die Resultate von § 1 anwendbar sind. Dies geschieht in den nächsten zwei Hilfssätzen.

HILFSSATZ 6. *Es sei $z=z(x,y)$ eine in der Kreisscheibe $\Delta=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqq R^2\}$ reelle, analytische Funktion (d. h. $z(x,y)$ ist eine reguläre Potenzreihe in x,y mit reellen Koeffizienten in der Umgebung eines jeden Punktes in Δ). Außerdem sei*

$$\begin{cases} rt-s^2=E(x,y)>0 \\ (p=z_x,\ q=z_y;\ r=z_{xx},\ s=z_{xy},\ t=z_{yy}) \end{cases} \tag{2.1}$$

für $(x,y)\in\Delta$. Dann gibt es zwei reelle Funktionen $x(u,v)$ und $y(u,v)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) *$x=x(u,v)$ und $y=y(u,v)$ bilden die Einheitskreisscheibe $|w|\leqq 1$ $(w=u+iv)$ eineindeutig und stetig auf Δ ab mit $x(0,0)=x_0$ und $y(0,0)=y_0$.*

(ii) *Die Funktionen $x(u,v)$, $y(u,v)$; $p=p\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ und $q=q\big(x(u,v),y(u,v)\big)$ sind für $|w|<1$ einmal stetig differenzierbar*[8]) *und genügen den Differentialgleichungen*

$$x_u=\frac{q_v}{\sqrt{E}},\qquad x_v=-\frac{q_u}{\sqrt{E}}; \tag{2.2}$$

und

$$y_u=-\frac{p_v}{\sqrt{E}},\quad y_v=\frac{p_u}{\sqrt{E}}. \tag{2.3}$$

(iii) *Für $|w|<1$ besteht die Ungleichung*

$$x_u y_v-x_v y_u\neq 0, \tag{2.4}$$

und es gelten die Beziehungen

$$\frac{r}{\sqrt{E}}=\frac{y_u^2+y_v^2}{x_u y_v-x_v y_u},\quad \frac{s}{\sqrt{E}}=-\frac{x_u y_u+x_v y_v}{x_u y_v-x_v y_u},\quad \frac{t}{\sqrt{E}}=\frac{x_u^2+x_v^2}{x_u y_v-x_v y_u}. \tag{2.5}$$

BEWEIS. Da nach Voraussetzung die zur Gl. (2.1) gehörige charakteristische Differentialform

$$X=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2 \tag{2.6}$$

positiv- oder negativ-definit ist und analytische Koeffizienten besitzt, so ergibt sich aus dem Satz von CAUCHY-KOWALEWSKI und dem Uniformisierungstheorem[9]) die Existenz zweier reeller Funktionen $u=u(x,y)$ und $v=v(x,y)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i′) $u=u(x,y)$ und $v=v(x,y)$ bilden Δ eineindeutig und stetig auf die Kreisscheibe $|w|\leqq 1$ ab mit $u(x_0,y_0)=v(x_0,y_0)=0$.

(ii′) Die Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ sind für $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2$ analytisch und genügen dem zur Metrik X gehörigen Beltramischen System

$$\begin{cases} u_x=\dfrac{-s\,v_x+r\,v_y}{\sqrt{rt-s^2}} \\ u_y=\dfrac{-t\,v_x+s\,v_y}{\sqrt{rt-s^2}} \end{cases} \tag{2.7}$$

[8]) Sie sind sogar analytisch für $|w|\leqq 1$.

[9]) Siehe z. B. [7].

(iii') Für $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2$ gilt $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$.

(2.7) kann offenbar auch in der Form

$$(2.8)\qquad \begin{cases} v_x = \dfrac{s\,u_x - r\,u_y}{\sqrt{rt-s^2}} \\ v_y = \dfrac{t\,u_x - s\,u_y}{\sqrt{rt-s^2}} \end{cases}$$

geschrieben werden. Wegen (i') und (iii') sind die inversen Funktionen $x(u,v)$ und $y(u,v)$ für $|w|<1$ analytisch, und es gilt (2.4). Ferner ist

$$(2.9)\qquad u_x=\delta\,y_v,\quad u_y=-\delta\,x_v;\quad v_x=-\delta\,y_u,\quad v_y=\delta\,x_u$$

mit $\delta=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$. Setzen wir diese Ausdrücke in (2.7) und (2.8) ein und berücksichtigen (2.1) ,so erhalten wir

$$(2.10)\qquad \begin{cases} y_v = \dfrac{s\,y_u + r\,x_u}{\sqrt{rt-s^2}} = \dfrac{p_u}{\sqrt{E}} \\ -x_v = \dfrac{t\,y_u + s\,x_u}{\sqrt{rt-s^2}} = \dfrac{q_u}{\sqrt{E}} \end{cases}$$

und

$$(2.11)\qquad \begin{cases} -y_u = \dfrac{s\,y_v + r\,x_v}{\sqrt{rt-s^2}} = \dfrac{p_v}{\sqrt{E}} \\ x_u = \dfrac{t\,y_v + s\,x_v}{\sqrt{rt-s^2}} = \dfrac{q_v}{\sqrt{E}} \end{cases}$$

was mit (2.2) und (2.3) identisch ist. Durch Elimination der Größen r, s, t aus den Gleichungssystemen (2.10) und (2.11) ergeben sich schließlich die Darstellungen (2.5), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

HILFSSATZ 7. *Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 6 erfüllt. Außerdem gelten für $(x,y)\in\Delta$ die Ungleichungen*

$$(2.12)\qquad 0<\alpha\leqq E(x,y)\leqq\beta<\infty$$

und

$$(2.13)\qquad (p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}\leqq\gamma<\infty,$$

und Θ sei ein reeller Parameter. Dann ist die Funktion[10])

$$(2.14)\qquad \begin{cases} f(w;\Theta) = \dfrac{\sqrt{\alpha\beta}\,((x-x_0)\cos\Theta+(y-y_0)\sin\Theta)+i\,((q-q_0)\cos\Theta-(p-p_0)\sin\Theta)}{\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}} \\ (p_0=p(x_0,y_0),\ q_0=q(x_0,y_0)) \end{cases}$$

in der Kreisscheibe $|w|<1$ schlicht, und es ist

$$(2.15)\qquad f(0;\Theta)=0,$$

und

$$(2.16)\qquad |f(w;\Theta)|\leqq 1.$$

[10]) Hierbei bedeuten $x=x(u,v)$ und $y=y(u,v)$ die in Hilfssatz 6 erklärten Abbildungsfunktionen, und die Größen p und q sind als Funktionen der Variablen (u,v) durch die Gleichungen $p=p(x(u,v),y(u,v))$ und $q=q(x(u,v),y(u,v))$ definiert.

Außerdem ist $f(w;\Theta)$ für $|w|<1$ einmal stetig differenzierbar und genügt den Differentialungleichungen

$$|f_w|-|f_{\bar w}|>0, \tag{2.17}$$

und

$$\frac{|f_w|+|f_{\bar w}|}{|f_w|-|f_{\bar w}|}\leqq\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}}. \tag{2.18}$$

Beweis. Die Gl. (2.15) ist auf Grund der Definition von $f(w;\Theta)$ evident. Ferner gelten für $|w|<1$ die Abschätzungen

$$\left\{\begin{aligned} |f(w;\Theta)| &= \frac{\sqrt{\sqrt{\alpha\beta}((x-x_0)\cos\Theta+(y-y_0)\sin\Theta)^2+((q-q_0)\cos\Theta-(p-p_0)\sin\Theta)^2}}{\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}}\\ &\leqq \frac{\sqrt{\sqrt{\alpha\beta}((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)+((p-p_0)^2+(q-q_0)^2)}}{\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}}\\ &\leqq \frac{\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2(p_0^2+q_0^2+p^2+q^2)}}{\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}}\leqq 1. \end{aligned}\right. \tag{2.19}$$

Um (2.17) und (2.18) zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß wegen (2.2) und (2.3) für jeden reellen Wert von Θ die Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} (x\cos\Theta+y\sin\Theta)_u &= \frac{(q\cos\Theta-p\sin\Theta)_v}{\sqrt{E(x,y)}}\\ (x\cos\Theta+y\sin\Theta)_v &= -\frac{(q\cos\Theta-p\sin\Theta)_u}{\sqrt{E(x,y)}} \end{aligned}\right. \tag{2.20}$$

erfüllt sind. Daraus ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\sqrt[4]{\alpha\beta}\,((x-x_0)\cos\Theta+(y-y_0)\sin\Theta)_{\bar w}+i\,((q-q_0)\cos\Theta-\\ &-(p-p_0)\sin\Theta)_{\bar w}=0 \end{aligned}\right. \tag{2.21}$$

mit $p_0=p(x_0,y_0)$ und $q_0=q(x_0,y_0)$. Also genügt die Funktion $f(w;\Theta)$ der Differentialgleichung

$$f_{\bar w}=\frac{1-\frac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}}{1+\frac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}}\bar f_{\bar w}. \tag{2.22}$$

Aus (2.22) folgt

$$|f_{\bar w}|=\frac{\left|1-\frac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right|}{1+\frac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt{\alpha\beta}}}|f_w|, \tag{2.23}$$

sowie

$$|f_w|-|f_{\bar w}|=\frac{\left(1+\frac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right)-\left|1-\frac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right|}{1+\frac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}}|f_w|\geqq 0. \tag{2.24}$$

Angenommen, es sei $|f_w|-|f_{\bar{w}}|=0$. Dann gilt wegen (2.24) die Gleichung $f_w=f_{\bar{w}}=0$ oder $f_u=f_v=0$. Hieraus folgt

$$\left\{\begin{aligned} &x_u\cos\Theta+y_u\sin\Theta=0\\ &x_v\cos\Theta+y_v\sin\Theta=0,\end{aligned}\right. \tag{2.25}$$

was wegen $x_u y_v-x_v y_u\neq 0$ ($|w|<1$) unmöglich ist. Wir wollen nun die maximale Dilatation der Abbildung $w\to f(w;\Theta)$ abschätzen. Wegen (2.23) gilt für $|w|<1$ die Ungleichung

$$\left\{\begin{aligned} \frac{|f_w|+|f_{\bar{w}}|}{|f_w|-|f_{\bar{w}}|}&=\frac{\left(1+\frac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right)+\left|1-\frac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right|}{\left(1+\frac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right)-\left|1-\frac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right|}\\ &\leqq\max\left(\frac{\sqrt{E(x,y)}}{\sqrt[4]{\alpha\beta}},\frac{\sqrt[4]{\alpha\beta}}{\sqrt{E(x,y)}}\right).\end{aligned}\right. \tag{2.26}$$

Unter Berücksichtigung von (2.12) erhalten wir hieraus die Abschätzung

$$\frac{|f_w|+|f_{\bar{w}}|}{|f_w|-|f_{\bar{w}}|}\leqq\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}}\,. \tag{2.27}$$

Der Beweis des Hilfssatzes ist erbracht, wenn wir zeigen, daß die Abbildung $w\to f(w;\Theta)$ für jeden reellen Wert von Θ eineindeutig ist. Zu diesem Zweck führen wir die Hilfsveränderlichen ξ, η durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \xi&=(x(u,v)-x_0)\cos\Theta+(y(u,v)-y_0)\sin\Theta\\ \eta&=-(x(u,v)-x_0)\sin\Theta+(y(u,v)-y_0)\cos\Theta\end{aligned}\right. \tag{2.28}$$

ein. Wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung $(u,v)\to(\xi,\eta)$ genügt es zu zeigen, daß f eine schlichte Funktion der Variablen ξ,η darstellt. Offenbar kann f durch ξ und η folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\left\{\begin{aligned} f(w;\Theta)=f^*(\xi,\eta,;\Theta)&=(R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}\{\xi\sqrt[4]{\alpha\beta}+\\ &+i[(q(x_0+\xi\cos\Theta-\eta\sin\Theta,\ y_0+\xi\sin\Theta+\eta\cos\Theta)-q_0)\cos\Theta-\\ &-(p(x_0+\xi\cos\Theta-\eta\sin\Theta,\ y_0+\xi\sin\Theta+\eta\cos\Theta)-p_0)\sin\Theta]\}.\end{aligned}\right. \tag{2.29}$$

Auf Grund von (2.12) gelten dann für $\xi^2+\eta^2<R^2$ und jeden reellen Wert von Θ die Beziehungen

$$Re\,f^*(\xi,\eta,;\Theta)=(R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}\sqrt[4]{\alpha\beta}\cdot\xi \tag{2.30}$$

und

$$\frac{\partial\,\mathrm{Im}\,f^*(\xi,\eta;\Theta)}{\partial\eta}=(R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}(t\cos^2\Theta-2s\cos\Theta\sin\Theta+r\sin^2\Theta)\neq 0. \tag{2.31}$$

Aus (2.30) und (2.31) folgt, daß die Funktion $f^*(\xi,\eta;\Theta)$ in der Kreisscheibe $\xi^2+\eta^2<R^2$ schlicht ist. Damit ist der Hilfssatz 7 bewiesen.

Wir wollen nun zeigen, daß die in Hilfssatz 6 erklärten Abbildungsfunktionen $x(u, v)$ und $y(u, v)$ ein endliches Dirichlet-Integral besitzen. Dies ist ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes über Monge-Ampèresche Gleichungen (vgl. [7], Hilfssatz 4). Zur Bequemlichkeit des Lesers führen wir den auf unseren Fall spezialisierten Beweis noch einmal an.

HILFSSATZ 8. *Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 6 erfüllt. Außerdem sei*

$$E(x, y)\geqq\alpha>0 \tag{2.32}$$

und

$$(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}\leqq\gamma<\infty \tag{2.33}$$

für $(x, y)\in\Delta$. *Dann gilt für die Abbildungsfunktionen* $x(u, v)$ *und* $y(u, v)$ *die Ungleichung*

$$\iint\limits_{|w|<1}(x_u^2+y_u^2+x_v^2+y_v^2)\,du\,dv\leqq\frac{2\pi\gamma R}{\sqrt{\alpha}} \tag{2.34}$$

BEWEIS. Es sei $0<\varrho<1$. Dann läßt sich nach Hilfssatz 6, Behauptung (i), eine positive Zahl $R_1=R_1(\varrho)<R$ so bestimmen, daß das Bildgebiet D^* der Kreisscheibe $D=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R_1^2\}$ bei der inversen Abbildung $(x, y)\to(u, v)$ die Kreisscheibe $|w|\leqq\varrho$ enthält. Zur Abkürzung setzen wir $\dot{D}=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R_1^2\}$. Aus den Gln. (2.5) folgt

$$\frac{x_u^2+y_u^2+x_v^2+y_v^2}{|x_u y_v-x_v y_u|}=\varepsilon\frac{r+t}{\sqrt{E}} \tag{2.35}$$

mit $\varepsilon=\pm1$. Daher wird

$$\left\{\begin{aligned}&\iint\limits_{|w|\leqq\varrho}(x_u^2+y_u^2+x_v^2+y_v^2)\,du\,dv\leqq\iint\limits_{D^*}(x_u^2+y_u^2+x_v^2+y_v^2)\,du\,dv\\&\quad=\varepsilon\iint\limits_D\frac{r+t}{\sqrt{E}}\,dx\,dy\leqq\alpha^{-\frac{1}{2}}\left|\iint\limits_D(r+t)\,dx\,dy\right|\\&\quad\leqq\alpha^{-\frac{1}{2}}\left|\int\limits_{\dot{D}}(-q\,dx+p\,dy)\right|\leqq\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}\int\limits_{\dot{D}}(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}\\&\quad=\frac{2\pi\gamma R_1}{\sqrt{\alpha}}\leqq\frac{2\pi\gamma R}{\sqrt{\alpha}}.\end{aligned}\right. \tag{2.36}$$

Lassen wir hierin ϱ gegen 1 streben, so erhalten wir die Abschätzung (2.34), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

§ 3. Abschätzungen für die Funktionen p und q

Wir sind jetzt in der Lage, die Hauptresultate dieser Arbeit zu beweisen (Satz 1 und Satz 2). Diese können durch elementare Betrachtungen aus dem folgenden Hilfssatz abgeleitet werden:

HILFSSATZ 9. *Es sei $z=z(x, y)$ eine in der Kreisscheibe*

$$\Delta=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2\}$$

reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktion, die der Differentialungleichung

$$0<\alpha\leqq rt-s^2\leqq\beta<\infty \tag{3.1}$$

genügt. Außerdem sei

$$(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}\leqq\gamma<\infty \tag{3.2}$$

für $(x, y)\in\Delta$. Setzen wir dann zur Abkürzung $p_0=p(x_0, y_0)$ und $q_0=q(x_0, y_0)$, so gilt für $(x, y)\in\Delta$ eine Abschätzung der Form

$$\begin{cases} |(x-x_0)(p-p_0)+(y-y_0)(q-q_0)|\geqq \\ \geqq\Gamma(\alpha,\beta,\gamma,R)\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}+\sqrt{(p-p_0)^2+(q-q_0)^2}\right)^{1+\nu}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Dabei ist $\nu=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, und $\Gamma(\alpha,\beta,\gamma,R)$ ist eine stetige, positive Funktion für $0<\alpha\leqq\beta$ und alle positiven Werte von γ und R.

BEWEIS. Auf Grund des Weierstraßschen Approximationssatzes und der Stetigkeit der Funktionen ν und Γ genügt es offenbar, die Ungleichung (3.3) unter der zusätzlichen Voraussetzung zu beweisen, daß $z(x, y)$ ein Polynom ist. Setzen wir

$$rt-s^2=E(x, y), \tag{3.4}$$

so sind alle Voraussetzungen der Hilfssätze 6—8 erfüllt. Unser erstes Ziel besteht darin, geeignete Abschätzungen für die in Hilfssatz 7 definierte Funktion $f(w;\Theta)$ zu gewinnen. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst die Funktion

$$\zeta(w)=\frac{(x(u, v)-x_0)+i(y(u, v)-y_0)}{R}. \tag{3.5}$$

Nach Hilfssatz 8 ist

$$\iint\limits_{|w|<1}(|\zeta_u|^2+|\zeta_v|^2)\,du\,dv\leqq\frac{2\pi\gamma}{R\sqrt{\alpha}}=N. \tag{3.6}$$

Da außerdem $\zeta=\zeta(w)$ den Einheitskreis $|w|=1$ eineindeutig und stetig auf den Einheitskreis $|\zeta|=1$ abbildet, so gibt es eine reelle Zahl η mit $\zeta(e^{i\eta})=e^{i\Theta}$. Durch Anwendung von Hilfssatz 2 erhalten wir für $0<\varrho<1$ die Ungleichung

$$|\zeta(\varrho e^{i\eta})-e^{i\Theta}|\leqq 4\sqrt{\frac{\pi N}{-\log(1-\varrho)}}. \tag{3.7}$$

Setzen wir hierin

$$\varrho=\varrho(\alpha,\gamma,R)=1-e^{-64\pi N}, \tag{3.8}$$

so erhalten wir die Abschätzung

$$|\zeta(\varrho e^{i\eta})-e^{i\Theta}|\leqq\tfrac{1}{2}. \tag{3.9}$$

Hieraus folgt

$$(3.10)\quad\begin{cases}|(x(\varrho\,e^{i\eta})-x_0)\cos\Theta+(y(\varrho\,e^{i\eta})-y_0)\sin\Theta|\\ =|R+(x(\varrho\,e^{i\eta})-x_0-R\cos\Theta)\cos\Theta+(y(\varrho\,e^{i\eta})-y_0-R\sin\Theta)\sin\Theta|\\ \geqq R-\sqrt{(x(\varrho\,e^{i\eta})-x_0-R\cos\Theta)^2+(y(\varrho\,e^{i\eta})-y_0-R\sin\Theta)^2}\\ =R(1-|\zeta(\varrho\,e^{i\eta})-e^{i\Theta}|)\geqq\tfrac{1}{2}R.\end{cases}$$

Mit $w^*=\varrho(\alpha,\gamma,R)\,e^{i\eta}$ wird dann

$$(3.11)\qquad 1-|w^*|=e^{-64\pi N}$$

und

$$(3.12)\quad\begin{cases}|f(w^*;\Theta)|\geqq\dfrac{\sqrt[4]{\alpha\beta}}{\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}}\,|(x(\varrho\,e^{i\eta})-x_0)\cos\Theta+(y(\varrho\,e^{i\eta})-y_0)\sin\Theta|\\ \qquad\geqq\dfrac{R\sqrt[4]{\alpha\beta}}{2\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1+\dfrac{2\gamma^2}{R^2\sqrt{\alpha\beta}}}}.\end{cases}$$

Aus Hilfssatz 7 ergibt sich, daß die Funktion $f(w;\Theta)$ alle Voraussetzungen von Hilfssatz 5 mit $K=\sqrt[4]{\dfrac{\beta}{\alpha}}$ erfüllt. Daraus, sowie aus (1.15), (3.11) und (3.12), erhalten wir für $0<|w|<1$ die Ungleichung

$$(3.13)\quad\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1+\dfrac{2\gamma^2}{R^2\sqrt{\alpha\beta}}}}\leqq|f(w^*;\Theta)|\leqq\\ \qquad\leqq c(K)^{\frac{1}{4}K}\left(\dfrac{|f(w;\Theta)|}{|w|^K}\right)^{4^{-1}c(K)-2K}e^{-64\pi NK}(1-|w|)^K\end{cases}$$

also

$$(3.14)\qquad\frac{|f(w;\Theta)|}{|w|^K}\geqq\left(\frac{c(K)^{-\frac{1}{4}K}}{2\sqrt{1+\dfrac{2\gamma^2}{R^2\sqrt{\alpha\beta}}}}\right)^{4c(K)^{2K}e^{64\pi NK}(1-|w|)^{-K}}$$

für $0<|w|<1$.

Es sei nun $|w|\leqq\frac{1}{2}$. Dann folgt aus (3.14) die Abschätzung

$$(3.15)\qquad|f(w;\Theta)|\geqq\left(\frac{c(K)^{-\frac{1}{4}K}}{2\sqrt{1+\dfrac{2\gamma^2}{R^2\sqrt{\alpha\beta}}}}\right)^{4c(K)^{2K}e^{64\pi NK}\cdot 2^K}\cdot|w|^K.$$

Ferner gilt wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung $w\to f(w;\Theta)$ für $\frac{1}{2}\leqq|w|<1$ die Ungleichung

$$(3.16)\qquad|f(w;\Theta)|\geqq 2^{-K}\left(\frac{c(K)^{-\frac{1}{4}K}}{2\sqrt{1+\dfrac{2\gamma^2}{R^2\sqrt{\alpha\beta}}}}\right)^{4c(K)^{2K}e^{64\pi NK}2^K}\cdot|w|^K.$$

Aus (3.15) und (3.16) ergibt sich

$$(3.17)\qquad|f(w;\Theta)|\geqq\Gamma_-(\alpha,\beta,\gamma,R)\,|w|^K$$

mit

$$K=\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}} \tag{3.18}$$

und

$$\Gamma_-(\alpha,\beta,\gamma,R)=2^{-K}\left(\frac{c(K)^{-\frac{1}{2}K}}{2\sqrt{1+\frac{2\gamma^2}{R^2\sqrt{\alpha\beta}}}}\right)^{4c(K)^{2K}2^{K}e^{64\pi NK}}<1. \tag{3.19}$$

Ferner ist auf Grund von (1.14) für $|w|<1$ und alle reellen Werte von Θ die Ungleichung

$$f(w;\Theta)\leqq\Gamma_+(\alpha,\beta)\,w^{\frac{1}{K}} \tag{3.20}$$

erfüllt, wobei $\Gamma_+(\alpha,\beta)$ durch die Gleichung

$$\Gamma_+(\alpha,\beta)=c\left(\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\geqq 1 \tag{3.21}$$

definiert ist. Offenbar sind Γ_+ und Γ_- stetige positive Funktionen für $0<\alpha\leqq\beta$ und alle positiven Werte von γ und R.

Es sei nun (x_1, y_1) ein beliebiger Punkt in Δ mit $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2>0$, und es werde zur Abkürzung $p_1=p(x_1, y_1)$ und $q_1=q(x_1, y_1)$ gesetzt. Ferner sei $w_1=u_1+iv_1$ derjenige Punkt der Kreisscheibe $|w|<1$, der bei der Abbildung $(u, v)\to(x, y)$ in den Punkt (x_1, y_1) übergeführt wird. Offenbar ist $w_1\neq 0$. Aus (3.17) und (3.20) folgt dann, daß für alle reellen Werte von Θ die Ungleichungen

$$\begin{cases}\sqrt{\sqrt{\alpha\beta}\,((x_1-x_0)\cos\Theta+(y_1-y_0)\sin\Theta)^2+((q_1-q_0)\cos\Theta-(p_1-p_0)\sin\Theta)^2}\geqq\\ \qquad\geqq\Gamma_-(\alpha,\beta,\gamma,R)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}\,|w_1|^K>0\end{cases} \tag{3.22}$$

und

$$\begin{cases}\sqrt{\sqrt{\alpha\beta}\,((x_1-x_0)\cos\Theta+(y_1-y_0)\sin\Theta)^2+((q_1-q_0)\cos\Theta-(p_1-p_0)\sin\Theta)^2}\leqq\\ \qquad\leqq\Gamma_+(\alpha,\beta)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}\,|w_1|^{\frac{1}{K}}\end{cases} \tag{3.23}$$

erfüllt sind. Insbesondere ist

$$\begin{cases}\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}+\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}\leqq\\ \qquad\leqq\Gamma_+(\alpha,\beta)\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}\cdot|w_1|^{\frac{1}{K}}.\end{cases} \tag{3.24}$$

Wählt man $\Theta=\Theta'$ so daß die Gleichungen

$$\cos\Theta'=\frac{y_1-y_0}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}} \tag{3.25}$$

und

$$\sin\Theta'=-\frac{x_1-x_0}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}} \tag{3.26}$$

gelten, dann ergibt sich aus (3.22) die Abschätzung

$$\left\{\begin{aligned}&|(x_1-x_0)(p_1-p_0)+(y_1-y_0)(q_1-q_0)|\geqq\\&\geqq\Gamma_-(\alpha,\beta,\gamma,R)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}\cdot\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\cdot|w_1|^K>0.\end{aligned}\right. \tag{3.27}$$

Insbesondere wird

$$(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2>0. \tag{3.28}$$

Es sei nun Θ'' eine reelle Zahl mit

$$\cos\Theta''=\frac{p_1-p_0}{\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}} \tag{3.29}$$

und

$$\sin\Theta''=\frac{q_1-q_0}{\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}}. \tag{3.30}$$

Setzen wir dann $\Theta=\Theta''$ in (3.22), so erhalten wir die Ungleichung

$$\left\{\begin{aligned}&|(x_1-x_0)(p_1-p_0)+(y_1-y_0)(q_1-q_0)|\geqq\\&\qquad\geqq\frac{\Gamma_-(\alpha,\beta,\gamma,R)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}}{\sqrt{\alpha\beta}}\cdot\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}\cdot|w_1|^K.\end{aligned}\right. \tag{3.31}$$

Aus (3.27) und (3.31) entnimmt man die Abschätzung

$$\left\{\begin{aligned}&|(x_1-x_0)(p_1-p_0)+(y_1-y_0)(q_1-q_0)|\geqq\\&\quad\geqq\frac{\Gamma_-(\alpha,\beta,\gamma,R)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}}{2(1+\sqrt{\alpha\beta})}\left(\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}+\right.\\&\quad\left.+\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}\right)|w_1|^K.\end{aligned}\right. \tag{3.32}$$

Um die Größe $|w_1|^K$ aus (3.32) zu eliminieren, bemerken wir zunächst, daß auf Grund von (3.24) die Ungleichung

$$\left\{\begin{aligned}|w_1|^K\geqq&\left[\Gamma_+(\alpha,\beta)\left(1+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}\right]^{-K'}\times\\&\times\left(\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}+\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}\right)^{K'}\end{aligned}\right. \tag{3.33}$$

besteht. Daraus, sowie aus (3.32), folgt aber die Abschätzung

$$\left\{\begin{aligned}&|(x_1-x_0)(p_1-p_0)+(y_1-y_0)(q_1-q_0)|\geqq\\&\qquad\geqq\frac{\Gamma_-(\alpha,\beta,\gamma,R)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}}{2(1+\sqrt{\alpha\beta})\left[\Gamma_+(\alpha,\beta)\left(1+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta}+2\gamma^2}\right]^{K'}}\times\\&\qquad\times\left(\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}+\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}\right)^{1+K'}\end{aligned}\right. \tag{3.34}$$

die offenbar auch für $x_1 = x_0$ und $y_1 = y_0$ gilt. Setzen wir schließlich

$$\nu = K^2 = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \tag{3.35}$$

und

$$\Gamma(\alpha, \beta, \gamma, R) = \frac{\Gamma_-(\alpha, \beta, \gamma, R)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta} + 2\gamma^2}}{2\left(1 + \sqrt[4]{\alpha\beta}\right)\left[\Gamma_+(\alpha, \beta)\left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha\beta}}\right)\sqrt{R^2\sqrt{\alpha\beta} + 2\gamma^2}\right]^{K^2}}, \tag{3.36}$$

so erhalten wir die Ungleichung (3.3), womit unser Hilfssatz bewiesen ist. Wir benötigen nun die wohlbekannten elementaren Hilfssätze, deren Beweise wir hier der Vollständigkeit halber anführen:

HILFSSATZ 10. *Die reelle Funktion $z = z(x, y)$ sei in einer offenen Punktmenge Ω der xy-Ebene zweimal stetig differenzierbar und genüge der Differentialungleichung*

$$rt - s^2 > 0. \tag{3.37}$$

Außerdem sei (x_0, y_0) ein Punkt in der xy-Ebene und λ eine reelle Zahl, so daß die Strecke

$$\begin{cases} x = x_0 + \varrho\cos\lambda \\ y = y_0 + \varrho\sin\lambda \end{cases} \qquad (a \leqq \varrho \leqq b) \tag{3.38}$$

zu Ω gehört. Dann ist die Funktion

$$\begin{cases} F(\varrho; x_0, y_0, \lambda) = p(x_0 + \varrho\cos\lambda, y_0 + \varrho\sin\lambda)\cos\lambda + \\ \qquad + q(x_0 + \varrho\cos\lambda, y_0 + \varrho\sin\lambda)\sin\lambda \end{cases} \tag{3.39}$$

im Intervall $a \leqq \varrho \leqq b$ monoton.

BEWEIS. Wegen

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} = r\cos^2\lambda + 2s\cos\lambda\sin\lambda + t\sin^2\lambda \tag{3.40}$$

und (3.37) gilt für $a \leqq \varrho \leqq b$ die Ungleichung

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho} \neq 0. \tag{3.41}$$

Daher ist F im Intervall $a \leqq \varrho \leqq b$ monoton, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

HILFSSATZ 11. *Es sei $z = z(x, y)$ eine in einer offenen Punktmenge Ω der xy-Ebene zweimal stetig differenzierbare reelle Funktion, die der Differentialungleichung (3.37) genügt. Ferner sei*

$$|z(x, y)| \leqq \delta < \infty \tag{3.42}$$

für $(x, y) \in \Omega$, und $\Omega_d (d > 0)$ sei die Teilmenge aller Punkte in Ω, deren Abstand vom Rande von Ω die Größe d überschreitet. Dann gilt für $(x, y) \in \Omega_d$ die Ungleichung

$$\sqrt{p^2 + q^2} \leqq \frac{2\delta}{d}. \tag{3.43}$$

BEWEIS. Es sei $(x_0, y_0)\in\Omega_d$ und λ eine reelle Zahl. Außerdem sei $F(\varrho; x_0, y_0, \lambda)$ die im Hilfssatz 10 erklärte Funktion. Dann gibt es offenbar zwei reelle Zahlen ϱ^- und ϱ^+ mit $-d\leqq\varrho^-\leqq 0$ und $0\leqq\varrho^+\leqq d$, so daß die Gleichungen

$$F(\varrho^-; x_0, y_0, \lambda)=\frac{z(x_0, y_0)-z(x_0-d\cos\lambda, y_0-d\sin\lambda)}{d} \tag{3.44}$$

und

$$F(\varrho^+; x_0, y_0, \lambda)=\frac{z(x_0+d\cos\lambda, y_0+d\sin\lambda)-z(x_0, y_0)}{d} \tag{3.45}$$

erfüllt sind. Wegen (3.42) ist dann

$$|F(\varrho^-; x_0, y_0, \lambda)|\leqq\frac{2\delta}{d} \tag{3.46}$$

und

$$|F(\varrho^+; x_0, y_0, \lambda)|\leqq\frac{2\delta}{d}. \tag{3.47}$$

Durch Anwendung von Hilfssatz 10 erhalten wir hieraus die Abschätzung

$$\begin{cases} |p(x_0, y_0)\cos\lambda+q(x_0, y_0)\sin\lambda|=|F(0; x_0, y_0, \lambda)\leqq \\ \qquad\leqq\max\left(|F(\varrho^-; x_0, y_0, \lambda)|,\ |F(\varrho^+; x_0, y_0, \lambda)|\right)\leqq\frac{2\delta}{d}. \end{cases} \tag{3.48}$$

Da diese für alle reellen Werte von λ gilt, so folgt (3.43), womit die Behauptung bewiesen ist.

Aus den letzten drei Hilfssätzen ergeben sich nun die folgenden Resultate:

SATZ 1. *Es sei $z=z(x, y)$ eine in einer offenen Punktmenge Ω der xy-Ebene reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktion, die der Differentialungleichung*

$$0<\alpha\leqq rt-s^2\leqq\beta<\infty \tag{3.49}$$

genügt. Außerdem sei

$$|z(x, y)|\leqq\delta<\infty \tag{3.50}$$

für $(x, y)\in\Omega$, und Ω_d $(d>0)$ sei die Teilmenge aller Punkte in Ω, deren Abstand vom Rande von Ω größer als d ist. Dann gilt für zwei beliebige Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) in Ω_d eine Abschätzung der Form

$$\begin{cases} \sqrt{(p(x_1, y_1)-p(x_0, y_0))^2+(q(x_1, y_1)-q(x_0, y_0))^2}\leqq \\ \qquad\leqq\Gamma_1(\alpha, \beta, \delta, d)\left(\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\right)^{\mu}. \end{cases} \tag{3.51}$$

Dabei ist $\mu=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, und $\Gamma_1(\alpha, \beta, \delta, d)$ ist eine stetige, positive Funktion für $0<\alpha\leqq\beta$ und alle positiven Werte von δ und d.

BEWEIS. Zur Abkürzung sei

$$p_k=p(x_k, y_k),\qquad q_k=q(x_k, y_k)\qquad (k=0, 1), \tag{3.52}$$

und wir setzen zunächst voraus, daß $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2<\frac{d^2}{4}$ ausfällt. Nach Hilfssatz 11 gilt für $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\frac{d^2}{4}$ die Abschätzung

$$\sqrt{p(x, y)^2+q(x, y)^2}\leqq\frac{4\delta}{d}. \tag{3.53}$$

Durch Anwendung von Hilfssatz 9 $\left(\text{mit } R=\frac{d}{2} \text{ und } \gamma=\frac{4\delta}{d}\right)$ folgt

$$\left\{\begin{aligned} &\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\,\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}\geqq \\ &\qquad\geqq |(x_1-x_0)(p_1-p_0)+(y_1-y_0)(q_1-q_0)|\geqq \\ &\qquad\geqq \Gamma\left(\alpha,\beta,\frac{4\delta}{d},\frac{d}{2}\right)\left(\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}\right)^{1+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}, \end{aligned}\right. \tag{3.54}$$

also

$$\left\{\begin{aligned} &\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}\leqq\left(\Gamma\left(\alpha,\beta,\frac{4\delta}{d},\frac{d}{2}\right)\right)^{-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}\times \\ &\qquad\times\left(\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\right)^{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} \end{aligned}\right. \tag{3.55}$$

Es sei nun $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2\geqq\frac{d^2}{4}$. Dann besteht nach Hilfssatz 11 die Ungleichung

$$\left\{\begin{aligned} &\sqrt{(p_1-p_0)^2+(q_1-q_0)^2}\leqq\sqrt{p_0^2+q_0^2}+\sqrt{p_1^2+q_1^2}\leqq\frac{4\delta}{d}\leqq \\ &\qquad\leqq\frac{2^{2+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}\,\delta}{d^{1+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}}\left(\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\right)^{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}} \end{aligned}\right. \tag{3.56}$$

Aus (3.55) und (3.56) folgt schließlich (3.51) mit

$$\mu=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tag{3.57}$$

und

$$\Gamma_1(\alpha,\beta,\delta,d)=\left(\Gamma\left(\alpha,\beta,\frac{4\delta}{d},\frac{d}{2}\right)\right)^{-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}+\frac{2^{2+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}\,\delta}{d^{1+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}}, \tag{3.58}$$

womit Satz 1 bewiesen ist.

SATZ 2. *Es sei $z=z(x,y)$ eine in einer konvexen, offenen Punktmenge Ω der xy-Ebene reelle, zweimal stetig differenzierbare Funktion, die der Differentialungleichung*

$$0<\alpha\leqq rt-s^2\leqq\beta<\infty \tag{3.59}$$

genügt. Außerdem gelte

$$|z(x,y)|\leqq\delta<\infty \tag{3.60}$$

für $(x,y)\in\Omega$, und (x_0,y_0) sei ein Punkt in Ω, dessen Abstand vom Rande von Ω eine positive Größe d überschreitet.

Dann besteht für jeden von (x_0,y_0) verschiedenen Punkt $(x,y)\in\Omega$ die Ungleichung

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\frac{(x-x_0)(p-p_0)+(y-y_0)(q-q_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right|\geqq\Gamma_2(\alpha,\beta,\delta,d)\times \\ &\qquad\times\left(\Lambda_d\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)\right)^r\,(p_0=p(x_0,y_0),\ q_0=q(x_0,y_0)). \end{aligned}\right. \tag{3.61}$$

Dabei ist $\nu=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, *und die Funktion* $\Lambda_d(\varrho)$ *ist durch die Gleichungen*

$$\Lambda_d(\varrho)=\begin{cases}\varrho & \text{für} \quad 0\leqq\varrho\leqq\frac{d}{2}\\ \frac{d}{2} & \text{für} \quad \frac{d}{2}\leqq\varrho<\infty\end{cases} \tag{3.62}$$

definiert. Außerdem ist $\Gamma_2(\alpha,\beta,\delta,d)$ *eine stetige positive Funktion für* $0<\alpha\leqq\beta$ *und alle positiven Werte von* δ *und* d.

Beweis. Nach Hilfssatz 11 gilt für $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\frac{d^2}{4}$ die Abschätzung

$$\sqrt{p^2+q^2}\leqq\frac{4\delta}{d}. \tag{3.63}$$

Daraus, sowie aus Hilfssatz 9 $\left(\text{mit } R=\frac{d}{2} \text{ und } \gamma=\frac{4\delta}{d}\right)$, ergibt sich für

$$0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\frac{d^2}{4}$$

die Ungleichung

$$\left|\frac{(x-x_0)(p-p_0)+(y-y_0)(q-q_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right|\geqq\Gamma\left(\alpha,\beta,\frac{4\delta}{d},\frac{d}{2}\right)\times \tag{3.64}$$
$$\times\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}.$$

Es sei nun (x_1, y_1) ein von (x_0, y_0) verschiedener Punkt in Ω und λ eine reelle Zahl mit

$$\cos\lambda=\frac{x_1-x_0}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}} \tag{3.65}$$

und

$$\sin\lambda=\frac{y_1-y_0}{\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}}. \tag{3.66}$$

Wegen der Konvexität von Ω gehört die Strecke

$$\begin{cases}x=x_0+\varrho\cos\lambda\\ y=y_0+\varrho\sin\lambda\end{cases}\qquad\left(0\leqq\varrho\leqq\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}\right). \tag{3.67}$$

zu Ω. Daraus, sowie aus Hilfssatz 10, folgt, daß die in (3.39) definierte Funktion $F(\varrho; x_0, y_0, \lambda)$ im Intervall $0\leqq\varrho\leqq\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$ monoton ist. Anwendung von (3.64) liefert für $0\leqq\varrho\leqq\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$ die Abschätzung

$$|F(\varrho; x_0, y_0, \lambda)-F(0; x_0, y_0, \lambda)|\geqq\Gamma_2(\alpha,\beta,\delta,d)\cdot\left(\Lambda_d(\varrho)\right)^{\nu}. \tag{3.68}$$

Dabei ist $\nu=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$, und die Funktionen $\Lambda_d(\varrho)$ und $\Gamma_2(\alpha,\beta,\delta,d)$ sind durch die Gln. (3.62) und

$$\Gamma_2(\alpha,\beta,\delta,d)=\Gamma\left(\alpha,\beta,\frac{4\delta}{d},\frac{d}{2}\right) \tag{3.69}$$

erklärt. Setzen wir $\varrho=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}$ in (3.68), so erhalten wir die gesuchte Ungleichung (3.61). Damit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Literatur

[1] AHLFORS, L.: On quasi-conformal mappings. J. d'Analyse Mathématique **3**, 1–58 (1953/54). – [2] ALEXANDROW, A. D.: Smoothness of the convex surface of bounded Gaussian curvature. Doklady Akad. Nauk. USSR. (N.S.) **36**, 195–199 (1942). – [3] COURANT, R., u. D. HILBERT: Methoden der Mathematischen Physik. II. Berlin 1937. – [4] FINN, R., u. J. SERRIN: On the Hölder continuity of quasi-conformal and elliptic mappings. Trans. Amer. Math. Soc. **89**, 1–15 (1958). – [5] HEINZ, E.: Über gewisse elliptische Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendung auf die Monge-Ampèresche Gleichung. Math. Annalen **131**, 411–428 (1956). – [6] HEINZ, E.: On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings. J. d'Analyse Mathématique **5**, 197–272 (1956/57). – [7] HEINZ, E.: On elliptic Monge-Ampère equations and Weyl's embedding problem; Journal d'Analyse Mathématique **7**, 1–52 (1959). – [8] MORI, A.: On an absolute constant in the theory of quasi-conformal mappings. J. Math. Soc. Japan **8**, 156–166 (1956). – [9] MORREY, C.B.: On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 126–166 (1938). – [10] POGORELOW, A. W.: Die Verbiegung konvexer Flächen. Berlin: Akademie-Verlag 1957. – [11] PÓLYA, G., u. G. SZEGÖ: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Bd. I. Berlin 1925.

Appl. Math. and Stat. Lab., Stanford University, Stanford, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 29. Januar 1959)

STEINHAUS, H., u. K. URBANIK
Math. Zeitschr. 72, 127–145 (1959)

Poissonsche Folgen

LEON LICHTENSTEIN zum Gedächtnis

Von

H. STEINHAUS und K. URBANIK

Was eine Poissonsche Folge ist, zeigt die Physik an solchen Beispielen, wie etwa die Folge von Zeitpunkten, in welchen ein Leuchtschirm aufblitzt, weil er von einer Partikel getroffen wurde. Die moderne Wahrscheinlichkeitsrechnung hat den Begriff eines Poissonschen stochastischen Prozesses geschaffen; diese Entwicklung hat sich jedoch von den Poissonschen Folgen des Physikers ziemlich weit entfernt, so daß das Problem, ein mathematisches Modell einer solchen Folge effektiv zu konstruieren, unbeachtet blieb.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden die Definitionen solcher Begriffe gegeben, wie der Poissonsche Prozeß, die numerische Poissonsche Folge und die numerische „in sich Poissonsche" Folge. In demselben Teil wird die perfekt gleichverteilte Folge definiert und es werden Sätze bewiesen, welche die Beziehung dieses Begriffes zu jenem einer Poissonschen Folge betreffen. Effektive Beispiele von Poissonschen Folgen werden im zweiten Teil gegeben. Im dritten Teil werden Beziehungen zwischen den drei im ersten Teil definierten Begriffen besprochen. Der letzte Teil bringt eine hinreichende Bedingung dafür, daß eine numerische Folge eine Poissonsche sei.

Das Symbol $\{t: \Phi\}$ bedeutet die Menge aller t, welche der Bedingung Φ genügen.

Das lineare Lebesguesche Maß einer auf der reellen Achse gelegenen und nach LEBESGUE meßbaren Punktmenge A wird mit $|A|$ bezeichnet. Liegt A auf der positiven Halbachse und existiert die Grenze

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |A \cap \{t: 0 \leqq t \leqq T\}|,$$

so wird sie das *relative Maß* von A genannt und mit $|A|_R$ bezeichnet.

Die Mächtigkeit einer Menge B werde mit $\overline{\overline{B}}$ bezeichnet. Sei B eine Teilmenge der Menge aller natürlichen Zahlen – existiert die Grenze

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \overline{\overline{B \cap \{n: 1 \leqq n \leqq N\}}},$$

so wird sie *Frequenz* von B genannt und mit fr B bezeichnet.

In vorliegender Arbeit verstehen wir unter einem „Intervall" nur auf der reellen Halbachse gelegene und linksseitig offene Intervalle $\{t: a < t \leqq b\}$.

Ist I ein Intervall, so bezeichnet das Symbol $a+I$ das um a rechts verschobene Intervall, d. h.

$$a+I=\{t:\ t-a\in I\}.$$

I.

Eine nichtabnehmende Folge

$$s_1(\tau)\leqq s_2(\tau)\leqq\cdots\quad(0\leqq\tau\leqq 1)$$

von nichtnegativen, meßbaren Funktionen $s_n(\tau)$ heißt ein *Signalprozeß*.

(i) Ein Signalprozeß $\{s_n(\tau)\}$ heißt ein *Poissonscher Prozeß*, wenn für jede natürliche Zahl k, bei beliebig gewählten, paarweise punktfremden Intervallen $I_1, I_2, \ldots, I_k$ und beliebigen ganzen nichtnegativen Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_k$

$$|A(I_1,\ldots,I_k;\ m,\ldots,m_k)|=\prod_{r=1}^{k}e^{-|I_r|}\frac{|I_r|^{m_r}}{m_r!} \tag{1}$$

gilt, wobei $A(I_1,\ldots,I_k;\ m,\ldots,m_k)$ die dadurch definierte τ-Menge bezeichnet, daß für $\tau\in A$ und $r=1, 2, \ldots, k$ I_r genau m_r Terme des Signalprozesses $\{s_n(\tau)\}$ enthält.

Die eben formulierte Definition ist eine Abart der üblichen Definition Poissonscher Prozesse mit 1 als mittlerer Anzahl von Signalen in jedem Einheitsintervall; die Annahme des Einheitsintervalls $\langle 01\rangle$ für die stochastische Variable ist bekanntlich keine Verminderung der Allgemeinheit.

Eine nichtabnehmende Folge $s_1, s_2\ldots$ von nichtnegativen Zahlen s_n heißt eine *Signalfolge*.

(ii) Eine Signalfolge $\{s_n\}$ heißt eine *Poissonsche Folge*, wenn für jedes natürliche k bei beliebigen paarweise punktfremden Intervallen $I_1, I_2, \ldots, I_k$ und beliebigen ganzen nichtnegativen $m_1, m_2, \ldots, m_k$ die Beziehung

$$|B(I_1,\ldots,I_k;\ m_1,\ldots,m_k)|_R=\prod_{r=1}^{k}e^{-|I_r|}\frac{|I_r|^{m_r}}{m_r!} \tag{2}$$

gilt, wobei $B(I_1,\ldots,I_k;\ m_1,\ldots,m_k)$ als die Menge dieser t verstanden werden soll, für welche jedes Intervall $t+I_r$ genau m_r Terme der Signalfolge $\{s_n\}$ enthält ($r=1, 2, \ldots, k$).

(iii) Eine Signalfolge $\{s_n\}$ heißt eine *in sich Poissonsche Folge*, wenn unter Beibehaltung der bereits erklärten Symbole I_r, m_r die Beziehung

$$\mathrm{fr}\,C(I_1,\ldots,I_k;\ m_1,\ldots,m_k)=\prod_{r=1}^{k}e^{-|I_r|}\frac{|I_r|^{m_r}}{m_r!} \tag{3}$$

gilt, wobei $C(I_1,\ldots,I_k;\ m_1,\ldots,m_k)$ als die Menge derjenigen n erklärt sei, für welche s_n+I_r genau m_r Terme von $\{s_n\}$ für $r=1, 2, \ldots, k$ enthält.

(iv) Eine Funktionenfolge $\{a_n(\tau)\}$ werden wir als *regulär* bezeichnen, wenn jeder Term meßbar in $\langle 01\rangle$ ist, daselbst der Ungleichung $0\leqq a_n(\tau)<1$ genügt und für jedes System $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(0\leqq x_r\leqq 1)$ die Bedingung

$$\Big|\bigcap_{r=1}^{k}\{\tau:\ a_r(\tau)<x_r\}\Big|=\prod_{r=1}^{k}x_r \tag{4}$$

erfüllt. Wir erinnern hier an ein Beispiel [8] einer solchen Funktionenfolge, wo sogar alle Terme stetig sind.

Ein Gegenstück zum eben eingeführten Begriff einer regulären Funktion ist der Begriff einer regulären Folge (solche Folgen hat KOROBOW ([2], S. 216; vgl. auch [6], S. 760) als perfekt gleichverteilt bezeichnet).

(v) Wir nennen eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ $(0 \leqq a_n < 1;\ n = 1, 2, \ldots)$ *regulär*, wenn für jedes Zahlensystem $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(0 \leqq x_r \leqq 1,\ r = 1, 2, \ldots, k)$ die Bedingung

$$\operatorname{fr} \bigcap_{r=1}^{k} \{n:\ a_{n+r} < x_r\} = \prod_{r=1}^{k} x_r \tag{5}$$

erfüllt ist. (M. a. W.: Die Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist perfekt gleichverteilt, wenn für jedes k die Punkte $P_n^k = (a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+k})$ im Einheitswürfel des k-dimensionalen Raumes gleichverteilt sind.)

Die Beziehung zwischen den in (i) und (iv) eingeführten Begriffen ist durch den folgenden, wohlbekannten Satz gegeben:

Die Funktionenfolge $\{a_n(\tau)\}$ ist dann und nur dann regulär, wenn die durch

$$s_n(\tau) = -\log \prod_{r=1}^{n} (1 - a_r(\tau)) \tag{6}$$

erklärte Funktionenfolge $\{s_n(\tau)\}$ ein Poissonscher Prozeß ist.

Für Poissonsche *Folgen* gilt folgende hinreichende Bedingung:

SATZ 1. *Ist die Zahlenfolge $\{a_n\}$ regulär und*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\prod_{r=1}^{n} (1 - a_r)} = e^{-1}, \tag{7}$$

so ist die durch

$$s_n = -\log \prod_{r=1}^{n} (1 - a_r) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

erklärte Zahlenfolge $\{s_n\}$ eine Poissonsche Folge.

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir bemerken, daß die Umkehrung nicht gilt. Im dritten Teil (Beispiel (a)) werden wir zeigen, daß es eine Poissonsche Folge $\{s_n\}$ gibt, für welche die durch (8) bestimmte Folge $\{a_n\}$ weder regulär ist, noch die Bedingung (7) erfüllt. Wir werden auch zeigen [Beispiel (b)], daß die Voraussetzung der Regularität von $\{a_n\}$ im Satz 1 ohne die Zusatzbedingung (7) nicht ausreicht.

Beweis. Zunächst werde festgestellt, daß man sich in der Definition (ii) auf solche Systeme von Intervallen I_r beschränken darf, bei denen der rechte Endpunkt von I_r mit dem linken Endpunkt von I_{r+1} für $r = 1, 2, \ldots, k-1$ zusammenfällt. Es soll also $\{I_r\}$ $(r = 1, 2, \ldots, k)$ ein solches Intervallsystem sein und $\{m_r\}$ das zugeordnete System von k ganzen nichtnegativen Zahlen. Man definiere b_n durch

$$b_n = -\log(1 - a_n) = s_n - s_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots;\ s_0 = 0), \tag{9}$$

und eine von t und $\{m_r\}$ abhängige Menge D von natürlichen Zahlen durch

$$(10)\quad \begin{cases} D(t;\, m_1, \ldots, m_k) \\ = \{n:\, t \leqq b_{n+1}\} \cap \bigcap_{r=1}^{k} \left\{ n:\, \sum_{j=m_1+\cdots+m_{r-1}+1}^{m_1+\cdots+m_r} b_{n+j} \leqq |I_r|,\ \sum_{j=m_1+\cdots+m_{r-1}+1}^{m_1+\cdots+m_r+1} b_{n+j} > |I_r| \right\}. \end{cases}$$

Wenn man die Regularität von $\{a_n\}$ heranzieht, so führt eine ziemlich einfache Rechnung von (9) und (10) zu

$$(11)\qquad \text{fr}\, D(t;\, m_1, \ldots, m_k) = e^{-t} \prod_{r=1}^{k} e^{-|I_r|} \frac{|I_r|^{m_r}}{m_r!} \quad (t \geqq 0).$$

Es bedeute $B(I_1, \ldots, I_k;\, m_1, \ldots, m_k)$ dasselbe wie in (ii), B_n sei aber durch

$$(12)\quad \begin{cases} B_n(m_1, \ldots, m_k) = \{t:\, s_n < t \leqq s_{n+1}\} \cap \\ \qquad \cap \bigcap_{r=1}^{k} \left\{ t:\, s_{n+m_1+\cdots+m_r} \leqq t + \sum_{j=1}^{r} |I_j|,\ s_{n+m_1+\cdots+m_r+1} > t + \sum_{j=1}^{r} |I_j| \right\} \end{cases}$$

erklärt. Dann erhält man

$$B(I_1, \ldots, I_k;\, m_1, \ldots, m_k) \cap \{t:\, s_1 < t \leqq s_N\} = \bigcup_{n=1}^{N} B_n(m_1, \ldots, m_k),$$

woraus — unter Beachtung der Tatsache, daß die Mengen B_n paarweise punktfremd sind — die Ungleichung

$$(13)\quad \begin{cases} |B(I_1, \ldots, I_k;\, m_1, \ldots, m_k) \cap \{t:\, 0 \leqq t \leqq T\}| - \sum_{n=1}^{[T]} |B_n(m_1, \ldots, m_k)| \\ \qquad \leqq s_1 + |T - s_{[T]}| \end{cases}$$

folgt.

Die Voraussetzung (7) und die Formeln (8) und (9) führen zu

$$(14)\qquad \lim_{N\to\infty} \frac{s_N}{N} = \lim \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} b_n = 1,$$

was mit (13) den Grenzwertsatz

$$(15)\quad \begin{cases} \lim_{T\to\infty} \Big| \frac{1}{T} |B(I_1, \ldots, I_k;\, m_1, \ldots, m_k) \cap \{t:\, 0 \leqq t \leqq T\}| - \\ \qquad - \frac{1}{[T]} \sum_{n=1}^{[T]} |B_n(m_1, \ldots, m_k)| \Big| = 0 \end{cases}$$

impliziert. Um daraus die Behauptung des Satzes 1 zu folgern, genügt es die Beziehung

$$(16)\qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |B_n(m_1, \ldots, m_k)| = \prod_{r=1}^{k} e^{-|I_r|} \frac{|I_r|^{m_r}}{m_r!}$$

zu beweisen. Nun aber erhalten wir aus den Definitionen (10) und (12)

$$\sum_{n=1}^{N} |B_n(m_1, \ldots, m_k)| = \int_0^{\infty} \overline{\overline{D(t;\, m_1, \ldots, m_k) \cap \{n;\ 1 \leqq n \leqq N\}}}\, dt,$$

was nach dem Fatouschen Lemma und der Formel (11) die Ungleichung

$$(17)\quad \liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|B_n(m_1,\ldots,m_k)|\geqq\int_0^\infty \mathrm{fr}\,D(t;\,m_1,\ldots,m_k)\,dt=\prod_{r=1}^{k}e^{-|I_r|}\frac{|I_r|^{m_r}}{m_r!}$$

zur Folge hat. Die Gleichheit

$$|B_n(m_1,\ldots,m_k)|=b_{n+1}-\sum_{*}|B_n(q_1,\ldots,q_k)|$$

ist leicht zu begründen; die Summierung $\sum_{*}$ erstreckt sich auf alle Systeme $\langle q_1,q_2,\ldots,q_k\rangle$, die von $\langle m_1,m_2,\ldots,m_k\rangle$ verschieden sind. Daraus und aus (14) und (17) folgt die Ungleichung

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|B_n(m_1,\ldots,m_k)|\leqq\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}b_{n+1}-$$

$$-\sum_{*}\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|B_n(q_1,\ldots,q_k)|\leqq 1-\sum_{*}\prod_{j=1}^{k}e^{-|I_j|}\frac{|I_j|^{q_j}}{q_j!}=\prod_{r=1}^{k}e^{-|I_r|}\frac{|I_r|^{m_r}}{m_r!},$$

welche bereits mit der Ungleichung (17) die Beziehung (16) impliziert. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Satz 2. *Eine Folge* $\{a_n\}$ $(0\leqq a_n<1,\ n=1,2,\ldots)$ *ist dann und nur dann regulär, wenn* $\{s_n\}$,

$$(18)\qquad s_n=-\log\prod_{j=1}^{n}(1-a_j)\qquad (n=1,2,\ldots),$$

eine in sich Poissonsche Folge ist.

Beweis. 1. *Die Bedingung* (18) *ist hinreichend.*

Betrachten wir zwei Systeme positiver Zahlen, $x_1,x_2,\ldots,x_k$ und $h_1,h_2,\ldots,h_k$. Die Zahlen h_r seien so klein, daß die Ungleichungen

$$(19)\qquad \sum_{r=1}^{j}(x_r+h_r)\leqq\sum_{r=1}^{j+1}x_r\qquad (j=1,2,\ldots,k-1)$$

erfüllt sind. Wir definieren $2k$ Intervalle I_j $(j=1,2,\ldots,2k)$:

$$(20)\qquad \begin{cases} I_1=\{t:\,0<t\leqq x_1\},\\ I_j=\left\{t:\,\sum_{r=1}^{j-1}(x_r+h_r)<t\leqq\sum_{r=1}^{j}x_r\right\}\qquad (j=2,3,\ldots,k),\\ I_{j+k}=\left\{t:\,\sum_{r=1}^{j}x_r<t\leqq\sum_{r=1}^{j}(x_r+h_r)\right\}\qquad (j=1,2,\ldots,k). \end{cases}$$

Die Disjunktion der $2k$ Intervalle I_j wird durch (19) garantiert. Es ist leicht zu sehen, daß die Ungleichungen

$$(21)\qquad x_j<s_{n+j}-s_{n+j-1}\leqq x_j+h_j\qquad (j=1,2,\ldots,k)$$

folgende Ungleichungen implizieren:

$$s_n+\sum_{r=1}^{j}x_r<s_{n+j}\leqq s_n+\sum_{r=1}^{j}(x_r+h_r)\qquad (j=1,2,\ldots,k).$$

Anders gesagt, die Ungleichungen (21) haben zur Folge, daß jedes Intervall s_n+I_{k+1}, s_n+I_{k+2}, …, s_n+I_{2k-1} genau je einen Term von $\{s_n\}$ enthält, das Intervall s_n+I_{2k} wenigstens einen solchen, dagegen keines der Intervalle s_n+I_1, s_n+I_2, …, s_n+I_k solche Terme enthält. Es findet also die Inklusion

$$(22)\quad \bigcap_{j=1}^{k}\{n:\ x_j<s_{n+j-1}\leqq x_j+h_j\}\subset C(I_1,\dots,I_{2k-1};\ 0,\dots,0,\ 1,\dots,1)\setminus C(I_1,\dots,I_{2k};\ 0,\dots,0,\ 1,\dots,1,\ 0)$$

statt, wo die rechts vom Inklusionszeichen stehenden Mengen in (iii) erklärt worden sind, $A\setminus B$ aber die Differenz der Mengen A, B bedeutet.

Nehmen wir nun an, $\{s_n\}$ sei eine in sich Poissonsche Folge. Dann impliziert (22) die Ungleichung

$$(23)\quad \overline{\mathrm{fr}}\bigcap_{j=1}^{k}\{n:\ x_j<s_{n+j}-s_{n+j-1}<x_j+h_j\}\leqq\prod_{j=1}^{k}e^{-|I_j|}\prod_{j=k+1}^{2k-1}e^{-|I_j|}\,|I_j|\,(1-e^{-|I_{2k}|}),$$

wo $\overline{\mathrm{fr}}\,A$, die obere Frequenz von A, durch

$$\overline{\mathrm{fr}}\,A=\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\overline{A\cap\{n:\ 1\leqq n\leqq N\}}$$

erklärt werden soll. Aus (20) und (23) folgt

$$\overline{\mathrm{fr}}\bigcap_{j=1}^{k}\{n:\ x_j<s_{n+j}-s_{n+j-1}\leqq x_j+h_j\}\leqq\prod_{j=1}^{k}e^{-x_j}\Big(\sum_{r=1}^{j}h_r\Big).$$

Daraus erhalten wir für eine genügend feine Teilung,

$$0<u_j\leqq x_j^{(1)}<x_j^{(2)}<\dots<x_j^{(m_j)}=v_j\qquad(j=1,2,\dots,k),$$

$$h_j=x_j^{(r+1)}-x_j^{(r)}\qquad(r=1,2,\dots,m_j-1),$$

die Abschätzung

$$\overline{\mathrm{fr}}\bigcap_{j=1}^{k}\{n:\ u_j<s_{n+j}-s_{n+j-1}\leqq v_j\}\leqq\sum_{l_1=1}^{m_1}\sum_{l_2=1}^{m_2}\cdots\sum_{l_k=1}^{m_k}\prod_{j=1}^{k}e^{-x_j^{(l_j)}}\Big(\sum_{r=1}^{j}h_r\Big),$$

welche für $h_1\to0$ und dann $h_2\to0$, …, $h_k\to0$ die Ungleichung

$$(24)\quad \overline{\mathrm{fr}}\bigcap_{j=1}^{k}\{n:\ u_j<s_{n+j}-s_{n+j-1}\leqq v_j\}\leqq\int_{u_1}^{v_1}\int_{u_2}^{v_2}\cdots\int_{u_k}^{v_k}e^{-\sum_{j=1}^{k}x_j}\,dx_1\,dx_2\dots dx_k=\prod_{j=1}^{k}(e^{-u_j}-e^{-v_j})$$

ergibt. Sei nun $\{a_n\}$ die durch (18) erklärte Folge. Für jedes System

$$0\leqq x_j<y_j<1\qquad(j=1,2,\dots,k)$$

gilt die Gleichung

$$\bigcap_{j=1}^{k}\{n:\ x_j<a_{n+j}\leqq y_j\}=\bigcap_{j=1}^{k}\{n:\ -\log(1-x_j)<s_{n+j}-s_{n+j-1}\leqq-\log(1-y_j)\},$$

welche wegen (24) die Ungleichung

$$\overline{\mathrm{fr}} \bigcap_{j=1}^{k} \{n\colon x_j < a_{n+j} \leq y_j\} \leq \prod_{j=1}^{k} (y_j - x_j)$$

liefert. Daraus folgt aber nach einem Satze von POSTNIKOW ([4], S. 973) die Regularität von $\{a_n\}$. Somit ist das Hinreichen der Bedingung (18) bewiesen.

2. *Die Bedingung* (18) *ist notwendig.*

Setzen wir die Regularität von $\{a_n\}$ voraus. Um zu zeigen, daß $\{s_n\}$ eine Poissonsche Folge ist, genügt es zu beweisen, daß die Bedingung (iii) für alle Systeme $I_1, I_2, \ldots, I_k$ erfüllt ist, bei denen der rechte Endpunkt des Intervalles I_r mit dem linken Endpunkt von I_{r+1} $(r = 1, 2, \ldots, k-1)$ zusammenfällt. Sei nun $\{I_r\}$ ein solches Intervallsystem, und $m_1, m_2, \ldots, m_k$ seien ganz und nichtnegativ. Benutzen wir die Bezeichnungen (9) und (10) und die Formel (11), so erhalten wir

$$\mathrm{fr}\, D(0; m_1, \ldots, m_k) = \prod_{j=1}^{k} e^{-|I_j|} \frac{|I_j|^{m_j}}{m_j!}. \tag{25}$$

Sei $C(I_1, \ldots, I_k; m_1, \ldots, m_k)$ die in (iii) definierte Menge; die Beziehung

$$C(I_1, \ldots, I_k; m_1, \ldots, m_k) = D(0; m_1, \ldots, m_k)$$

ist leicht zu verifizieren. Sie liefert mit (25) die Formel

$$\mathrm{fr}\, C(I_1, \ldots, I_k; m_1, \ldots, m_k) = \prod_{j=1}^{k} e^{-|I_j|} \frac{|I_j|^{m_j}}{m_j!}.$$

Damit ist auch der zweite Teil des Satzes 2 bewiesen.

II.

Es sollen jetzt effektive Beispiele von Poissonschen Prozessen und Poissonschen Folgen gegeben werden.

Eine reguläre Funktionenfolge ist z. B. $\{\vartheta_n(\tau)\}$ $(0 \leq \tau \leq 1)$, wenn man unter $0, \varepsilon_1 \varepsilon_2, \ldots$ die dyadische Entwicklung von τ versteht (für $\tau > 0$ soll es immer diejenige sein, welche unendlich viele Ziffern 1 enthält) und in

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(\tau) &= 0, \varepsilon_1\, \varepsilon_3\, \varepsilon_6\, \varepsilon_{10} \ldots \\
\vartheta_2(\tau) &= 0, \varepsilon_2\, \varepsilon_5\, \varepsilon_9\, \varepsilon_{14} \ldots \\
\vartheta_3(\tau) &= 0, \varepsilon_4\, \varepsilon_8\, \varepsilon_{13} \varepsilon_{19} \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

die Symbole $0, \ldots$ rechts als dyadische Entwicklungen liest (vgl. [7], S. 24—28; [1], IV § 7). Wenn man noch $\vartheta_n^*(\tau) = \vartheta_n(\tau)$ für $\vartheta_n(\tau) < 1$ und $\vartheta_n^*(\tau) = 0$ für $\vartheta_n(\tau) = 1$ setzt, bekommt man eine reguläre Funktionenfolge $\{\vartheta_n^*(\tau)\}$, die der Ungleichung $0 \leq \vartheta_n^*(\tau) < 1$ genügt. Auf Grund des im Teil I unmittelbar vor Satz 1 zitierten Satzes ist dann

$$s_n(\tau) = -\log \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \vartheta_j^*(\tau)\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

der allgemeine Term eines Poissonschen Prozesses $\{s_n(\tau)\}$.

Schreiben wir

$$\alpha_n = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^k}{3^k} \right\rangle \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

wo $\langle x \rangle = x - [x]$ gesetzt werden soll; $[x]$ bedeutet den ganzen Teil von x. Wie KOROBOW ([2], S. 218) gezeigt hat, ist die Zahlenfolge $\{\alpha_n\}$ regulär. Daraus folgt nach unserem Satze 2, daß die durch

$$s_n = -\log \prod_{j=1}^{n} (1 - \alpha_j) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

definierte Folge $\{s_n\}$ eine in sich Poissonsche Folge ist. Wir wissen nicht, ob sie auch eine Poissonsche Folge ist.

Sei c eine in bezug auf irgend eine Basis normale Zahl – wir können z. B. die Zahl c als die absolut-normale Zahl von SIERPIŃSKI definieren [5]. Sei $0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots$ die Entwicklung von c nach einer Basis g ($g \geqq 2$). Von dieser Entwicklung ausgehend hat L. P. STARCZENKO ([6], S. 764) eine Matrix

$$\begin{array}{l} \varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \ldots \\ \varepsilon_1^{(1)}, \ \varepsilon_2^{(1)}, \ldots \\ \varepsilon_1^{(2)}, \ \varepsilon_2^{(2)}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

konstruiert, deren Terme zum Wertevorrat $0, 1, \ldots, g-1$ gehören und deren Zeilen „gleichmäßig normal" sind; dieser Begriff ist in [3] S. 365 definiert. Er hat auch gezeigt, daß die Zahlen β_n deren Entwicklungen nach g durch die Kolonnen derselben Matrix geliefert werden, also

$$\beta_n = 0, \varepsilon_n \varepsilon_n^{(1)} \varepsilon_n^{(2)} \ldots \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

eine reguläre Folge $\{\beta_n\}$ bilden. Zieht man also unseren Satz 2 heran, so bekommt man ein zweites Beispiel einer in sich Poissonschen Folge $\{s_n\}$, indem man

$$s_n = -\log \prod_{j=1}^{n} (1 - \beta_j) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

setzt. Auch hier fehlt die Antwort auf die Frage, ob diese Folge eine Poissonsche ist.

Jetzt wollen wir eine effektive Zahlenfolge konstruieren, die zugleich eine Poissonsche und eine in sich Poissonsche Folge ist.

Unter einer *r-Kette* ($r \geqq 1$) verstehen wir die Gesamtheit der Zahlen $j/2^r$ ($j = 0, 1, \ldots, 2^r - 1$).

Eine *r-Gruppe* entsteht, wenn man nacheinander alle Permutationen der r-Kette anschreibt. Dabei kann man als erste Permutation die Anordnung $j = 0, 1, \ldots, 2^{r-1}$ wählen und dann lexikographisch vorgehen, so daß die Anordnung $j = 2^{r-1}, \ldots, 1, 0$ als letzte erscheint, doch ist auch irgendeine andere wohldefinierte Vorschrift zulässig.

Eine *r-Klasse* entsteht, wenn eine r-Gruppe $(2^{r+1}+1)!$ mal wiederholt wird. Eine solche Klasse besteht also aus $2^r(2^r)!\,(2^{r+1}+1)!$ Termen, welche alle zum Zahlenvorrat $j/2^r$ $(j=0, 1, \ldots, 2^r-1)$ gehören.

Schreibt man nacheinander alle Klassen auf, d. h. zuerst alle Terme der 1-Klasse, dann alle Terme der 2-Klasse, usw., so entsteht eine wohldefinierte unendliche Folge $\{\gamma_n\}$.

Zunächst wollen wir zeigen, daß die Folge $\{\gamma_n\}$ regulär ist.

Es seien $q_1, q_2, \ldots, q_k$ beliebige natürliche Zahlen, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ ganze Zahlen, die den Ungleichungen

$$0 \leqq p_j \leqq 2^{q_j}-1 \qquad (j=1, 2, \ldots, k)$$

genügen.

Bezeichnen wir mit Z_r die Anzahl aller Systeme $\langle \gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots, \gamma_{n+k}\rangle$, die man in derselben r-Gruppe finden kann, derart daß

1. alle Terme $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots, \gamma_{n+k}$ zu derselben Permutation dieser Gruppe gehören,

2. sämtliche Ungleichungen

$$\frac{p_j}{2^{q_j}} \leqq \gamma_{n+j} < \frac{p_j+1}{2^{q_j}} \qquad (j=1, \ldots, k)$$

erfüllt sind.

Ist nun $r > \max\limits_{1\leq j\leq k} q_j$, $2^r > k$, so ist die Anzahl aller Zahlensysteme

$$\left\langle \frac{m_1}{2^r}, \frac{m_2}{2^r}, \ldots, \frac{m_k}{2^r}\right\rangle \qquad (0 \leqq m_j \leqq 2^r-1;\ j=1, 2, \ldots, k),$$

welche den Ungleichungen

$$\frac{p_j}{2^{q_j}} \leqq m_j < \frac{p_j+1}{2^{q_j}} \qquad (j=1, 2, \ldots, k)$$

genügen, $2^{kr-\sum_{j=1}^{k} q_j}$; jedes solche System tritt in $(2^r-k+1)!$ Permutationen der r-Kette auf. Daraus folgern wir

$$Z_r = 2^{kr-\sum_{j=1}^{k} q_j}\cdot(2^r-k+1)! \quad \text{für} \quad r > \max_{1\leq j\leq k} q_j,\ 2^r > k. \tag{26}$$

Δ_r möge die Anzahl aller Systeme $\langle \gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots, \gamma_{n+k}\rangle$ bezeichnen, welche zumindest eine Permutation der r-Kette enthalten, ohne daß alle Terme des Systems in einer einzigen Permutation der r-Kette enthalten seien. Es ist leicht zu sehen, daß für $2^r > k$ die Ungleichung

$$\Delta_r \leqq k\left((2r)!+1\right) \tag{27}$$

besteht.

Mit A_N bezeichnen wir die Anzahl aller Systeme $\langle \gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \ldots, \gamma_{n+k}\rangle$ mit $n \leqq N$ und

$$\frac{p_j}{2^{q_j}} \leqq \gamma_{n+j} < \frac{p_j+1}{2^{q_j}} \qquad (j=1, 2, \ldots, k).$$

Wenn man nun die Zahl N als

$$N = \sum_{r=1}^{m_N-1} 2^r (2^r)! \, (2^{r+1}+1)! + c_N 2^{m_N} (2^{m_N})! + d_N \tag{28}$$

mit

$$0 \leqq c_N < (2^{m_N}+1)!, \qquad 0 \leqq d_N < 2^{m_N} (2^{m_N})! \tag{29}$$

darstellt, so erhalten wir auf Grund der Definitionen von A_N, Z_r und Δ_r die Ungleichung

$$\left| A_N - \sum_{r=1}^{m_N-1} (2^{r+1}+1)! \, Z_r - c_N Z_{m_N} \right| \leqq \sum_{r=1}^{m_N-1} (2^{r+1}+1)! \, \Delta_r + c_N \Delta_{m_N} + d_N .$$

Daraus folgt, wenn man (27), (28) und (29) heranzieht, die Formel

$$A_N = \sum_{r=1}^{m_N-1} (2^{r+1}+1)! \, Z_r + c_N Z_{m_N} + o(N),$$

welche angesichts von (26) und (28) die Abschätzung

$$A_N = \sum_{r=1}^{m_N-1} 2^{kr - \sum_{j=1}^{k} q_j} (2^r - k + 1)! \, (2^{r+1}+1)! + c_N \, 2^{k m_N - \sum_{j=1}^{k} q_j} (2^{m_N} - k + 1)! + $$

$$+ o(N) = 2^{-\sum_{j=1}^{k} q_j} N + o(N)$$

liefert.

Damit haben wir aber die Existenz der Frequenz

$$\mathrm{fr} \bigcap_{j=1}^{k} \left\{ n : \frac{p_j}{2^{q_j}} \leqq \gamma_{n+j} < \frac{p_j + 1}{2^{q_j}} \right\} = 2^{-\sum_{j=1}^{k} q_j}$$

festgestellt. Die Beziehung

$$\mathrm{fr} \bigcap_{j=1}^{k} \{ n : \gamma_{n+j} < x_j \} = \prod_{j=1}^{k} x_j$$

folgt daraus unmittelbar für alle Systeme $x_1, x_2, \ldots, x_k \, (0 \leqq x_j \leqq 1 \, ; j = 1, 2, \ldots, k)$. Die Regularität von $\{\gamma_n\}$ ist also bewiesen.

Unter Benutzung von (28) kann man schreiben

$$\prod_{n=1}^{N-d_N} (1 - \gamma_n) = \prod_{r=1}^{m_N-1} \left(\prod_{j=0}^{2^r-1} \left(1 - \frac{j}{2^r}\right)^{(2^{r+1}+1)! \, (2^r)!} \right) \prod_{j=0}^{2^{m_N}-1} \left(1 - \frac{j}{2^{m_N}}\right)^{c_N (2^{m_N})!}$$

$$= \left(2^{m_N}! / (2^{m_N})^{2^{m_N}}\right)^{c_N (2^{m_N})!} \cdot \prod_{r=1}^{m_N-1} \left[(2^r)! / (2^r)^{2^r} \right]^{(2^{r+1}+1)! \, (2^r)!} .$$

Die Stirlingsche Formel, (28) und (29) liefern dann

$$\sqrt[N]{\prod_{n=1}^{N-d_N} (1 - \gamma_n)} = \left(\sqrt{2\pi \cdot 2^{m_N}}\right) \frac{c_N (2^{m_N})!}{N} \cdot \prod_{r=1}^{m_N-1} \left(\sqrt{2\pi \cdot 2^r}\right) \frac{(2^{r+1}+1)! \, (2^r)!}{N} \times \tag{30}$$

$$\times \exp\left(- \frac{1}{N} \prod_{r=1}^{m_N-1} 2^r (2^{r+1}+1)! \, (2^r)! - \frac{1}{N} c_N 2^{m_N} (2^{m_N})! \right) +$$

$$+ o(N) = e^{-1} + o(N).$$

Da kein Term der m_N-Klasse die Zahl $1 - 1/2^{m_N}$ übertrifft, gelten die Ungleichungen

$$1 \geqq \prod_{n=N-d_N+1}^{N} (1-\gamma_n) \geqq \left(\frac{1}{2^{m_N}}\right)^{d_N} \geqq \left(\frac{1}{2^{m_N}}\right)^{2^{m_N}(2^{m_N})!};$$

mit (28) und (29) ergeben sie die Abschätzung

$$1 \geqq \sqrt[N]{\prod_{n=N-d_N+1}^{N} (1-\gamma_n)} \geqq \left(\frac{1}{2^{m_N}}\right)^{\frac{2^{m_N}(2^{m_N})!}{N}} \geqq \left(\frac{1}{2^{m_N}}\right)^{\frac{2^{m_N}(2^{m_N})!}{2^{m_N-1}(2^{m_N}+1)!\,(2^{m_N-1})!}}$$

$$\geqq \left(\frac{1}{2^{m_N}}\right)^{\frac{1}{2^{m_N}}} = 1 + o(N),$$

welche mit (30) die Gleichung

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{\prod_{n=1}^{N} (1-\gamma_n)} = e^{-1}$$

impliziert.

Wir haben bereits die Regularität der Folge $\{\gamma_n\}$ bewiesen. Die Sätze 1 und 2 zeigen also, daß die durch

$$s_n = -\log \prod_{j=1}^{n} (1-\gamma_j) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

erklärte Folge $\{s_n\}$ zugleich eine Poissonsche und eine in sich Poissonsche Folge ist.

III.

Wir haben jetzt die Beziehungen zu untersuchen, welche die Begriffe des Poissonschen Prozesses, der Poissonschen Folge und der in sich Poissonschen Folge verbinden.

Zunächst bemerken wir, daß aus dem Birkhoffschen Ergodensatz folgt:

Ist $\{s_n(\tau)\}$ ein Poissonscher Prozeß, so ist für fast alle τ_0 die numerische Folge $\{s_n(\tau_0)\}$ eine Poissonsche Folge.

Ist $\{s_n(\tau)\}$ ein Poissonscher Prozeß, so ist für fast alle τ_0 die numerische Folge $\{s_n(\tau_0)\}$ eine in sich Poissonsche Folge (vgl. [9], S. 336).

Es entsteht die Frage, ob die Umkehrungen dieser Aussagen richtig sind. M. a. W.: Ist es wahr, daß eine Folge $\{s_n(\tau)\}$, welche für fast alle τ_0 eine Poissonsche oder eine in sich Poissonsche ist, notwendig ein Poissonscher Prozeß ist? Die Antwort ist negativ, weil die numerischen Folgen ihren Poissonschen bzw. in sich Poissonschen Charakter durch die Änderung endlich vieler Terme nicht einbüßen, ein Poissonscher Prozeß aber nach einer solchen Modifikation aufhören kann ein solcher zu sein. Wir werden aber zeigen, daß gewisse Zusatzbedingungen über Signalprozesse zu einer positiven Antwort führen.

Ein Signalprozeß $\{s_n(\tau)\}$ heißt *homogen*, wenn stets für beliebige punktfremde Intervalle $I_1, I_2, \ldots, I_k$ und beliebige nichtnegative ganze Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_k$ die Gleichheit

$$|A(t+I_1, \ldots, t+I_k;\ m_1, \ldots, m_k)| = |A(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k)|$$

für alle positiven reellen t gilt; dabei ist die Bedeutung der Symbole in I (i) und in sechs vor I (i) stehenden Zeilen zu finden. Ein Signalprozeß $\{s_n(\tau)\}$ heißt *stationär*, wenn für punktfremde I_j und nichtnegative ganze m_j ($j=1, 2, \ldots, k$) die Gleichheit

$$|A(s_r(\tau)+I_1, \ldots, s_r(\tau)+I_k;\ m_1, \ldots, m_k)| = |A(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k)|$$

für alle natürliche r gilt.

SATZ 3. *Der Signalprozeß $\{s_n(\tau)\}$ sei homogen und die numerische Folge $\{s_n(\tau_0)\}$ für fast alle τ_0 eine Poissonsche. Dann ist $\{s_n(\tau)\}$ ein Poissonscher Prozeß.*

Beweis. Sei $\chi_t(\tau)$ die im Sinne der Mengenlehre charakteristische Funktion der Menge $A(t+I_1, \ldots, t+I_k;\ m_1, \ldots, m_k)$; d. h. $\chi_t(\tau)=1$ für $\tau \in A$, $\chi_t(\tau)=0$ für τ non $\in A$.

Es werde die Menge der t, für welche genau $m_1, m_2, \ldots, m_k$ Terme der Folge $\{s_n(\tau_0)\}$ in die respektiven Intervalle $t+I_1$, $t+I_2, \ldots, t+I_k$ fallen, mit $B_{\tau_0}(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k)$ bezeichnet. Es ist dann leicht die Formel

$$B_{\tau_0}(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k) = \{t:\ \chi_t(\tau_0)=1\}$$

nachzuprüfen. Aus ihr ergibt sich die Beziehung

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_t(\tau_0)\, dt = |B_{\tau_0}(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k)|_R = \prod_{j=1}^{k} e^{-|I_j|} \frac{|I_j|^{m_j}}{m_j!}$$

für fast alle τ_0, da $\{s_n(\tau_0)\}$ für fast alle τ_0 eine Poissonsche Folge ist. Daraus folgt aber angesichts der Homogenität des Prozesses $\{s_n(\tau)\}$ und der Beschränktheit der Funktion $\chi_t(\tau)$ die Schlußkette

$$|A(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k)| = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |A(t+I_1, \ldots, t+I_k;\ m_1, \ldots, m_k)|\, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^1 \chi_t(\tau)\, d\tau\, dt = \int_0^1 \left(\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_t(\tau)\, dt \right) d\tau = \prod_{j=1}^{k} e^{-|I_j|} \frac{|I_j|^{m_j}}{m_j!}.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

SATZ 4. *Der Signalprozeß $\{s_n(\tau)\}$ sei stationär und liefere für jedes τ eine in sich Poissonsche Folge. Dann ist $\{s_n(\tau)\}$ ein Poissonscher Prozeß.*

Beweis. Es seien $I_1, I_2, \ldots, I_k$ disjunkte Intervalle und $m_1, m_2, \ldots, m_k$ nichtnegative ganze Zahlen. Mit $C_{\tau_0}(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k)$ bezeichnen wir die Menge aller n, für welche in den respektiven Intervallen $s_n(\tau_0)+I_1$, $s_n(\tau_0)+I_2, \ldots, s_n(\tau_0)+I_k$ genau $m_1, m_2, \ldots, m_k$ Terme der Folge $\{s_n(\tau_0)\}$ vorkommen. Unter Benutzung der im Beweise des Satzes 3 eingeführten Bezeichnungen erhalten wir die Formel

$$C_{\tau_0}(I_1, \ldots, I_k;\ m_1, \ldots, m_k) = \{n:\ \chi_{s_n(\tau_0)}(\tau_0)=1\},$$

welche für fast alle τ_0 die Beziehung

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{s_n(\tau_0)}(\tau_0)=\mathrm{fr}\,C_{\tau_0}(I_1,\ldots,I_k;\,m_1,\ldots,m_k)=\prod_{j=1}^{k}e^{-|I_j|}\frac{|I_j|^{m_j}}{m_j!}$$

impliziert, weil $\{s_n(\tau_0)\}$ für fast alle τ_0 eine in sich Poissonsche Folge darstellt. Dieses Ergebnis führt, wenn der stationäre Charakter des Prozesses $\{s_n(\tau)\}$ und die Beschränktheit der Funktion $\chi_{s_n(\tau)}(\tau)$ herangezogen werden, zur Schlußkette

$$\begin{aligned}&|A(I_1,\ldots,I_k;\,m_1,\ldots,m_k)|\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}|A(s_n(\tau)+I_1,\ldots,s_n(\tau)+I_k;\,m_1,\ldots,m_k)|\\&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_0^1\chi_{s_n(\tau)}(\tau)\,d\tau=\int_0^1\Big(\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\chi_{s_n(\tau)}(\tau)\Big)\,d\tau=\prod_{j=1}^{k}e^{-|I_j|}\frac{|I_j|^{m_j}}{m_j!}.\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Jetzt soll gezeigt werden, daß eine Poissonsche Folge nicht eine in sich Poissonsche Folge zu sein braucht, und daß eine in sich Poissonsche Folge ebensowenig eine Poissonsche sein muß.

(a) Sei $\{s_n\}$ eine Poissonsche Folge. Wir wählen eine Teilfolge $n_1<n_2<\cdots$ der natürlichen Folge derart, daß die Bedingungen

$$s_{n_k}<s_{n_k+1}\qquad(k=1,2,\ldots),$$

$$\Big|\bigcup_{k=1}^{\infty}\{t:\,s_{n_k}<t\leqq s_{n_k+1}\}\Big|_R=0 \tag{31}$$

erfüllt seien. Die natürlichen Zahlen q_k unterwerfen wir den Bedingungen

$$\frac{s_{n_k+1}}{q_k}<\frac{1}{k}\qquad(k=1,2,\ldots), \tag{32}$$

$$q_k<q_{k+1}\qquad(k=1,2,\ldots), \tag{33}$$

$$q_1>n_1,\qquad q_k>n_k-n_{k-1}\qquad(k=2,3,\ldots) \tag{34}$$

und setzen

$$u_j^{(k)}=\Big(1-\frac{j}{q_k}\Big)s_{n_k}+\frac{j}{q_k}s_{n_k+1}\qquad(j=1,2,\ldots,q_k-1;\;k=1,2,\ldots).$$

Mit $\{s_n^*\}$ bezeichnen wir die aus den wachsend geordneten Zahlen s_n, $u_j^{(k)}$ bestehende Folge ($n=1,2,\ldots;\;k=1,2,\ldots;\;j=1,2,\ldots,q_k-1$):

$$s_1^*=s_1,\ldots,s_{n_1}^*=s_{n_1},s_{n_1+1}^*=u_1^{(1)},\ldots,s_{n_1+q_1-1}^*=u_{q_1-1}^{(1)},\ldots,s_{n_k+q_1+\cdots+q_k}^*=s_{n_k+1},\ldots.$$

Die Folge $\{s_n^*\}$ ist immer noch eine Poissonsche; es ist nämlich für jedes Intervall I die Menge jener t, für welche $t+I$ die Signale $\{u_j^{(k)}\}$ $(j=1,2,\ldots,q_k-1;$

$k=1, 2, \ldots$) enthält, eine Teilmenge von

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \{t: s_{n_k} - |I| < t \leqq s_{n_k+1} + |I|\},$$

letztere hat aber nach (31) Null als relatives Maß. Jetzt wollen wir zeigen, daß $\{s_n^*\}$ keine in sich Poissonsche Folge ist.

Mit $C(I)$ soll die Menge derjenigen n bezeichnet werden, für welche das Intervall $s_n^* + I$ mindestens einen Term der Folge $\{s_n^*\}$ enthält. Es werde auch die Bezeichnung $C_N(I)$ für $C(I) \cap \{n: 1 \leqq n \leqq N\}$ eingeführt. Hat die natürliche Zahl N die Gestalt

$$N = n_k + q_1 + q_2 + \cdots + q_k \qquad (k = 1, 2, \ldots), \tag{35}$$

dann findet man unter den N ersten Termen s_n^* alle Terme s_{n_r}, $u_j^{(r)}$ $(j=1, 2, \ldots, q_r - 1;\ r=1, 2, \ldots, k)$. Ist $|I| > 1/q_r$, so enthält jedes Intervall $s_{n_r} + I$, $u_j^{(r)} + I$ $(j=1, 2, \ldots, q_r - 1)$ mindestens ein Signal. Hieraus ergibt sich mit (33) die Ungleichung

$$\overline{\overline{C_N(I)}} \geqq \sum_{r=r_0}^{k} q_r, \tag{36}$$

wo r_0 der kleinste Index r mit $|I| > 1/q_r$ ist. Aus (34) und (35) folgt die Ungleichung

$$N \leqq 2(q_1 + q_2 + \cdots + q_k),$$

welche mit (36) die Abschätzung

$$\overline{\overline{C_N(I)}} \geqq \tfrac{1}{2} N + o(N)$$

für alle N von der Gestalt (35) impliziert. Daher gilt

$$\overline{\mathrm{fr}}\, C(I) = \limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \overline{\overline{C_N(I)}} \geqq \frac{1}{2}$$

für jedes I. Daraus schließt man aber, daß $\{s_n^*\}$ keine in sich Poissonsche Folge sein kann, da für solche Folgen die Beziehung

$$\mathrm{fr}\, C(I) = 1 - e^{-|I|}$$

besteht.

Die Folge $\{s_n^*\}$ erfüllt auch nicht die Voraussetzungen des Satzes 1: nach Satz 2 ist nämlich die durch die Formel

$$s_n^* = -\log \prod_{j=1}^{n} (1 - a_j^*) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

erklärte Folge $\{a_n^*\}$ nicht regulär. Die Voraussetzung (7) des Satzes 1 ist auch nicht erfüllt. Es folgt nämlich aus $s^*_{n_k+q_1+\cdots+q_k} = s_{n_k+1}$ und aus (32) die Ungleichung

$$\frac{s^*_{n_k+q_1+\cdots+q_k}}{n_k+q_1+\cdots+q_k} \leqq \frac{s_{n_k+1}}{q_k} < \frac{1}{k} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

also

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{s_N^*}{N} = 0,$$

was angesichts von

$$\sqrt[N]{\prod_{n=1}^{N}(1-a_N^*)} = e^{-\frac{s_N^*}{N}}$$

die Beziehung

$$\limsup_{N\to\infty} \sqrt[N]{\prod_{n=1}^{N}(1-a_n^*)} = 1$$

liefert.

(b) Sei $\{s_n\}$ eine in sich Poissonsche Folge. Wir bestimmen die Indizes $n_1 < n_2 < \cdots$ derart, daß

$$s_{n_{k+1}} > k^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{37}$$

und

$$\lim_{k\to\infty} (s_{n_k+1} - s_{n_k}) = \infty \tag{38}$$

sei. Wir setzen

$$\tilde{s}_n = s_n \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots, n_1$$

und

$$\tilde{s}_n = \sum_{r=1}^{k} s_{n_r} + s_n \quad \text{für} \quad n = n_k + 1, \ldots, n_{k+1}; \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{39}$$

Damit haben wir eine in sich Poissonsche Folge $\{\tilde{s}_n\}$ erklärt. Dies ergibt sich daraus, daß für jedes Intervall I und jedes $n \geqq n_{k_0}$ (wo k_0 das kleinste k ist, für welches $s_{n_k+1} - s_{n_k} > |I|$ gilt) der Term $\tilde{s}_r$ dann und nur dann zu $\tilde{s}_n + I$ gehört, wenn s_r zu $s_n + I$ gehört.

Sei $B(I;0)$ die Menge solcher t, für welche in $t+I$ keine Terme der Folge $\{\tilde{s}_n\}$ vorkommen. Sei r_0 eine natürliche Zahl und $r_0 \geqq |\overline{I}|$. Dann ergeben (37) und (39) die Ungleichung

$$\tilde{s}_{n_k+1} - \tilde{s}_{n_k} = s_{n_k+1} > k^2 \geqq r_0^2 \geqq |I| \qquad (k \geqq r_0), \tag{40}$$

welche die Inklusion

$$B(I;0) \cap \{t: 0 \leqq t \leqq \tilde{s}_{n_k+1}\} \supset \bigcup_{r=r_0}^{k} \{t: s_{n_r} < t < s_{n_r+1} - |I|\} \qquad (k \geqq r_0)$$

nach sich zieht. Daraus und aus (40) folgt die Ungleichung

$$|B(I;0) \cap \{t: 0 \leqq t \leqq \tilde{s}_{n_k+1}\}| \geqq \sum_{r=r_0}^{k} s_{n_r+1} - k|I| \qquad (k = r_0). \tag{41}$$

(37) und (39) führen zu den Ungleichungen

$$\tilde{s}_{n_k+1} = \sum_{r=1}^{k} s_{n_r} + s_{n_k+1} \leqq 2\sum_{r=1}^{k} s_{n_r+1}, \ \tilde{s}_{n_k+1} \geqq s_{n_k+1} > k^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

welche mit (41) die Abschätzung

$$|B(I;0)\cap\{t\colon 0\leqq t\leqq \tilde{s}_{n_k+1}\}|\geqq \tfrac{1}{2}\tilde{s}_{n_k+1}-|I|\sqrt{\tilde{s}_{n_k+1}}-\sum_{r=1}^{r_0}\tilde{s}_{n_r+1}\qquad (k\geqq r_0)$$

ergeben. Es ist also

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\,|B(I;0)\cap\{t\colon 0\leqq t\leqq T\}|\geqq\frac{1}{2}$$

für jedes I. Daraus folgt aber, daß $\{\tilde{s}_n\}$ keine Poissonsche Folge ist, denn für derartige Folgen besteht die Beziehung

$$|B(I;0)|_R=e^{-|I|}.$$

IV.

Dieser Teil bringt gewisse hinreichende Bedingungen dafür, daß eine Signalfolge eine in sich Poissonsche Folge sei.

Eine Zahlenfolge $\{c_n\}$ nennen wir *unabhängig*, wenn für beliebige Systeme reeller Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_k$ die Gleichheit

$$\operatorname{fr}\bigcap_{j=1}^{k}\{n\colon c_{n+j}<x_j\}=\prod_{j=1}^{k}\operatorname{fr}\{n\colon c_{n+j}<x_j\}$$

besteht, und die Funktion

$$F(x)=\operatorname{fr}\{n\colon c_n<x\}$$

eine Verteilungsfunktion ist, das heißt eine nichtabnehmende, linksseitig stetige Funktion mit

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\qquad \lim_{x\to\infty}F(x)=1.$$

Es sei $\{s_n\}$ eine Signalfolge, I ein Intervall. Die Anzahl der in das Intervall s_n+I fallenden Terme der Folge $\{s_n\}$ werde mit $Z_n(I)$ bezeichnet. Für jedes natürliche m werde $Z_n(I,m)$ durch

$$Z_n(I,m)=Z_n(I),\quad \text{wenn } Z_n(I)>m$$
$$Z_n(I,m)=0,\quad \text{wenn } Z_n(I)\leqq m,$$

erklärt.

Die Signalfolge $\{s_n\}$ nennen wir *zerstreut*, wenn man einem jeden Intervall I und jedem positiven ε ein natürliches m mit

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}Z_n(I,m)<\varepsilon$$

zuordnen kann.

Wir sagen, eine Signalfolge $\{s_n\}$ *messe* Intervalle, wenn die Beziehung

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}Z_n(I)=|I|$$

für jedes Intervall I statthat.

SATZ 5. *Die Signalfolge $\{s_n\}$ sei zerstreut und messe Intervalle; die Folge $\{s_{n+1}-s_n\}$ sei unabhängig. Dann ist $\{s_n\}$ eine in sich Poissonsche Folge.*

Beweis. Führen wir die Bezeichnungen

$$c_1 = s_1, \qquad c_n = s_n - s_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{42}$$

$$\mathrm{fr}\{n\colon c_n < x\} = F(x). \tag{43}$$

ein. Aus $s_{n+1} \geqq s_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ folgt $F(0) = 0$. Aus der Unabhängigkeit von $\{c_n\}$ erhält man für $x > 0$

$$\mathrm{fr}\left\{n\colon \sum_{j=1}^{r} c_{n+j} < x,\ \sum_{j=1}^{r+1} c_{n+j} \geqq x\right\} = F_r(x) - F_{r+1}(x), \tag{44}$$

wo

$$F_1(x) = F(x), \qquad F_{r+1}(x) = \int_0^x F_r(x-u)\,dF(u) \qquad (r = 1, 2, \ldots). \tag{45}$$

Es sei $I_0 = \{t\colon 0 < t \leqq x\}$. Folgende Beziehungen sind leicht nachzuprüfen:

$$\sum_{n=1}^{N} Z_n(I_0) = \sum_{r=1}^{\infty} r\left\{n\colon \sum_{j=1}^{r} c_{n+j} < x,\ \sum_{j=1}^{r+1} c_{n+j} \geqq x,\ n \leqq N\right\}, \tag{46}$$

$$\sum_{n=1}^{N} Z_n(I_0, m) = \sum_{r=m+1}^{\infty} r\left\{n\colon \sum_{j=1}^{r} c_{n+j} < x,\ \sum_{j=1}^{r+1} c_{n+j} \geqq x,\ n \leqq N\right\}. \tag{47}$$

Die Folge $\{s_n\}$ ist laut Voraussetzung zerstreut. Es existiert also für jedes $\varepsilon > 0$ ein natürliches m_0 derart, daß

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n(I_0, m_0) < \varepsilon.$$

Die Folge $\{s_n\}$ mißt aber Intervalle. Es ist daher

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} Z_n(I_0) = x.$$

Daraus und aus (44), (46) und (47) erhalten wir die Ungleichung

$$x - \sum_{r=1}^{m_0} r\left(F_r(x) - F_{r+1}(x)\right) < \varepsilon,$$

welche für alle positiven ε gilt und demzufolge zu

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{r=1}^{n} F_r(x) - n F_{n+1}(x)\right) = \sum_{r=1}^{\infty} r\left(F_r(x) - F_{r+1}(x)\right) = x \tag{48}$$

für $x \geqq 0$ führt. Es ist also

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{r=1}^{n} \int_0^x \left(1 - F(x-u)\right) dF_r(u) - n \int_0^x \left(1 - F(x-u)\right) dF_{n+1}(u)\right) = \int_0^x \left(1 - F(x-u)\right) du$$

für $x \geqq 0$. Die Bezeichnungen (45) gestatten diese Beziehung folgendermaßen auszudrücken:

$$(49)\quad F(x) + \lim_{n\to\infty}\left(n F_{n+2}(x) - (n+1) F_{n+1}(x)\right) = x - \int_0^x F(u)\,du \quad \text{für} \quad x \geqq 0.$$

Nun existiert für $x>0$ ein natürliches r_0 mit

$$(50)\qquad F_{r_0}(x) < 1.$$

In der Tat, sollte für $r=1, 2, \ldots$ stets $F_r(x)=1$ sein, so hätten wir auf Grund von (48) $x=0$. Aus (45) folgt unmittelbar

$$F_n(x) \leqq \left(F(x)\right)^{[n/r_0]} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

woraus mit Hilfe von (50) die Formel

$$\lim_{n\to\infty}\left(n F_{n+2}(x) - (n+1) F_{n+1}(x)\right) = 0 \quad \text{für} \quad x \geqq 0$$

gewonnen wird. Zieht man jetzt (49) heran, so sieht man, daß $F(x)$ die Integralgleichung

$$F(x) = x - \int_0^x F(u)\,du \qquad (x \geqq 0)$$

befriedigt, welche

$$(51)\qquad F(x) = 1 - e^{-x} \qquad (x \geqq 0)$$

als einzige Lösung besitzt.

Schreiben wir nun

$$(52)\qquad a_n = 1 - e^{-c_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_k$ reelle Zahlen mit $0 \leqq x_j < 1$ $(j=1, 2, \ldots, k)$. Aus der Beziehung

$$\bigcap_{j=1}^{k}\{n\colon a_{n+j} < x_j\} = \bigcap_{j=1}^{k}\{n\colon c_{n+j} < -\log(1-x_j)\},$$

aus der Unabhängigkeit der Folge $\{c_n\}$ und aus (43) mit (51) gewinnen wir die Existenz der Frequenz

$$\operatorname{fr}\bigcap_{j=1}^{k}\{n\colon a_{n+j} < x_j\} = \prod_{j=1}^{k} x_j.$$

Damit ist die Regularität der Folge $\{a_n\}$ erwiesen. Aus (42) mit (52) bekommen wir

$$s_n = -\log\prod_{j=1}^{n}(1-a_j) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

woraus durch Anwendung des Satzes 2 die Behauptung des Satzes 5 folgt.

Literatur

[1] Kaczmarz, S., u. H. Steinhaus: Theorie der Orthogonalreihen. Warszawa und Lwów 1935. — [2] Korobow, N. M.: Über einige Fragen der Gleichverteilung. [Russisch.] Izwestija Akad. Nauk SSSR., ser. mat. **14**, 215—238 (1950). — [3] Korobow, N. M.: Zahlen mit beschränkten Quotienten und deren Anwendungen auf das Problem der diophantischen Approximation. [Russisch.] Izwestija Akad. Nauk SSSR., ser. mat. **19**, 361—380 (1955). — [4] Postnikow, A. G.: Ein Kriterium für perfekt gleichverteilte Folgen. [Russisch.] Doklady Akad. Nauk SSSR. **120**, 973—976 (1958). — [5] Sierpiński, W.: Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre. Bull. Soc. Math. France **45**, 125—132 (1917). — [6] Starczenko, L. P.: Konstruktion von Folgen, die mit einer gegebenen normal sind. [Russisch.] Izwestija Akad. Nauk SSSR., ser. mat. **22**, 757—770 (1958). — [7] Steinhaus, H.: Sur la probabilité de la convergence de séries. Studia Math. **2**, 21—39 (1930). — [8] Steinhaus, H.: Sur la courve péanienne de W. Sierpiński. Commentarii Math. Helvetici **9**, 166—169 (1936/37). — [9] Urbanik, K.: Effective processes in the sense of H. Steinhaus. Studia Math. **17**, 335—348 (1958).

Mathematisches Institut der Polnischen Akademie der Wissenschaften, Warschau (Polen)

(Eingegangen am 23. März 1959)

MORREY jr., C. B.
Math. Zeitschr. 72, 146–164 (1959)

Second Order Elliptic Equations in Several Variables and Hölder Continuity

In memoriam LEON LICHTENSTEIN

By

CHARLES B. MORREY jr.

1. *Introduction.* In this paper, we discuss the Hölder continuity of the solutions of equations of the form

$$(1.1)\quad \int_G [v_{,\alpha}\,(a^{\alpha\beta}u_{,\beta}+b^{\alpha}u+c^{\alpha})+v\,(c^{\alpha}u_{,\alpha}+d\,u+f)]\,dx=0 \quad \text{for all } v\in H^1_{2,0}$$

on G where we assume that the $a^{\alpha\beta}$ are bounded and measurable and satisfy the uniform ellipticity condition (2.3), the coefficients b^{α} and $c^{\alpha}\in L_{2p}$ and $d\in L_p$ for some $p>\nu/2$ (ν being the number of variables x), the $e^{\alpha}\in L_2$ and $f\in L_1$, and e and f satisfy certain integral growth conditions (see §§ 3, 4). In the equations (1.1), the tensor summation convention is assumed, as will be done throughout, the Greek letters running from 1 to ν; the subscripts after the commas denote differentiation.

In 1938, the writer [6] studied the solutions of (1.1) in the case where $\nu=2$ and the coefficients b^{α}, c^{α}, d and f were zero and showed that they were Hölder continuous on the interior provided that the e^{α} satisfied the corresponding integral growth condition; some results concerning boundary behavior were also obtained. Later [7], the writer generalized the results for the interior to systems of equations of the type (1.1) in which all the terms were present but ν still was 2; the restrictions on the b^{α}, c^{α}, and d made in that work were somewhat weaker than those made in this paper. The motivation for the study of equations with such general coefficients was that of proving certain differentiability properties of the solutions of a class of variational problems.

The methods used by the writer in this work were peculiar to the case $\nu=2$ and neither he nor anyone else was able to generalize the results to cases where $\nu>2$ (except in some special cases) until DE GIORGI [2, 3] and NASH [10, 11] concurrently and independently showed that "a-harmonic" functions in any number of variables are Hölder continuous on compact subsets of their domains of definition; a function is *a-harmonic* on a domain G if and only if it is in H^1_2 and satisfies $I_0(u, v; E)=0$ (see (2.7)) for each domain E with $\bar{E}$ compact and $E\subset G$ and each $v\in H^1_{2,0}$ on E. The methods of NASH and DE GIORGI are completely unrelated- Nash obtained his results as a by-product of his work on parabolic equations, whereas DE GIORGI's method involves only elliptic equations. Nash confined himself to bounded solutions,

whereas DE GIORGI allowed solutions merely in L_2; since functions in H_2^1 are not necessarily bounded, the starting point for our investigations is the paper of DE GIORGI [3] which we discuss in § 2.

Very recently, STAMPACCHIA [13] studied equations of the type (1.1) in which the $b^\alpha \equiv 0$, the c^α and d are bounded, and $d(x) \geqq 0$. He showed that the solutions in $H_{2,0}^1$ or those satisfying the "homogeneous Neumann" boundary conditions or even certain mixed boundary conditions are bounded on G, provided that G is of his "type S", i.e. if ∂G satisfies an interior "strong cone" condition. In this paper, we show, first of all, that the eigenvalue problem for equations (1.1) has discrete eigenvalues with the usual Fredholm alternative holding for any given parameter value (see Theorem 4.1), provided G is bounded and then that the solutions u are Hölder-continuous on compact subsets of G if e and f satisfy proper integral growth conditions (see §§ 3, 4). In case G is of type $S^*(\alpha, a)$ (see § 5) and e and f satisfy proper growth conditions across ∂G, then the solutions u in $H_{2,0}^1$ (see below) are Hölder-continuous on $\overline{G}$ and vanish in the ordinary sense on ∂G; the same result holds if G is a Lipschitz domain (see § 5). Thus our results are generalizations of those of NASH and DE GIORGI and are partial generalizations of those of STAMPACCHIA. It is interesting that the domains of class $S^*(\alpha, a)$ are identical with the types of domains for which NASH ([11] appendix) proved the Hölder continuity of a-harmonic functions on G, assuming that the given boundary values are Hölder-continuous.

We now introduce our notations: If G is a domain, ∂G denotes its boundary. $B(x_0, r)$ denotes the ν-ball with the center at x_0 and radius r. If S is a set in ν-space, $|S|$ denotes its ν-measure; however, occasionally we consider subsets S of $\Sigma = \partial B(0, 1)$ in which case $|S|$ means its $(\nu-1)$-measure. We define $\gamma_\nu = |B(0,1)|$, $\Gamma_\nu = |\partial B(0,1)|$; clearly $\Gamma_\nu = \nu\gamma_\nu$. If u is a function (or vector function), ∇u denotes its gradient, $\nabla^2 u$ denotes its second gradient $u_{,\alpha\beta}$, etc. If φ is any function, vector, or tensor, $|\varphi|$ denotes its length (the square root of the sum of the squares of its components). All integrals are Lebesgue integrals. The spaces L_p over some set have their usual meaning. The space H_2^1 over the domain G is the closure of the space of C' functions on G according to the norm

$$(|u|_p^1)^p = \int_G [|u|^2 + |\nabla u|^2]^{p/2}\, dx.$$

The space $H_{p,0}^1$ is the subspace of H_p^1 obtained by closing the space of functions of class C' having compact support interior to G. For such functions, we define a topologically equivalent norm

$$(|u|_{p,0}^1)^p = \int_G |\nabla u|^p\, dx.$$

If $p = 2$, the spaces H_2^1 and $H_{2,0}^1$ are Hilbert spaces and

$$(u, v)_2^1 = \int_G (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx, \qquad (u, v)_{2,0}^1 = \int_G \nabla u \cdot \nabla v\, dx.$$

We define

$$D(u, G) = \int_G |\nabla u|^2 dx, \qquad d(u, G) = [D(u, G)]^{1/2}.$$

There are many results which are inequalities involving a constant which may depend on various other constants; we denote all these constants by C but do not assume that all these constants are the same.

2. *The De Giorgi lemmas and theorems; a-harmonic functions.* In this section, we quote the lemmas and relevant theorems of DE GIORGI, which are proved in [3], and then prove important Dirichlet growth theorems for a-harmonic functions and H_2^1 functions in general. We begin with DE GIORGI's definition of his $\mathfrak{B}(E;\gamma)$ classes:

DEFINITION. Suppose E is a domain and $\gamma>0$. A function $u\in\mathfrak{B}(E;\gamma)$ if and only if $u\in L_2$ on E, $u\in H_2^1$ on domains D with $\overline{D}$ compact and $D\subset E$, and if

$$\int_{A(k)\cap B(x_0,\varrho_1)}|\nabla u|^2\,dx\leqq\frac{\gamma}{(\varrho_2-\varrho_1)^2}\int_{A(k)\cap B(x_0,\varrho_2)}[u(x)-k]^2\,dx$$

$$\int_{B(k)\cap B(x_0,\varrho_1)}|\nabla u|^2\,dx\leqq\frac{\gamma}{(\varrho_2-\varrho_1)^2}\int_{B(k)\cap B(x_0,\varrho_2)}[u(x)-k]^2\,dx$$

for all k, x_0, ϱ_1, and ϱ_2 for which $0<\varrho_1<\varrho_2$ and $B(x_0,\varrho_2)\subset E$; here $A(k)$ is the set where $u(x)>k$ and $B(k)$ is the set where $u(x)<k$.

LEMMA I. *Each class $\mathfrak{B}(E;\gamma)$ is closed with respect to strong convergence in L_2.*

LEMMA II. *There is a constant $\beta_1(\nu)>0$ such that*

$$\beta_1\int_{A(k;\varrho)-A(\lambda;\varrho)}|\nabla u|\,dx\geqq(\lambda-k)\,[\tau(k,\lambda;\varrho)]^{(\nu-1)/\nu}\tag{2.1}$$

whenever $u\in H_2^1$ on $B(x_0,\varrho)$ and $\lambda>k$. Here $\tau(k,\lambda;\varrho)$ indicates the smaller of $|A(\lambda;\varrho)|$ and $|B(x_0,\varrho)-A(k;\varrho)|$ and $A(k;\varrho)=A(k)\cap B(x_0;\varrho)$, etc.

LEMMA III. *There is a constant $\beta_2(\nu)>0$ such that*

$$\int_{A(k;\varrho)}[u(x)-k]^2\,dx\leqq\beta_2|A(k;\varrho)|^{2/\nu}\int_{A(k;\varrho)}|\nabla u|^2\,dx\tag{2.2}$$

whenever $u\in H_2^1$ on $B(x_0,\varrho)$ and $|A(k;\varrho)|\leqq|B(x_0;\varrho)|/2$.

LEMMA IV. *There is a function $\vartheta(\sigma;\nu,\gamma)$ which is defined and positive for $0<\sigma<1$ such that if $u\in\mathfrak{B}(E;\gamma)$, $B(x_0;\varrho)\subset E$, and for some k we have*

$$|A(k;\varrho)|<\varrho^\nu\vartheta(\sigma;\nu,\gamma)$$

then

$$|A(k+\sigma c;\varrho-\sigma\varrho)|=0,$$

where

$$c\geqq0\quad\text{and}\quad c^2=(\varrho^\nu\vartheta)^{-1}\int_{A(k;\varrho)}[u(x)-k]^2\,dx.$$

REMARK. From Lemma IV, it follows that if $u\in\mathfrak{B}(E;\gamma)$ then u is (essentially) bounded on compact subsets of E.

LEMMA V. *There exists a number $\eta=\eta(\nu,\gamma)>0$ such that if $u\in\mathfrak{B}(E;\gamma)$ and $B(x_0;4\varrho)\subset E$, then*

$$\operatorname{osc}(u;\varrho)\leqq(1-\eta)\operatorname{osc}(u;4\varrho),$$

where $\operatorname{osc}(u;r)$ *denotes the* (essential) *oscillation on* $B(x_0;r)$.

THEOREM I. *Any function $u \in \mathfrak{B}(E;\gamma)$ satisfies a uniform Hölder condition with exponent $\lambda(\nu,\gamma)>0$ on any compact subset of E.*

THEOREM II. *If the coefficients $a^{\alpha\beta}$ are bounded and measurable on E and satisfy $a^{\alpha\beta}=a^{\beta\alpha}$ and*

$$(2.3)\qquad (1-h)\,|\xi|^2 \leqq a^{\alpha\beta}(x)\,\xi^\alpha\xi^\beta \leqq (1+h)\,|\xi|^2, \qquad x\in E,\ 0<h<1,$$

and all ξ, then any a-harmonic function in L_2 on $E \in \mathfrak{B}(E,\gamma)$ where

$$(2.4)\qquad \gamma = (1+h)^2(1-h)^{-2}.$$

We now prove

THEOREM 2.1. *If $u\in L_2$ and is a-harmonic on $B(x_0,a)$ then*

$$(2.5)\qquad d[u;B(x_0;r)] \leqq (1+h)(1-h)^{-1}(a-r)^{-1}\,\|u\|_2^0, \qquad 0\leqq r<a.$$

If u is also in H_2^1 on $B(x_0,a)$, then

$$(2.6)\qquad d[u;B(x_0;r)] \leqq C(\nu,h)\cdot d[u;B(x_0;a)]\cdot (r/a)^{\tau-1+\lambda_0}$$

where

$$\lambda_0 = \lambda[\nu,(1+h)(1-h)^{-1}], \qquad \tau=\nu/2.$$

If $u^*\in H_2^1$ on a bounded domain E, there is a unique a-harmonic function u on E such that $u-u^*\in H_{2,0}^1$ on E.

Proof. The first statement follows from the definitions and the last is proved by the usual lower-semicontinuity argument for minimizing the integral $I_0(u,u;E)$, where

$$(2.7)\qquad I_0(u,v;E)=\int_E v_{,\alpha}a^{\alpha\beta}u_{,\beta}\,dx.$$

Or one can set $u=u^*+U$ and look for a solution U in $H_{2,0}^1$ of the non-homogeneous equation as in the proof of Theorem 3.2.

Next, let $\{u_n\}$ be any sequence of a_n-harmonic functions on $B(0,1)$ with $d[u_n;B(0,1)]$ uniformly bounded and where the a_n all satisfy (2.3) with the same h; we may as well assume that the average $\overline{u}_n$ of u_n over $B(0,1)$ is zero. Then by RELLICH's theorem

$$\|u_n\|_2^0 \leqq C_2(\nu)\,d[u_n;B(0,1)].$$

We may also assume that $u_n\to u$ in H_2^1 on $B(0,1)$. Then u is also in $\mathfrak{B}(E,\gamma)$ where γ is given by (2.4) and $E=B(0,1)$. Let us choose any ϱ and σ with $0<\varrho,\sigma<1$. There is a k such that $|A(k;\varrho)|<\varrho^r\vartheta(\sigma;\nu,\gamma)$ and $|B(-k,\varrho)|<\varrho^r\vartheta(\sigma;\nu,\gamma)$ for the limit function u. For those k, ϱ, and σ, we see from the strong convergence in L_2 of u_n to u that these inequalities hold for all sufficiently large n. Accordingly the u_n and u are all uniformly bounded on $B(0,\varrho\sigma)$ and so $u_n(0)$ and $u(0)$ are uniformly bounded. From Lemma V, it follows, then, that

$$|u(x)| \leqq C(\nu,h)\,d[u,B(0,1)],$$

$$|u(x)-u(0)| \leqq C(\nu,h)\,d[u;B(0,1)]\cdot|x|^{\lambda_0}, \qquad |x|\leqq\tfrac{1}{2}$$

for every a-harmonic function u where the $a^{\alpha\beta}$ satisfy (2.3).

From the closure theorem, we may assume that the $a^{\alpha\beta} \in C^\infty$ so the a-harmonic functions are. Thus we have (u a-harmonic)

$$(1-h)\, D[u, B(0,r)] \leqq I_0[u, u;\, B(0,r)] = \int_{\partial B(0,r)} (u-u_0)\, a^{\alpha\beta} n_\alpha u_{,\beta}\, dS$$

$$\leqq \left[\int_{\partial B(0,r)} (u-u_0)^2 a^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta\, dS\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\partial B(0,r)} a^{\alpha\beta} u_{,\alpha} u_{,\beta}\, dS\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (\tau = \nu/2)$$

$$\leqq (1+h)\, \gamma_\nu^{\frac{1}{2}} r^{\tau+\lambda_0} \cdot [\varphi'(r)]^{\frac{1}{2}} [\varphi(1)]^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi(r) = D[u, B(0,r)],$$

$$u_0 = u(0), \qquad 0 \leqq r \leqq \tfrac{1}{2}.$$

Hence

$$\varphi^{-2} \cdot \varphi' \geqq C(\nu, h)\, [\varphi(1)]^{-1} r^{-\tau-\lambda_0}, \qquad 0 \leqq r \leqq \tfrac{1}{2}$$

$$\varphi^{-1}(r) \geqq \varphi^{-1}(\tfrac{1}{2})\, [1 + \varphi(\tfrac{1}{2})\, C\, \varphi^{-1}(1)\, (r^{1-\tau-\lambda_0} - 2^{\tau+\lambda_0-1})]$$

$$\therefore \varphi(r) \leqq C(\nu, h)\, \varphi(1) \cdot r^{\tau+\lambda_0-1}, \qquad 0 \leqq r \leqq 1.$$

But now, if u is a-harmonic on a sphere $B(x_0, R)$, the function u' defined by $u'(y) = u(x_0 + Ry)$ is 'a-harmonic on $B(0, 1)$, where $'a^{\alpha\beta}(y) = a^{\alpha\beta}(x_0 + Ry)$ and the $'a^{\alpha\beta}$ clearly satisfy (2.3) with the same h. The result (2.6) then follows using homogeneity argument.

The following "Dirichlet growth" theorem is well known (see, for instance [8], p. 111 or [7], pp. 12, 13).

THEOREM 2.2. *If $u \in H_2^1$ on G and satisfies*

$$d[u, B(x_0, r)] \leqq L(r/\delta)^{\tau-1+\lambda}, \qquad 0 < \lambda < 1,\ 0 \leqq r \leqq \delta$$

for each x_0 in G, δ being the distance of x_0 from ∂G, then u satisfies a uniform Hölder condition with exponent λ on any compact subset of G and satisfies

$$|u(x) - u(x_0)| \leqq C(\nu, \lambda) \cdot L \cdot \delta^{1-\tau-\lambda} \cdot |x - x_0|^\lambda \quad \text{if} \quad |x - x_0| \leqq \delta/2,$$

$$B(x_0, \delta) \subset G.$$

3. *A special case.* In this section, we study the solutions of equations of the form

$$\int_G [v_{,\alpha}(a^{\alpha\beta} u_{,\beta} + e^\alpha) + vf]\, dx = 0 \qquad \text{for all } v \in H_{2,0}^1 \text{ on } G, \tag{3.1}$$

where we assume that the $a^{\alpha\beta}$ are bounded and measurable and satisfy (2.3) for some h.

LEMMA 3.1. *If S is any set of finite measure and $\sigma > 0$, then*

$$\int_S |\xi - x|^{\sigma-\nu}\, d\xi \leqq \Gamma \sigma^{-1} s^\sigma \quad \textit{where} \quad \gamma_\nu s^\nu = |S|.$$

Proof. For obviously

$$\int_S |\xi - x|^{\sigma-\nu}\, d\xi \leqq \int_{B(x,s)} |\xi - x|^{\sigma-\nu}\, d\xi.$$

LEMMA 3.2. *If $u \in H_{p,0}^1$ on the bounded domain G for some $p \geqq 1$, then*

$$u(x) = -\Gamma_\nu^{-1} \int_G |\xi - x|^{-\nu} (\xi^\alpha - x^\alpha)\, u_{,\alpha}(\xi)\, d\xi \tag{3.2}$$

for almost all x in G.

Proof. If u is of class C' and has support in G, $x \in G$, and r is the distance from x, then

$$u(x) = -\int_0^R u_r[x + r\zeta(\vartheta)]\, dr \qquad (\zeta \in \partial B(0,1)) \tag{3.3}$$

where we assume $B(x,R) > G$ and $u(\xi) = 0$ for $\xi \in B(x,R) - G$. Then (3.2) follows by averaging over $\partial B(0,1)$. From (3.2), we see that

$$|u(x)| \leqq \Gamma_\nu^{-1} \int_G |\xi - x|^{1-\nu} \cdot |\nabla u(\xi)|\, d\xi \tag{3.4}$$

(u of class C' as above). From the Hölder inequality we see that

$$|u(x)|^p \leqq \Gamma_\nu^{-1} \left[\Gamma_\nu^{-1} \int_G |\eta - x|^{1-\nu} d\eta\right]^{p-1} \int_G |\xi - x|^{1-\nu} |\nabla u(\xi)|^p\, d\xi. \tag{3.5}$$

By integrating over G, we find that

$$\int_G |u(x)|^p\, dx \leqq g^p \cdot \int_G |\nabla u(\xi)|^p\, d\xi \qquad \text{where} \qquad \gamma_\nu g^\nu = |G|. \tag{3.6}$$

Thus the formula (3.2) holds in general by approximations.

DEFINITION. Suppose $f \in L_1$ on G. We define its *potential* by

$$V(x) = -(\nu - 2)^{-1} \Gamma_\nu^{-1} \int_G |\xi - x|^{2-\nu} f(\xi)\, d\xi. \tag{3.7}$$

REMARK. The following theorem enables us to reduce the general equations (3.1) to ones where $f \equiv 0$, provided the original f satisfies (3.8).

THEOREM 3.1 *). *Suppose that $f \in L_1$ on G and satisfies*

$$\int_{G \cap B(x_0, r)} |f(\xi)|\, d\xi \leqq L r^{\nu - 2 + \lambda}, \qquad 0 < \lambda < 1, \tag{3.8}$$

for each sphere $B(x_0, r)$, suppose V is the potential of f, and suppose $v \in H^1_{2,0}$ on G. Then $V \in H^1_2$ on any bounded domain and satisfies

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla V(x)|^2\, dx \leqq C^2(\nu, \lambda) \cdot L^2 r^{\nu - 2 + 2\lambda} \qquad x_0 \in G, \qquad 0 \leqq r \leqq R \tag{3.9}$$

where R is the diameter of G. Moreover

$$\int_G v(x) f(x)\, dx = -\int_G v_{,\alpha}(x)\, V_{,\alpha}(x)\, dx. \tag{3.10}$$

Proof. It is straightforward to show that $V \in L_1$ on any cell and (by integrating the expression for $V_{,\alpha}(x)$, using FUBINI'S theorem, etc.) is absolutely continuous along almost all lines in each coordinate direction with partial derivatives given by

$$V_{,\alpha}(x) = -\Gamma_\nu^{-1} \int_G |\xi - x|^{-\nu} (\xi^\alpha - x^\alpha) f(\xi)\, d\xi \tag{3.11}$$

almost everywhere.

*) Compare [7], pp. 61–64.

Now, we select $x_0 \in G$ and we write

$$f(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\xi) \quad \text{where} \quad f_1(\xi) = f(\xi) \text{ in } B(x_0, 2r)$$

and $f_1(\xi) = 0$ elsewhere and let V_k be the potential of f_k. Let

$$\varphi_2(\varrho; x) = \int_{B(x,\varrho) \cap [G - B(x_0, 2r)]} |f(\xi)|\, d\xi. \tag{3.12}$$

Then, from (3.11) for V_2, we have

$$\begin{aligned} |\nabla V_2(x)| &\leqq \Gamma_\nu^{-1} \int_{G - B(x_0, 2r)} |\xi - x|^{1-\nu} |f(\xi)|\, d\xi \\ &= \Gamma_\nu^{-1} \int_r^R \varrho^{1-\nu} \varphi_2'(\varrho; x)\, d\varrho \\ &\leqq L\, \Gamma_\nu^{-1} \left[R^{\lambda-1} + (\nu - 1) \int_r^R \varrho^{\lambda-2}\, d\varrho \right] \\ &\leqq (\nu - 1)\, \Gamma_\nu^{-1} (1 - \lambda)^{-1} L\, r^{\lambda-1}, \qquad x \in B(x_0; r) \end{aligned}$$

since, obviously

$$\varphi_2(\varrho; x) \leqq \begin{cases} 0, & 0 \leqq \varrho \leqq r \\ L\, \varrho^{\nu-2+\lambda} & r \leqq \varrho \leqq R \end{cases} \qquad (x \in B(x_0; r)).$$

Accordingly

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla V_2(x)|^2\, dx \leqq C(\nu, \lambda)\, L^2 r^{\nu-2+2\lambda}. \tag{3.13}$$

From the Schwarz inequality, we obtain

$$|\nabla V_1(x)|^2 \leqq \Gamma_\nu^{-1} I_1 I_2, \quad \text{where} \quad 0 \leqq \sigma < \lambda \quad \text{and} \tag{3.14}$$

$$I_1 = \Gamma_\nu^{-1} \int_{B(x_0, 2r)} |\xi - x|^{\sigma-\nu} |f(\xi)|\, d\xi,$$

$$I_2 = \int_{B(x_0, 2r)} |\xi - x|^{2-\nu-\sigma} |f(\xi)|\, d\xi$$

since $f_1(\xi) = 0$ outside $B(x_0, 2r)$. In order to evaluate I_2 define

$$\varphi_1(\varrho; x) = \int_{B(x,\varrho) \cap B(x_0, 2r) \cap G} |f(\xi)|\, d\xi.$$

Then we see that

$$\varphi_1(\varrho; x) \leqq \begin{cases} L\, \varrho^{\nu-2+\lambda}, & 0 \leqq \varrho \leqq r \\ L(2r)^{\nu-2+\lambda} & \varrho \geqq r, \end{cases} \qquad x \in B(x_0; r).$$

Proceeding as with φ_2, we see that

$$I_2 \leqq [(\nu - 2 - \sigma)(\lambda - \sigma)^{-1} + 2^{\nu-2+\lambda}]\, L\, r^{\lambda-\sigma}. \tag{3.15}$$

Integrating (3.14) over $B(x_0, r)$ and using (3.15), we see that

$$\int_{B(x_0, r)} |\nabla V_1(x)|^2\, dx \leqq \sigma^{-1} (2r)^\sigma L (2r)^{\nu-2+\lambda} C(\nu, \lambda, \sigma)\, L\, r^{\lambda-\sigma}.$$

Since this holds for any σ with $0<\sigma<\lambda$, we see that

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla V_1(x)|^2 \, dx \leqq C(\nu,\lambda)\, L^2 r^{\nu-2+2\lambda}. \tag{3.16}$$

Using (3.11), we see that

$$-\int_G v_{,\alpha}(x)\, V_{,\alpha}(x)\, dx = \Gamma_\nu^{-1} \int_G \int_G |\xi - x|^{-\nu} (\xi^\alpha - x^\alpha)\, v_{,\alpha}(x)\, f(\xi)\, dx\, d\xi$$
$$= \int_G v(\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

using Lemma 3.2 (with x and ξ interchanged).

THEOREM 3.2. *If G is a domain $\subset B(x_0, R)$, $e \in L_2$ on G, and f satisfies (3.8) on G, there exists a unique solution u in $H^1_{2,0}$ on G of (3.1). Moreover*

$$\|u\|^1_{2,0} \leqq (1-h)^{-1} \left(\|e\|^0_2 + C_2 L R^{\nu-1+\lambda}\right). \tag{3.17}$$

Proof. On account of (2.3), we see that the inner product $I_0(u, v; G)$ [see (2.7)] leads to a norm which is topologically equivalent to $\|u\|^1_{2,0}$. Since

$$\int_G (e^\alpha v_{,\alpha} + fv)\, dx = \int_G v_{,\alpha}(e^\alpha - V_{,\alpha})\, dx \tag{3.18}$$

is a linear functional in $H^1_{2,0}$, we conclude the existence of a unique solution u of (3.1) from Hilbert space theory. Setting $v = u$ in (3.1) and using (2.3), (3.18), etc., we obtain

$$(1-h)\left(\|u\|^1_{2,0}\right)^2 \leqq \left|\int_G u_{,\alpha}(e^\alpha - V_{,\alpha})\, dx\right| \leqq \|u\|^1_{2,0}\left(\|e\|^0_2 + \|\nabla V\|^0_2\right)$$

from which (3.17) follows, on account of Theorem 3.1.

THEOREM 3.3. *Suppose $u \in H^1_{2,0}$ and satisfies (3.1) on $G = B(x_0, a)$ where $f = 0$ and $e \in L_2$ on $B(x_0, a)$ with*

$$\int_{B(x_0,r)} |e(x)|^2 \, dx \leqq L^2 (r/a)^{\nu-2+2\lambda}, \qquad 0<\lambda<\lambda_0,\ 0 \leqq r \leqq a. \tag{3.19}$$

Then

$$\int_{B(x_0,r)} |\nabla u(x)|^2 \, dx \leqq C(\nu, h, \lambda) \cdot L^2 (r/a)^{\nu-2+2\lambda} \qquad 0 \leqq r \leqq a. \tag{3.20}$$

If $u \in H^1_2$ on $B(x_0; a)$ and e satisfies (3.19), then (3.20) holds with L replaced by $L + d[u; B(x_0, a)]$.

Proof. The last statement follows from the first, since we may write $u = U + H$ where H is the a-harmonic function coinciding with u on $\partial B(x_0, a)$. Then $U \in H^1_{2,0}$ and is a solution of (3.1) with the same e and f, so U satisfies (3.20). Moreover

$$I_0[u, u; B(x_0, a)] = I_0[U, U; B(x_0, a)] + I_0[H, H; B(x_0, a)]. \tag{3.21}$$

The result for u then follows from Theorem 2.1.

In order to prove the first statement*), let

$$\varphi(s) = \sup L^{-1} d[u, B(x_0, Rs)]$$

*) Cf. The proofs of Lemma 2.1 and Theorem 2.2 in [8].

for all e satisfying (3.19) with a replaced by R, where $0<R\leqq a$ and u is the solution of (3.1) ($f=0$) in $H^1_{2,0}$ on $B(x_0, R)$. Then, choose any e satisfying (3.19) and $0<r<R<a$ and write $u=U+H$ on $B(x_0, R)$ where H is the a-harmonic function $=u$ on $\partial B(x_0, R)$. Then (3.21) holds, so that

$$d[H; B(x_0, R)] \leqq C(h)\, d[u; B(x_0; R)] \leqq C L \varphi(R/a)$$

by the definition of φ. Also e satisfies

$$\int_{B(x_0,r)} |e(x)|^2 dx \leqq L^2 (R/a)^{n-2+2\lambda} \cdot (r/R)^{n-2+2\lambda}.$$

Hence, if we apply Theorem 2.1 and the definition of φ, we obtain

$$\begin{aligned} d[u, B(x_0, r)] &\leqq d[H; B(x_0, r)] + d[U; B(x_0, r)] \\ &\leqq C L \varphi(R/a)\,(r/R)^{n-1+\lambda_0} + L(R/a)^{n-1+\lambda} \varphi(r/R). \end{aligned}$$

Since e was arbitrary, we see that

$$\varphi(s) \leqq t^{n-1+\lambda} \varphi(s/t) + C(n, h)\, \varphi(t)\,(s/t)^{n-1+\lambda_0} \qquad 0<s\leqq t\leqq 1. \tag{3.22}$$

Now it is clear from Theorem 3.2 that φ is non-decreasing for $0<s\leqq 1$ with

$$\varphi(1) \leqq (1-h)^{-1}.$$

Next, choose σ with $0<\sigma<1$. Then, clearly

$$\varphi(s) \leqq S_0 s^{n-1+\lambda} \quad \text{for} \quad \sigma\leqq s\leqq 1 \quad \text{if} \quad S_0 = \varphi(1)\sigma^{1-n-\lambda}.$$

Applying (3.22) with $\sigma^2\leqq s\leqq\sigma$ and $t=\sigma^{-1}s$, we see that

$$\varphi(s) \leqq S_1 s^{n-1+\lambda} \quad \text{where} \quad S_1 = S_0(1+C\omega), \quad \omega = \sigma^{\lambda_0-\lambda}. \tag{3.23}$$

Since $S_1\geqq S_0$, we see that (3.23) holds for $\sigma^2\leqq s\leqq 1$. Applying (3.22) with $\sigma^4\leqq s\leqq\sigma^2$ and $t=\sigma^{-2}s$, we obtain

$$\varphi(s) \leqq S_2 s^{n-1+\lambda}, \quad S_2 = S_0(1+C\omega)(1+C\omega^2), \qquad \sigma^4\leqq s\leqq 1.$$

By repeating the process, we find that

$$\varphi(s) \leqq S s^{n-1+\lambda}, \quad S = S_0(1+C\omega)(1+C\omega^2)(1+C\omega^4)\ldots, \qquad 0<s\leqq 1.$$

The result follows.

4. *Existence theory and interior estimates for the general equations.* In this section, we study the solutions of the general equations (1.1) in which the $a^{\alpha\beta}$ satisfy (2.3), the b^α and $c^\alpha \in L_{2p}$ and $d\in L_p$ on G for some $p>n/2$; we call these *general conditions*.

LEMMA 4.1. *If $u\in H^1_2$ on $B(x_0; a)$, there exists a function $U\in H^1_{2,0}$ on $B(x_0, 2a)$ such that $U(x)=u(x)$ on $B(x_0, a)$ and*

$$\left(\|U\|^1_{2,0}\right)^2 \leqq C^2(n)\left(\|Du\|^0_2\right)^2 + a^{-2}\left(\|u\|^0_2\right)^2 \equiv C^2(n)\left('\|u\|^1_2\right)^2. \tag{4.1}$$

Proof. U is defined $=u$ on $B(x_0, a)$ and U is the harmonic function in $B(x_0, 2a) - B(x_0, a)$ coinciding with u on $\partial B(x_0, a)$ and vanishing on $\partial B(x_0, 2a)$.

One verifies the result by introducing spherical harmonics (as in [4], for instance), and computing the result.

LEMMA 4.2. *If $u \in H^1_{r,0}$ for some r, $0<r<\nu$, on some bounded domain G, or $\in H^1_r$ over the whole space then $u \in L_{r'}$ on G, where*

$$r' = \frac{\nu r}{\nu - r} \quad \text{and} \quad \|u\|^0_{r'} \leqq r \cdot \frac{\nu - 1}{\nu - r} \prod_{\alpha} \left(\|u_{,\alpha}\|^0_r\right)^{1/\nu} \leqq r\,\nu^{-1}(\nu-1)(\nu-r)^{-1}\,|u|^1_{r,0}.$$

Proof. This follows from the representation (3.2) in the first case and by a limit process in the second and from the theorems in [12].

LEMMA 4.3. *If $u \in H^1_{2,0}$ on a bounded domain G or if $u \in H^1_2$ on a sphere $G = B(x_0, a)$, then $u \in L_s$ and*

$$\|u\|^0_s \leqq C(\nu)\,|u|^1_{2,0} \quad \text{or} \quad C(\nu)'\,|u|^1_2, \quad \text{respectively, where} \quad s = 2\nu/(\nu-2). \tag{4.2}$$

Proof. This follows from Lemma 4.2 for $u \in H^1_{2,0}$ and the second follows using Lemma 4.1.

LEMMA 4.4. *If $u \in H^1_{2,0}$ on the bounded domain G and $d \in L_p$ on G for some $p > \nu/2$, then $(d\,u^2) \in L_t$, where*

$$t = p\,\nu/(p\,\nu + \nu - 2p), \tag{4.3}$$

$$\|d\,u^2\|^0_t \leqq \|d\|^0_p \cdot \left(\|u\|^0_s\right)^2 \leqq C(\nu)\,\|d\|^0_p \left(\|u\|^1_{2,0}\right)^2, \tag{4.4}$$

$$\int_{B(x_0,r)\cap G} |d\,u^2|\,dx \leqq C(\nu)\,\|d\|^0_p \left(\|u\|^1_{2,0}\right)^2 r^{2\mu}, \qquad \mu = 1 - \nu/2p. \tag{4.5}$$

Proof. For, suppose $p', q' > 1$, $(p')^{-1} + (q')^{-1} = 1$. From the Hölder inequality we obtain

$$\|(d\,u^2)\|^0_t \leqq \|d\|^0_{tp'} \cdot \left(\|u\|^0_{2tq'}\right)^2.$$

The results follow by setting $tp' = p$ and $2tq' = s$ and then using Lemma 4.2.

LEMMA 4.5. *If $f \in L_q$ on a bounded domain G, where*

$$q = 2\nu/(\nu + 2) \tag{4.6}$$

then its potential $V \in H^1_2$ on any bounded domain Γ with

$$\int_{\Gamma} |\nabla V)^2\,dx \leqq C^2(\nu)\left(\|f\|^0_q\right)^2. \tag{4.7}$$

If, also f satisfies

$$\int_{B(x_1,r)} |f(x)|\,dx \leqq L\,\delta^{\nu-1}(r/\delta)^{\nu-2+\lambda}, \qquad 0 \leqq r \leqq \delta, \tag{4.8}$$

$$B(x_1, \delta) < G, \quad L \geqq \|f\|^0_q \cdot \gamma_\nu^{1/s}$$

for all x_1 in G, then

$$\int_{B(x_1,r)} |\nabla V|^2\,dx \leqq C(\nu, \lambda)\,L^2(r/\delta)^{\nu-2+\lambda}, \qquad 0 \leqq r \leqq \delta. \tag{4.9}$$

Proof. From the results of CALDERON and ZYGMUND [1], it follows that $\nabla^2 V \in L_q$ over the whole space. From Lemma 4.2, the result (4.7) follows

To prove the second result, choose a point $x_1 \in G$ and let δ be the distance of x_1 from ∂G. Write

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

where $f_2(x) = 0$ in $B(x_1, \delta/2)$ and $f_1(x) = 0$ in $G - B(x_1, \delta/2)$ and let V_k be the potential of f_k. Clearly $f_2 \in L_q$ with $\|f_2\|_q^0 \leqq \|f\|_q^0$ so its potential $V_2 \in H_2^1$ on any bounded Γ. But since V_2 is harmonic on $B(x_1, \delta/2)$, it satisfies a condition (4.9) with $\lambda = 1$ and $L = \|f\|_q^0$. Moreover, it is easy to see that f_1 satisfies the condition of Theorem 3.1 with that L replaced by $C(\nu, \lambda) L \delta^{1-\tau-\lambda}$ for every sphere $B(x_0, r)$, so that V_1 satisfies (4.9). The result follows.

We now define

$$(4.10)\quad \begin{cases} I(u, v; G) = \int\limits_G [v_{,\alpha}(a^{\alpha\beta} u_{,\beta} + b^\alpha u) + v(c^\alpha u_{,\alpha} + d u)]\, d x, \\ J(u, v; G) = \int\limits_G [v_{,\alpha} b^\alpha u + v(c^\alpha u_{,\alpha} + d u)]\, d x = I(u, v; G) - I_0(u, v; G) \\ K(u, v; G) = \int\limits_G u v\, d x. \end{cases}$$

We shall first prove an existence theorem for equations of the form

$$(1.1')\quad \begin{cases} I(u, v; G) + \lambda K(u, v; G) = L(v) \qquad \text{for all } v \in H_{2,0}^1, \quad \text{where} \\ -L(v) = \int\limits_G [e^\alpha v_{,\alpha} + f v)\, d x. \end{cases}$$

For $\lambda = 0$, the equations (1.1') reduce to (1.1). Let us define the transformations T_0, T_1, T_2 and the function w by

$$(T_0 u, v)_{2,0}^1 = I_0(u, v), \qquad (T_1 u, v)_{2,0}^1 = J(u, v), \qquad (T_2 u, v)_{2,0}^1 = K(u, v).$$
$$(w, v)_{2,0}^1 = L(v)$$

where we have assumed G fixed and bounded. Then the equation (1.1)' is equivalent to

$$(4.11)\qquad T_0 u + T_1 u + \lambda T_2 u = w.$$

THEOREM 4.1. *If G is a bounded domain and the coefficients satisfy our general conditions, then the equation (1.1)' has a unique solution u in $H_{2,0}^1$ for any e in L_2 and any f whose potential V is in H_2^1, provided that λ does not belong to an isolated set of characteristic values. If λ is characteristic, the homogeneous equation ($e^\alpha = f = 0$) has solutions $u \not\equiv 0$, the manifold of these being finite dimensional. For any λ, the Fredholm alternative holds.*

Proof. It is well-known (see [7] or [9], for instance) that $K(u, v)$ is completely continuous (i.e. continuous with respect to weak convergence in u and v). Next, suppose $u_n \rightharpoonup u$ and $v_n \rightharpoonup v$ in $H_{2,0}^1$ on G. Then, by Lemma 4.4 and our hypotheses, we see that $\|b u_n\|_{2t}$, $\|c v_n\|_{2t}$ and $\|d u_n\|_t$ are uniformly bounded. A simple argument involving subsequences of subsequences shows that $J(u, v)$ is also completely continuous. Hence T_1 and T_2 are completely continuous.

Next we see that there is a λ_0 such that

$$I_0(u,u)+J(u,u)+\lambda K(u,u)\geqq 2^{-1}(1-h)\left(\|u\|^1_{2,0}\right)^2 \qquad \text{if } \lambda\geqq\lambda_0.$$

For, if not, there is a sequence u_n with

$$\|u_n\|=1, \quad I_0(u_n,u_n)+J(u_n,u_n)+n\,K(u_n,u_n)<2^{-1}(1-h). \tag{4.12}$$

A subsequence of $\{u_n\}$ converges weakly to some u and J_n and K_n converge to their values for that u. But since I_{0n}, J_n, and K_n are bounded, we see that $K_n\to 0$ so $u=0$. Hence $J_n\to 0$. But, since $I_{0n}\geqq(1-h)$, we have a contradiction. Thus for $\lambda=\lambda_0$, $(T_0+T_1+\lambda_0 T_2)$ has a bounded inverse W, say. Then (4.11) is equivalent to

$$u+(\lambda-\lambda_0)\,U(u)=W(w), \qquad U=W\,T_2$$

where U is completely continuous. The results follow.

THEOREM 4.2. *There is an $a_0>0$, depending only on h, p, $\|b\|^0_{2p}+\|c\|^0_{2p}$, and $\|d\|^0_p$ such that if $0<a\leqq a_0$ and the coefficients satisfy our general conditions on $B(x_0,a)$, then*

$$I[u,u;B(x_0,a)]\geqq\frac{(1-h)}{2}D[u,B(x_0,a)]=\frac{(1-h)}{2}\left(\|u\|^1_{2,0}\right)^2$$

for every $u\in H^1_{2,0}$ on $B(x_0,a)$.

Proof. For

$$I[u,u;B(x_0,a)]=I_0[u,u;B(x_0,a)]+\int_{B(x_0,a)}[(b^\alpha+c^\alpha)\,u\,u_{,\alpha}+d\,u^2]\,dx.$$

Since

$$\left|\int_{B(x_0,a)}(b^\alpha+c^\alpha)\,u\,u_{,\alpha}\,dx\right|\leqq\|u\|^1_{2,0}\left\{\int_{B(x_0,a)}|b(x)+c(x)|^2\cdot|u(x)|^2\,dx\right|^{\frac{1}{2}}$$

and $|b+c|^2\in L_p$, the result follows from Lemma 4.4.

THEOREM 4.3. *If $0<a\leqq a_0$, $a^{\alpha\beta}$, b^α, c^α, and d satisfy the general conditions on $B(x_0,a)$, $e\in L_2$ there, and f satisfies the first condition of Lemma 4.5 then there exists a unique solution u of (1.1) in $H^1_{2,0}$ on $B(x_0,a)$. Moreover*

$$d[u,B(x_0,a)]\leqq 2(1-h)^{-1}\left[\|e\|^0_2+C(\nu,\mu)\,\|f\|^0_q\right]. \tag{4.13}$$

A corresponding result holds if f satisfies the condition of Theorem 3.1.

Proof. The proof parallels that of Theorems 3.2 and 4.1 since Theorem 4.2 holds.

THEOREM 4.4. *Suppose $u\in L_2$ on $B(x_0,a)$ where $0<a\leqq a_0$ and the coefficients satisfy the conditions of Theorem 4.3 on $B(x_0,a)$. Suppose also that $u\in H^1_2$ and satisfies (1.1) on each $B(x_0,R)$ with $0<R<a$. Then*

$$d[u,B(x_0,r)]\leqq C_3(h)\left\{\|e\|^0_2+C(\nu,\mu)\,\|f\|^0_q+(a-r)^{-1}\|u\|^0_2\right\}, \quad 0\leqq r<a. \tag{4.14}$$

A corresponding result holds if f satisfies the condition of Theorem 3.1.

Proof. Let $h(s)$ be a fixed function of class C' with $h(s)=1$ for $s\leqq 0$, $h(s)=0$ for $s\geqq 1$, and $h'(s)\leqq 0$. Choose R so $r<R<a$ and define

$$\zeta(x)=h[(|x-x_0|-r)/(R-r)], \quad v=\zeta^2 u, \quad U=\zeta u.$$

Then v and $U \in H^1_{2,0}$ on $B(x_0, R)$. Substituting in (1.1), we obtain

$$
(4.15)\quad \left\{\begin{aligned}
&0 = I[U, U; B(x_0, R)] + \int_{B(x_0, R)} [\zeta e^\alpha U_{,\alpha} + \zeta U f + U(b^\alpha - c^\alpha)\zeta_{,\alpha} u + \\
&+ \zeta e^\alpha \zeta_{,\alpha} u - a^{\alpha\beta}\zeta_{,\alpha}\zeta_{,\beta} u^2]\, dx \geqq \frac{(1-h)}{2}(\|U\|^1_{2,0})^2 - \\
&- \|U\|^1_{2,0}[\|e\| + C(\mu,\nu) L R^{\nu-1+2\mu} + C h_1 (R-r)^{-1} \|b-c\|^0_{2p} \cdot R^\lambda \|u\|^0_2] - \\
&- h_1 (R-r)^{-1} \|e\|^0_2 \|u\|^0_2 - (1+h)(R-r)^{-2} h_1^2 (\|u\|^0_2)^2 *).
\end{aligned}\right.
$$

The result follows.

We now define the spaces S_λ and $S_{\lambda 0}$ for $0 < \lambda < 1$ as follows: $u \in S_\lambda$ on $B(x_0, a)$ if and only if $u \in H^1_2$ there and there is an L such that

$$
(4.16)\qquad d[u, B(x_1, r)] \leqq L(r/\delta)^{r-1+\lambda}, \quad 0 \leqq r \leqq \delta = a - |x_1 - x_0|
$$

for every x in $B(x_0, a)$; if $u \in S_\lambda$ we define $|||u|||_\lambda$ as the larger of $\|u\|^1_2$ (see (4.1)) and the smallest L which satisfies (4.16)). The space $S_{\lambda 0}$ is the subspace of S_λ for which $u \in H^1_{2,0}$ and $|||u|||_{\lambda,0}$ is the larger of $\|u\|^1_{2,0}$ and the smallest L as above.

LEMMA 4.6. *Suppose the b^α, c^α and d satisfy our general conditions and suppose $u \in S_\lambda$ on $B(x_0, a)$. Then $c^\alpha u_{,\alpha} \in L_r$, $du \in L_{r'}$, and $b^\alpha u \in L_2$ on $B(x_0, a)$, where*

$$
r = \frac{2p}{p+1} > q \quad \text{and} \quad r' = \frac{2\nu p}{p\nu - 2p + 2} > q, \qquad \mu = 1 - \frac{\nu}{2p}
$$

and

$$
(4.17)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{B(x_1, \varrho)} |b(x)|^2 |u(x)|^2\, dx \leqq \big(C(\nu, \lambda) |||u|||_\lambda \cdot \|b\|^0_{2p}\big)^2 \delta^{2\mu} (\varrho/\delta)^{\nu-2+2\mu} \\
&\int_{B(x_1, \varrho)} |c^\alpha(x) u_{,\alpha}(x)|\, dx \leqq C(\nu)\, |||u|||_\lambda \cdot \|c\|^0_{2p}\, \delta^{\nu-1+\mu} (\varrho/\delta)^{\nu-2+\lambda+\mu} \\
&\int_{B(x_1, \varrho)} |d(x)\, u(x)|\, dx \leqq C(\nu, \lambda) \cdot |||u|||_\lambda \cdot \|d\|^0_p \delta^{\nu-1+2\mu} (\varrho/\delta)^{\nu-2+2\mu}, \quad 0 \leqq \varrho \leqq \delta
\end{aligned}\right.
$$

for each $x_1 \in B(x_0, a)$, where $\delta = a - |x_1 - x_0|$.

Proof. The first results follow from Lemma 4.3 and the Hölder inequality. From Theorem 2.2 and the definition of $|||u|||_\lambda$, we see that

$$
|u(x) - u(x_1)| \leqq C(\nu, \lambda)\, |||u|||_\lambda\, \delta^{1-\nu-\lambda} |x - x_1|^\lambda, \qquad 0 \leqq |x - x_1| \leqq \delta/2
$$

$$
\int_{B(x_1, \delta)} |u(x)|^2\, dx \leqq \delta^2 \cdot |||u|||^2_\lambda.
$$

From these facts, it is easy to conclude that

$$
|u(x)| \leqq C(\nu, \lambda)\, |||u|||_\lambda \cdot \delta^{1-\nu} \quad \text{for } 0 \leqq |x - x_1| \leqq \delta/2.
$$

The results (4.17) follow easily from this and the Hölder inequality.

DEFINITION. For u in $H^1_{2,0}$ or in any $S_{\lambda,0}$, we define the linear operator T by: $Tu = U$ where U is the solution in $H^1_{2,0}$ of

$$
\int_{B(x_0, a)} [v_{,\alpha}(a^{\alpha\beta} U_{,\beta} + b^\alpha u) + v(c^\alpha u_{,\alpha} + du)]\, dx.
$$

*) If we did not assume $a^{\beta\alpha} = a^{\alpha\beta}$, the integral would contain also the terms $(a^{\alpha\beta} - a^{\beta\alpha})\zeta_{,\alpha} u U_{,\beta}$ and the bracket multiplied by $\|U\|^1_{2,0}$ would have another term $C h_1 (R-r)^{-1} \|u\|^0_2$.

THEOREM 4.5. *There is a number a_1 with $0<a_1\leqq a_0$ which depends only on h, ν, p, λ, and the norms of b, c, and d such that if $0<a\leqq a_1$, and $0<\lambda\leqq\mu$, $Tu\in S_{0\lambda}$ and $\|T\|\leqq\frac{1}{2}$.*

This follows immediately from the preceding lemma and from Theorems 3.1 and 3.3. Accordingly we have the following Theorem:

THEOREM 4.6. *If $0<a\leqq a_1$ and if e satisfies (3.19) and f satisfies all the conditions of Lemma 4.5 with $0<\lambda\leqq\mu$ and $\lambda<\lambda_0$, then the solution of (1.1) which is in $H^1_{2,0}$ is also in $S_{\lambda 0}$ and*

$$|||u|||^1_{\lambda,0}\leqq C(\nu, p, \lambda)\, L.$$

A corresponding result holds if f satisfies (3.8) with $\lambda\leqq\mu$ and $\lambda<\lambda_0$.

Finally, we have the following final result on interior continuity:

THEOREM 4.7. *Suppose $u\in L_2$ on G and $u\in H^1_2$ on any domain D with $\overline{D}$ compact and $\overline{D}\subset G$. Suppose also that u satisfies (1.1) on each such domain where e and f satisfy the conditions of Theorem 4.5 for each $B(x_0, r)\subset G$ with $\lambda\leqq\mu$ and $\lambda<\lambda_0$. Then $u\in S_\mu$ on each sphere interior to G, where its norm depends only on L, h, μ, λ, p, the norms of b, c, d, and the distance of $\overline{B(x_0, a)}$ from ∂G, provided $a\leqq a_1$. Thus u satisfies a uniform Hölder condition on each such domain D which depends on D and the quantities above.*

Proof. Choose $\overline{B(x_0, a_1)}\subset G$. Then $u\in H^1_2$ on $B(x_0, a_1)$ and, in fact, its norm $'\|u\|^1_2$, as defined in (3.1), is bounded as indicated in Theorem 4.3. Then, let H be the a-harmonic function coinciding with u on $\partial B(x_0, a_1)$ and define U by

$$u = U + H.$$

Then $U\in H^1_{2,0}$ on $B(x_0, a_1)$ and satisfies (1.1) with e^α and f replaced by E^α and F, respectively, where

$$E^\alpha = e^\alpha + b^\alpha H, \quad F = f + c^\alpha H_{,\alpha} + dH.$$

But now $H\in S_{\lambda_0}$ on $B(x_0, a_1)$ with

$$|||H|||_{\lambda_0}\leqq C(\nu, h)\,'\|u\|^1_2$$

by Theorem 2.1, since $I_0(u, u; B) = I_0(U, U; B) + I_0(H, H; B)$ $(B = B(x_0, a_1))$. But then it follows from Lemma 4.6 that E and F satisfy the conditions of Theorem 4.6, where L now involves $'\|u\|^1_2$ linearly. The results follow from Theorems 4.6 and 2.2.

5. *Hölder continuity at the boundary.* In this section, we prove our results about Hölder continuity at the boundary. We begin by defining domains of class $S^*(\alpha, a)$.

DEFINITION. A domain G is of class $S^*(\alpha, a)$, $0<\alpha<1$, if and only if it is bounded and

$$|B(x_0, r) - G|\geqq\alpha|B(x_0, r)|, \quad \text{for all } r \text{ with } 0<r\leqq a$$

and any x_0 not in G.

We begin by generalizing some of DE GIORGI's lemmas and theorems.

DEFINITION. A function $u \in \mathfrak{B}^*(E, \gamma)$ iff $u \in L_2$ on E, $u \in H_2^1$ on domains D with $\overline{D}$ compact and $\overline{D} \subset E$, and if

$$(5.1)\quad \begin{cases} \int\limits_{A(k,\varrho_1)} |\nabla u|^2 \, dx \leqq \dfrac{\gamma}{(\varrho_2-\varrho_1)^2} \int\limits_{A(k,\varrho_2)} |u(x)-k|^2 \, dx & \text{for all } k \geqq 0, \\ \int\limits_{B(k,\varrho_1)} |\nabla u|^2 \, dx \leqq \dfrac{\gamma}{(\varrho_2-\varrho_1)^2} \int\limits_{B(k,\varrho_2)} |u(x)-k|^2 \, dx & \text{for all } k \leqq 0, \end{cases}$$

the notations being those of § 2.

It is easy to see that DE GIORGI's Lemma I holds for such functions and (by repeating his proof) that his Lemma IV holds, provided $k \geqq 0$ and a corresponding result holds for the sets $B(k, \varrho)$ for $k \leqq 0$; we label these results as Lemmas I* and IV*. As in DE GIORGI's case, these lemmas imply that any function $u \in \mathfrak{B}^*(E, \gamma)$ is bounded on compact subsets of E. We now prove a lemma which permits us to generalize DE GIORGI's Lemmas II and III slightly:

LEMMA 5.1. *Suppose $u \in H_p^1$ on $B(x_0, \rho)$, suppose u vanishes on a subset B with $|B| \geqq \alpha |B(\varrho)|$ $\big(B(\varrho) = B(x_0, \varrho)\big)$, $0 < \alpha < 1$. Then*

$$(5.2)\quad \int\limits_e |u(x)|^p \, dx \leqq \beta_p(\nu, \alpha) \cdot |G|^{(p-1)/p} |e|^{1/p} \int\limits_{B(\varrho)} |\nabla u|^p \, dx \qquad \big(G = B(\varrho) - B\big).$$

Proof. It is known ([7] or [9]) that u is equivalent to a function which is absolutely continuous along almost all lines in any direction and continues to have this property in any coordinate system related to the original by a bi-Lipschitz transformation. So we assume u to have this property already. It is easy to show that if x_0 is not in a set Z of measure zero [for instance if $u(x_0)$ is the Lebesgue derivative of $\int\limits_e u(x) \, dx$ at x_0 and if the Lebesgue derivatives of $\int\limits_e u_{,\alpha}(x) \, dx$ all exist at x_0] then u is absolutely continuous for $r \geqq 0$ along almost all radial lines through x_0.

Suppose $0 < \varepsilon < \alpha$ and $\eta = \varepsilon |B(\varrho)|$. We may cover G with an open set $G' \subset B(\varrho)$ such that $|G'| < |B(\varrho)| - |B| + \eta$. Let $B' = B(\varrho) - G'$; then $|B'| > (\alpha - \varepsilon) \cdot |B(\varrho)|$. For each x in G', let $\Sigma(x)$ be the set of points ζ on $\partial B(0, 1)$ such that $x + r\zeta \in B'$ for at least one r; clearly $\Sigma(x)$ is the union of a countable family of closed sets and so is measurable. It is geometrically evident that

$$(5.3)\qquad |\Sigma(x)| \geqq [C(\alpha - \varepsilon, \nu)]^{-1} \Gamma_\nu, \quad C > 0$$

since $|\Sigma(x)|$ would be smallest if B' were a cone with vertex at x and axis along a diameter of $B(\varrho)$.

For each x in G' and ζ in $\Sigma(x)$, let $r(x, \zeta)$ be the smallest value of r such that $x + r\zeta \in B'$ and let $G(x)$ denote the set of all $\xi = x + r\zeta$ for $0 \leqq r < r(x, \zeta)$. If $x \in G' - Z$ and if ζ does not belong to a set of measure zero, we have $u(x + r\zeta)$ absolutely continuous in r for $0 \leqq r \leqq r(x, \zeta)$, so that

$$(5.4)\qquad u(x) = -\int\limits_0^{r(x,\zeta)} u_r(x + r\zeta) \, dr \qquad (u_r = \zeta^\alpha u_{,\alpha}), \ \zeta \in \Sigma(x).$$

Averaging over $\Sigma(x)$, we obtain

$$u(x) = -|\Sigma(x)|^{-1} \int_{G(x)} |\xi - x|^{-\nu} (\xi^\alpha - x^\alpha) u_{,\alpha}(\xi)\, d\xi. \tag{5.5}$$

From (5.3) and (5.5), it follows that

$$|u(x)| \leqq C \Gamma_\nu^{-1} \int_{G'} |\xi - x|^{1-\nu} |\nabla u(\xi)|\, d\xi, \qquad x \in G' - Z. \tag{5.6}$$

Since ε is arbitrary (5.6) holds with $C = C(\alpha, \nu)$ and G' replaced by G. If $p > 1$, we may use the Hölder inequality to obtain

$$\begin{cases} |u(x)|^p \leqq C^p \Gamma_\nu^{-p} \left[\int_G |\xi - x|^{1-\nu} d\xi \right]^{p-1} \cdot \int_G |\xi - x|^{1-\nu} \cdot |\nabla u(\xi)|^p d\xi \\ \qquad \leqq C |G|^{(p-1)/\nu} \gamma_\nu^{-(p-1)/\nu} \Gamma_\nu^{-1} \int_G |\xi - x|^{1-\nu} \cdot |\nabla u(\xi)|^p d\xi, \qquad x \in G - Z. \end{cases} \tag{5.7}$$

If $p = 1$, (5.7) coincides with (5.6) (as modified). The result follows by integrating over e.

We now state and prove our slight generalizations of De Giorgi's Lemmas II and III:

Lemma II*. *If $u \in H_p^1$ with $p \geqq 1$ on $B(\varrho) = B(x_0, \varrho)$, $k < \lambda$, and*

$$|B(\varrho) - A(k, \varrho)| \geqq \alpha |B(\varrho)|, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

then

$$(\lambda - k) |A(\lambda; \varrho)|^{(\nu-1)/\nu} \leqq \beta_1(\nu, \alpha) \int_{A(k,\varrho) - A(\lambda,\varrho)} |\nabla u|\, dx.$$

Proof. This follows immediately from Lemma 5.1 by taking $p = 1$ and $e = A(\lambda; \varrho)$ and replacing u by the function $w(x) = 0$ when $u(x) \leqq k$, $w(x) = u(x) - k$ for x on $A(k; \varrho) - A(\lambda; \varrho)$, and $w(x) = (\lambda - k)$ on $A(\lambda; \varrho)$.

Lemma III*. *If $u \in H_2^1$ on $B(\varrho)$ and if*

$$|B(\varrho) - A(k; \varrho)| \geqq \alpha |B(\varrho)|, \qquad \alpha > 0$$

then

$$\int_{A(k;\varrho)} |u(x) - k|^2 dx \leqq \beta_2(\nu, \alpha) |A(k; \varrho)|^{2/\nu} \int_{A(k;\varrho)} |\nabla u|^2 dx.$$

Proof. This follows from Lemma 5.1 by setting $p = 2$ and $e = A(k; \varrho) = G$ and replacing u by w where $w(x) = 0$ if $u(x) \leqq k$ and $w(x) = u(x) - k$ if $u(x) > k$.

By repeating De Giorgi's proof of his Lemma V, using the modified lemmas above, we obtain the following lemma:

Lemma V*. *Suppose $u \in \mathfrak{B}^*(E, \gamma)$. Then there is a number $\eta(\nu, \gamma, \alpha) > 0$ such that if $B(x_1, 4\varrho) < E$, $\mu > 0$, $\omega > 0$, $\mu - 2\omega \geqq 0$, $u(x) \leqq \mu$ on $B(x_1, 4\varrho)$, and $|A(\mu - 2\omega; 2\varrho)| \leqq (1 - \alpha) |B(x_1; 2\varrho)|$, then $u(x) \leqq \mu - \eta\omega$ on $B(x_1; \varrho)$.*

Remark. Results corresponding to the lemmas above hold if u is replaced by $-u$.

We now prove an analog of De Giorgi's Theorem II and extend our Theorem 2.1; Theorem II* has been proved by Nash in [11].

THEOREM II*. *Suppose the part $B(x_0, a)\cap G$ of the domain G is of type $S^*(\alpha, a)$, suppose $u\in L_2$ on $B(x_0, a)$ and $u\in H_2^1$ on each $B(x_0, R)$ with $0<R<a$, suppose u is a-harmonic on $G\cap B(x_0, a)$, and suppose $u(x)=0$ for $x\in B(x_0, a)-G$. Then u satisfies a uniform Hölder condition with exponent $\lambda_0^*(h, \nu, \alpha)$ on each $B(x_0, R)$ with $0<R<a$ which depends only on $h, \nu, \alpha, a-R$, and $\|u\|_2^0$ and $\|u\|_2^1$ is finite on each such $B(x_0, R)$.*

THEOREM 5.1. *If G and u satisfy the hypotheses of Theorem* II* *and if $u\in H_2^1$ on $B(x_0, a)$, then*

$$d[u, B(x_1, r)]\leqq C(\nu, h, \alpha)\, d[u, B(x_1, \delta)]\cdot (r/\delta)^{r-1+\lambda_0^*},\quad 0\leqq r\leqq \delta = a-|x_1-x_0|$$

for any $x_1\in B(x_0, a)$.

Proofs. Suppose, first, that $x_1\in B(x_0, a)-G$. Let $h(r)$ be an arbitrary function of class C' for $0\leqq r\leqq\delta$ with $h(r)=0$ near $r=\delta$. Let v be any function $\in H_2^1$ on $B(x_1, \delta)$ which is the strong limit in H_2^1 of functions of class C' on $\overline{B(x_1, \delta)}$ which vanish on $\overline{B(x_1, \delta)}-G$ and define

$$V(x)=h(|x-x_1|)\cdot v(x).$$

Then $V\in H_{2,0}^1$ on $B(x_1, \delta)$ and on $B(x_1, \delta)\cap G$ and V vanishes on $B(x_1, \delta)-G$ so that

$$\int_{B(x_1,\delta)} V_{,\alpha}a^{\alpha\beta}u_{,\beta}\,dx=\int_{B(x_1,\delta)\cap G} V_{,\alpha}a^{\alpha\beta}u_{,\beta}\,dx=0$$

$$=\int_0^R\left\{h(r)\int_{\partial B(x_1,r)} v_{,\alpha}a^{\alpha\beta}u_{,\beta}\,dS+h'(r)\int_{\partial B(x_1,r)} v\,a^{\alpha\beta}n_\alpha u_{,\beta}\,dS\right\}dr$$

$$=\int_0^R h'(r)\left\{\int_{\partial B(x_1,r)} v\,a^{\alpha\beta}n_\alpha u_{,\beta}\,dS-\int_{B(x_1,r)} v_{,\alpha}a^{\alpha\beta}u_{,\beta}\,dx\right\}dr$$

since u is a-harmonic on $B(x_1, \delta)\cap G$. Since this is true for any $h(r)$ as stated, we see that

$$\int_{B(x_1,r)} v_{,\alpha}a^{\alpha\beta}u_{,\beta}\,dx=\int_{\partial B(x_1,r)} v\,a^{\alpha\beta}n_\alpha u_{,\beta}\,dS,\quad 0\leqq r\leqq R,\ r\notin Z. \tag{5.8}$$

If we apply (5.8) with $v=\operatorname{pos}(u-k)$ where $k\geqq 0$, we see that (5.8) holds with u replaced by v. By following the procedure in the proof of the Leray-Cacciopoli lemma ([3], p. 153) we see that

$$\int_{A(k;\varrho_1)}|\nabla u|^2\,dx\leqq\frac{\gamma}{(\varrho_2-\varrho_1)^2}\int_{A(k;\varrho_2)}|u(x)-k|^2\,dx,$$

where

$$0<\varrho_1<\varrho_2\leqq\delta,\qquad k\geqq 0,\qquad A(k;\varrho)=A(k)\cap B(x_1;\varrho)$$

where the γ here is the same as in Theorem II. A similar result holds for the sets $B(k;\varrho)$. Accordingly $u\in\mathfrak{B}^*(E, \gamma)$ on $B(x_1, \delta)$.

Moreover, since $|B(x_1, r)-G|\geqq\alpha|B(x_1, r)|$ for $0\leqq r\leqq\delta$, we see immediately from Lemma V* that u satisfies a Hölder condition with exponent $\lambda_0^*(\nu, \alpha, h)$ and constant depending only on those numbers, $\|u\|_2^0$, and δ with

$u(x_1)=0$. Now, from our previous results each point x_1 in $B(x_0, a)\cap G$ is also the center of a sphere $B(x_1, 5\varrho/2)$ in which

$$|u(x)-u(x_1)|\leqq K(x_1)\cdot|x-x_1|^{\lambda_0}\leqq K^*(x_1)\cdot|x-x_1|^{\lambda_0^*},\qquad x\in B(x_1, 5\varrho/2).$$

If $0<R<a$, $\overline{B(x_0, R)}$ can be covered by a finite number of the spheres $B(x_1, \varrho)\,(<B(x_1, 5\varrho/2))$. Thus u satisfies a Hölder condition of exponent λ_0^* on $B(x_0, R)$. The homogeneity argument in the proof of Theorem 2.1 may be repeated after which Theorem 5.1 follows as before.

We can now sketch how to prove the results concerning the boundary behavior of the solutions of equations (1.1) which were stated in the introduction for domains G of type $S^*(\alpha, a)$: We first consider solutions u in $H^1_{2,0}$ on G of equations (3.1) where we assume that e and f satisfy

$$(5.9)\qquad \begin{cases} \int\limits_{B(x_0, r)\cap G}|e|^2\,dx\leqq L^2(r/a)^{r-2+2\lambda}, & 0\leqq r\leqq a,\\ \int\limits_{B(x_0, r)\cap G}|f|\,dx\leqq K\,L\,a^{1-r}(r/a)^{r-2+\lambda} & \text{for all } r, \end{cases}\qquad 0<\lambda<\lambda_0, \mu$$

for any x_0; the restriction on f guarantees that the gradient of the potential of f restricted to $B(x_0, a)$ satisfies a condition like that for e. First, we notice that if u is such a solution and we subtract off the function H_0 which is a-harmonic on $G\cap B(x_0, a)$ and coincides on $\partial[G\cap B(x_0, a)]$ with u and vanishes on $B(x_0, a)-G$, then $u_1=u-H_0$ vanishes on $\partial B(x_0, a)$ and is a solution of (3.1) with the same e and f. Then the argument of Theorem 3.3 can be repeated to obtain the result of that theorem for u_1, the only difference being that when one writes $u_1=U+H$ on $B(x_0, R)$, the function H is that function which is a-harmonic on $G\cap B(x_0, R)$ and coincides with u_1 on $\partial[G\cap B(x_0, R)]$ and is 0 on $B(x_0, R)-G$ as are u, u_1, and U; the argument works on account of Theorems II* and 5.1.

It is now clear that the relevant arguments of section 4 will go through for spheres $B(x_0, a)$ if we restrict ourselves throughout to the space ${}^*H^1_2$ consisting of all $u\in H^1_2$ on $\overline{B(x_0, a)}$ which are limits in H^1_2 of functions of class C' which vanish in a neighborhood of $[\overline{B(x_0, a)}-G]$ and define ${}^*H^1_{2,0}={}^*H^1_{2,0}\cap H^1_{2,0}$ and ${}^*S_\lambda={}^*H^2_1\cap S_\lambda$, etc.

In case G is a Lipschitz domain, i.e. one such that each boundary point is in a neighborhood N on $G\cup\partial G$ which can be mapped in a bi-Lipschitz way on a hemisphere in such a way that $N\cap\partial G$ corresponds to the flat boundary, and if e and f satisfy (5.9) and the coefficients satisfy our general conditions, we see that any solution u of (1.1) satisfies a uniform Hölder condition on $\overline{G}$ as follows: Let x_0 be any point of ∂G and let T be a bi-Lipschitz map as above. Then the transform of u satisfies an equation of the same form on the hemisphere but, of course, the norms of the new b^α, c^β, d, e, and f will be different and the new $a^{\alpha\beta}$ will satisfy (2.3) with a different h. But now $u=0$ along the flat boundary. If we extend u by reflection (as we would a harmonic function) and extend the coefficients and the e^α and f properly, the extended u will satisfy the extended equations on the full sphere and our results follow from our previous results for the interior.

Bibliography

[1] CALDERON, A. P., and A. ZYGMUND: On singular integrals. Amer. J. Math. **78**, 289–309 (1956). — [2] GIORGI, E. DE: Sull'analyticita delle estremali degli integrali multipli. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8), **20**, 438–441 (1956). — [3] GIORGI, E. DE: Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. Mem. Accad. Sci. Torino, s. 3a, **3**, Parte I 25–43 (1957). — [4] HEINZ, E.: Über die Eindeutigkeit beim Cauchyschen Anfangswertproblem einer elliptischen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. IIa, No. 1, 1–12 (1955). — [5] MIRANDA, C.: Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Berlin: Springer 1955. — [6] MORREY jr., C. B.: On the solutions of quasilinear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 126–166 (1938). — [7] MORREY jr., C. B.: Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics. Univ. Calif. Publ. Math., New Ser. **1**, 1–130 (1943). — [8] MORREY jr., C. B.: Second order elliptic systems of differential equations. Ann. of Math. Studies No. 33, pp. 101–159. Princeton Univ. Press 1954. — [9] MORREY jr., C. B., and JAMES EELLS jr.: A variational method in the theory of harmonic integrals I. Ann. of Math. **63**, 91–128 (1956). — [10] NASH, J.: Parabolic equations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **43**, 754–758 (1957). — [11] NASH, J.: Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math. **80**, 931–954 (1958). — [12] PLESSIS, N. DU: Some theorems about the Riesz fractional integral. Trans. Amer. Math. Soc. **80**, 124–134 (1955). — [13] STAMPACCHIA, G.: Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellittiche. Ann. Scuo. Norm. Pisa, Ser. 3, **12**, 223–245 (1958).

Dept. of Math., University of California, Berkeley, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 23. März 1959)

GILBARG, D.
Math. Zeitschr. 72, 165–174 (1959)

Some Hydrodynamic Applications of Function Theoretic Properties of Elliptic Equations

In memoriam LEON LICHTENSTEIN

By
D. GILBARG

Research on the function theoretic properties of elliptic differential equations (e.g., quasi-conformal mapping, pseudo-analytic functions, the maximum principle) has paralleled and often been motivated by developments in fluid dynamics. The success of these methods in applications has been apparent in the theory of subsonic flows, and an excellent survey of this subject is contained in the monograph of BERS [3]. The present note, in the same spirit, is concerned with several properties of quasi-conformal mappings and first order elliptic systems, and then with their application to a comparison theorem for subsonic flows and the asymptotic behavior of subsonic flows with free boundaries. The effect of these results is that much of the qualitative theory of free streamlines now carries over without essential change to subsonic flows of a compressible fluid. This extends previous work by the author [10] which was based on different methods.

Lemmas on quasi-conformal mappings and elliptic equations

We consider in this section several preliminary results on quasi-conformal mappings and first order elliptic systems in two independent variables. These will be needed in application but also appear to be of intrinsic interest.

In the following a continuous complex-valued function $w(z)=u+iv$ will be said to define a K quasi-conformal mapping in a region D of the z-plane if (i) it is absolutely continuous in x for almost all y and in y for almost all x, (ii) the derivatives u_x, u_x, v_y, v_y are locally square integrable, and (iii) the derivatives satisfy almost everywhere the inequality

$$u_x^2+u_y^2+v_x^2+v_y^2 \leqq 2K(z)\,(u_x v_y - u_y v_x) \tag{1}$$

or equivalently,

$$|w_{\bar z}| \leqq \sqrt{\frac{K-1}{K+1}}\,|w_z|\,, \tag{2}$$

where $K(z)\geqq 1$ is a bounded function in D. Here

$$w_z=\tfrac{1}{2}\,(w_x - i\,w_y)\,, \qquad w_{\bar z}=\tfrac{1}{2}\,(w_x + i\,w_y)\,.$$

This work was supported by the Office of Naval Research, Stanford University, Contract No. Nonr-225 (11).

For one-to-one mappings this analytic statement is equivalent to the geometric condition that the dilatation

$$\mu(z) = \overline{\lim_{r \to 0}} \frac{\max_{|z'-z|=r} |w(z') - w(z)|}{\min_{|z'-z|=r} |w(z') - w(z)|}$$

is bounded by $K + \sqrt{K^2 - 1}$. This is evident for C^1 mappings but is true more generally.

Of particular interest here will be the quasi-conformal mappings defined by solutions $w = u + iv$ of an elliptic system

$$v_y = a\,u_x + b u_y, \qquad -v_x = c\,u_x + d\,u_y \tag{3}$$

or of the single equation

$$(a\,u_x + b\,u_y)_x + (c\,u_x + d\,u_y)_y = 0 \tag{3'}$$

where a, b, c, d are bounded and

$$4\,a\,d - (b + c)^2 \geqq \delta > 0.$$

A simple algebraic computation verifies that any solution $w(z)$ satisfies an inequality of the form (1). Conversely, any quasi-conformal mapping $w(z)$ is the solution of a Beltrami equation

$$w_{\bar{z}} = \nu(z)\, w_z, \qquad |\nu| = \sqrt{\frac{K-1}{K+1}} \leqq \nu_0 < 1, \tag{4}$$

with a bounded measurable coefficient $\nu(z)$ (we set $\nu = 0$ wherever w_z is undefined or equals zero); (4) is the complex form of a system (3) with coefficients $a = \alpha$, $b = c = \beta$, $d = \gamma$, satisfying $\alpha\gamma - \beta^2 = 1$.

We note that (1) and (2) are invariant under conformal mapping. An important connection between quasi-conformal mapping and function theory is provided by the Morrey representation theorem [*4*], [*13*]. This asserts that any K quasi-conformal mapping $w(z)$ can be represented in the form

$$w(z) = f(\zeta(z)) \tag{5}$$

where f is complex analytic and $\zeta(z)$ is a K quasi-conformal homeomorphism. Plainly $\zeta(z)$ is arbitrary within a conformal mapping.

The following Phragmén-Lindelöf theorem for quasi-conformal mappings has been stated by PFLUGER [*14*].

LEMMA 1. *Let $w = u + iv$ be K quasi-conformal in a simply connected region G whose boundary G extends to infinity, and let $M(r)$ denote the maximum of u on the intersection C_r of G with the circle $|z| = r$. Denote by $\lambda(r)$ the length of C_r. Then, if $u \leqq 0$ on the boundary of G, either $u \leqq 0$ throughout G, or there is a positive constant A for which*

$$M(r) \geqq A \exp\left(\pi \int_{r_0}^{r} \frac{d\varrho}{\lambda(\varrho)\,\mu(\varrho)}\right), \qquad r > r_0, \tag{6}$$

where $\mu(\varrho) = \max_{|z|=\varrho} \left(K(z) + \sqrt{K^2(z) - 1}\right)$.

In particular, if G is contained in a half-plane, so that $\lambda(r) \leqq \pi r$, and if $K \to 1$ at infinity in such a way that

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\mu(\varrho)-1}{\varrho}\, d\varrho < \infty, \tag{7}$$

then (6) becomes

$$M(r) \geqq A r. \tag{8}$$

In PFLUGER'S statement of this theorem in [14], K is a constant, but his method also yields the above result for variable K.

LEMMA 2. *(Boundary point lemma.) Let $w(z) = u + iv$ be K quasi-conformal in a region G of the upper half z-plane abutting a segment S of the real axis containing the origin* 0. *Suppose that $u > 0$ in G and that $u(0) = 0$. If, in addition,*

$$\int_0^{r_0} \frac{\mu(\varrho)-1}{\varrho}\, d\varrho < \infty, \qquad \mu(\varrho) = \max_{|z| \leq \varrho} \left(K(z) + \sqrt{K^2(z)-1}\right), \tag{9}$$

then the normal derivative at 0 *is positive:*

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0) > 0; \tag{10}$$

if the derivative does not exist, the same inequality holds for the lower derivative.

It is clear by conformal mapping that the lemma remains true if the boundary segment S is replaced by a sufficiently smooth arc — for example, by an arc having a Hölder continuous tangent (see footnote 1).

The above lemma has been proved under more restrictive hypotheses by FINN and GILBARG ([6], pp. 31—35). The following proof is essentially different and conceptually simpler. The corresponding result for general elliptic equations of non-divergence structure has been proved by E. HOPF [12].

PROOF OF LEMMA 2. By the general representation theorem (5), there is a K quasi-conformal homeomorphism $\zeta(z) = \xi + i\eta$ of G onto a domain G_ζ, and an analytic function $f(\zeta)$ such that $w(z) = f(\zeta(z))$. We may assume that $\zeta(z)$ is such that the boundary segment S is taken into a segment S_ζ of the real axis in the ζ-plane and that $\zeta(0) = 0$. The mapping $\zeta(z)$ can be extended by reflection across S to a quasi-conformal homeomorphism of a full neighborhood of $z = 0$ in which (9) is satisfied.

The harmonic function $u(\zeta) = \mathrm{Re}\, f(\zeta)$ is positive in G_ζ and $u(0) = 0$. Let A be an annulus in G_ζ whose outer boundary is tangent to S_ζ at $\zeta = 0$ and has radius a. We infer from the maximum principle that if ε is a sufficiently small positive number,

$$u(\zeta) - \varepsilon \log \frac{a}{\varrho} \geqq 0 \quad \text{in } A,$$

where ϱ is the radial distance of ζ from the center of A ($\varrho = |\zeta - ai|$). This exhibits the fact that $u(\zeta)/|\zeta|$ is bounded away from zero near $\zeta = 0$ in every angle $0 < \delta \leqq \arg \zeta \leqq \pi - \delta$.

Single angle distortion is bounded in a quasi-conformal mapping, we may suppose that $\zeta(z)$ takes a segment $x=0$, $0\leqq y\leqq y_0$, into an arc contained in the angle $0<\delta\leqq\arg\zeta\leqq\pi-\delta$. From the relation

$$\frac{u(0,y)}{y}=\frac{u(\zeta)}{|\zeta|}\,\frac{|\zeta|}{y}$$

it evidently suffices for the lemma to prove that $|\zeta(z)/z|\geqq m>0$. This is included in the following general result:

If $\zeta(z)$ is a one-to-one K quasi-conformal mapping of $|z|\leqq r_0$, with $\zeta(0)=0$, and if K satisfies (9), then there are constants m, M such that

$$0<m\leqq|\zeta(z)/z|\leqq M<\infty. \tag{11}$$

Stronger results, based on the geometric definition of quasi-conformality, are contained in the work of TEICHMÜLLER [15], WITTICH [16], and BELINSKII [1]. In particular, the latter has shown that $\zeta(z)/z$ has a finite non-zero limit as $z\to 0$. The following is an elementary proof of (11) based on the analytic definition (1).

Let $D(r)$ denote the Dirichlet integral of ζ over the disc C_r: $|z|\leqq r$,

$$D(r)=\int_{C_r}(|\zeta_x|^2+|\zeta_y|^2)\,dx\,dy.$$

A simple argument of FINN and SERRIN ([7], p. 2) yields the inequality

$$D(r)\leqq\frac{r\mu(r)}{2}\,\frac{dD}{dr}$$

for any function $\zeta(z)$ satisfying (1). Integration gives

$$D(r)\leqq D(r_0)\exp\left[-2\int_r^{r_0}\frac{d\varrho}{\varrho\,\mu(\varrho)}\right]. \tag{12}$$

Let $\omega(r)=\max_{|z_1|,|z_2|=r}|\zeta(z_2)-\zeta(z_1)|$ be the oscillation of $\zeta(z)$ on $|z|=r$ and hence in the disc $|z|\leqq r$. By the well known device of LEBESGUE,

$$\frac{\omega^2(r)}{r}\leqq\frac{1}{r}\left(\int_{C_r}|\zeta_\vartheta|\,d\vartheta\right)^2\leqq\frac{2\pi}{r}\int_{C_r}\zeta_\vartheta^2\,d\vartheta\leqq 2\pi D'(r).$$

Integrating from r to $2r$, and noting the monotone character of $\omega(r)$, we obtain

$$\omega^2(r)\leqq\frac{2\pi}{\log 2}\,[D(2r)-D(r)]\leqq\frac{2\pi}{\log 2}\,D(2r).$$

From (12) and (9), and the inequality $|\zeta(z)|\leqq\omega(|z|)$, we get finally

$$|\zeta(z)/z|\leqq M<\infty.$$

The bound from below $0<m\leqq|\zeta(z)/z|$ is obtained in the same way after observing that the inverse mapping $\zeta(z)$ is quasi-conformal and that the dilatation $\mu(\zeta)$ continues to satisfy (9) (by virtue of the bound $|\zeta(z)|\leqq M|z|$). This completes the proof of (11) and hence of Lemma 2.

The preceding lemmas reveal an interesting contrast between the behavior of quasi-conformal mappings — or equivalently, solutions of elliptic equations of the form (3), (3′) — and of solutions of elliptic equations of non-divergence structure,

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y = 0. \tag{13}$$

We remark first that the results stated in the lemmas are essentially sharp, as is shown by the following examples.

In Lemma 1 if K is a constant >1 and G is a half plane, the conclusion states that $M(r) \geqq A r^{\alpha}$, where $\alpha = 1/\mu = K - \sqrt{K^2-1} < 1$. Precisely this behavior is achieved by the mapping $w = z|z|^{\alpha-1}$, $\alpha > 0$, which has vanishing real part on $x=0$, and is quasi-conformal in $x>0$, since $|w_{\bar{z}}/w_z| = |(\alpha-1)/(\alpha+1)| < 1$. For this function $M(r) = r^{\alpha}$, which is $o(r)$ if $\alpha < 1$. If K is variable and $K \to 1$ at infinity but without a modulus of continuity satisfying (7), the conclusion $M(r) \geqq A r$ need not hold. Namely, consider the function

$$w = -2 + z \exp\left[-(\log|z|)^{1-\alpha}\right], \qquad 0 < \alpha < 1$$

in the half-plane $x \geqq 2$. $\mathrm{Re}\, w \leqq 0$ on $x=2$, and w is quasi-conformal. Since

$$\left|\frac{w_{\bar{z}}}{w_z}\right| = \frac{|(1-\alpha)(\log|z|)^{-\alpha}|}{|2+(1-\alpha)(\log|z|)^{-\alpha}|} \to 0 \quad \text{at} \quad \infty,$$

it is evident that $K \to 1$ at infinity, yet

$$M(r) = -2 + r \exp\left[-(\log r)^{1-\alpha}\right] = o(r).$$

This example shows the existence of an elliptic equation (3′) for which the coefficients a, b, c, d approach $1, 0, 0, 1$ at infinity but for which the conclusion of the Phragmén-Lindelöf theorem $M(r)/r \geqq \text{const.} > 0$, is not true. On the other hand, this conclusion is always valid for uniformly elliptic equations of the form $a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = 0$ (a, b, c bounded, $ac - b^2 \geqq m > 0$) without any continuity limitations on the coefficients at infinity (cf. [8]).

In Lemma 2 the conclusion may be false if $K(0) \neq 1$ or if $K \to 1$ at 0 without a modulus of continuity satisfying (9). In the former case a simple counter-example is given by $w = z|z|^{\alpha}$, $\alpha = \text{const.} > 0$. Clearly $u = \mathrm{Re}\, w > 0$ for $x > 0$, $u = 0$ at $z = 0$, and $|w_{\bar{z}}/w_z| = |(\alpha-1)/(\alpha+1)| < 1$; however, $u_x(0) = \infty$. An example of the latter case is given by the mapping

$$w = z \exp\left[(\log|z|)^{1-\alpha}\right], \qquad 0 < \alpha < 1,$$

for which

$$\left|\frac{w_{\bar{z}}}{w_z}\right| = \frac{|(1-\alpha)(\log|z|)^{-\alpha}|}{|2+(1-\alpha)(\log|z|)^{-\alpha}|} \to 0 \quad \text{at} \quad z = 0,$$

yet $u_x(0) = 0$. This exhibits an equation of the form (3′) which approaches the Laplacian at $z=0$ but for which the conclusion of the boundary point lemma is not valid. In contrast, the lemma is always true for solutions of uniformly elliptic equations of the form (13) whether or not the coefficients

are continuous (cf. [12]). (It suffices that near 0 the coefficients be bounded and that $ac - b^2 \geqq \delta > 0$.)

While equations of the form (13) yield stronger results than equations (3′) with regard to the Phragmén-Lindelöf theorem and the boundary point lemma, the reverse is true as regards some other properties connected with the maximum principle; see Theorem 7 in [11] for example.

Comparison theorem for subsonic flows

The preceding lemmas will now be used to derive a comparison theorem for subsonic flows past a wall. By a *flow past a wall* we shall mean a flow uniform at infinity in the positive x direction and bounded by a single streamline extending to $x = \pm\infty$. It is supposed that the streamline — or wall — has a Hölder continuous tangent at infinity[1]), and that the velocity vector is continuous up to and including the wall. Points where the curve has a Hölder continuous tangent will be called *regular*. We now prove

COMPARISON THEOREM. *Let two subsonic flows past the walls γ and $\bar{\gamma}$ be defined in regions D and $\bar{D}$. Suppose that $D \subset \bar{D}$ and that γ and $\bar{\gamma}$ have a regular point P in common. Then if the respective free stream velocities satisfy the inequality $q_0 \leqq \bar{q}_0$, the flow speeds at P are unequal in the same order,*

$$q(P) \leqq \bar{q}(P); \tag{14}$$

furthermore, $q(P) = \bar{q}(P)$ if and only if the flows are identical and $D = \bar{D}$.

Similar comparison theorems have been useful as a source of qualitative theorems in hydrodynamics, particularly in the theory of free surface flows; (for a review of the literature see [5] and [9]). The analogue of the above result for plane flows of an incompressible fluid was first proved by LAVRENTJEFF and was extended in various ways by J. SERRIN and the author. An extension to subsonic flows by the author [10] covered most cases of interest but was not directly applicable to flows with infinite cavities. The above form of the theorem is sufficient for this purpose and for the other natural generalizations from the incompressible case. However, the present result is still slightly more restrictive than the analogous theorem for incompressible fluids in that the latter makes no Hölder assumptions on the slope of the wall at infinity.

PROOF. The flows under consideration are each described by a potential φ and stream function ψ connected by the relations

$$\psi_y = \varrho\,\varphi_x, \qquad \psi_x = -\varrho\,\varphi_y, \qquad \varrho = \varrho(\varphi_x^2 + \varphi_y^2), \tag{15}$$

[1]) A curve C will be said to have a Hölder continuous tangent at a finite point $P \in C$ if the inclination $\vartheta(z)$ satisfies an inequality $|\vartheta(z_1) - \vartheta(z_2)| \leqq K|z_1 - z_2|^\alpha$ for constants K, α, $0 < \alpha < 1$, and for all $z_1, z_2 \in C$ in a neighborhood of P. If P is at infinity the inequality to be satisfied by $\vartheta(z)$ becomes $|\vartheta(z_1) - \vartheta(z_2)| \leqq K\left|\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right|^\alpha$ for all sufficiently large z_1, z_2 on C.

where the density ϱ is a given function of the speed $q=(\varphi_x^2+\varphi_y^2)^{\frac{1}{2}}$. We assume that the equation satisfied by the potential

$$a(\varphi_x, \varphi_y)\,\varphi_{xx} + 2b(\varphi_x, \varphi_y)\,\varphi_{xy} + c(\varphi_x, \varphi_y)\,\varphi_{yy} = 0 \tag{16}$$

is uniformly elliptic for the subsonic flows considered here; that is, a, b, c are bounded and $ac-b^2 \geqq \delta > 0$. The potential can also be looked upon as a solution of the linear equation

$$a(x, y)\,\varphi_{xx} + 2\,b(x, y)\,\varphi_{xy} + c(x, y)\,\varphi_{yy} = 0$$

obtained by inserting φ into the coefficients of (16). By means of the substitution $u=\varphi_x$, $v=\varphi_y$, this equation can be written as a uniformly elliptic system

$$-v_y = \frac{a}{c}u_x + \frac{2b}{c}u_y, \qquad v_x = u_y,$$

from which it is seen that the conjugate velocity $w=u-iv$ defines a quasi-conformal mapping in the region of flow.

It has been shown (see [6], p. 29) that the velocity vector is Hölder continuous in the neighborhood of streamline arcs having a Hölder continuous tangent. Since this fact is a consequence of the quasi-conformality of the velocity mapping $w(z)$, it follows by inversion that this property remains true at infinity if the streamline has a Hölder continuous tangent at infinity. We infer therefore that the velocity vectors in the flow regions D and $\overline{D}$ approach their free stream values Hölder continuously.

Now let $\psi, \overline{\psi}$ and $\varphi, \overline{\varphi}$ be the stream functions and potentials of the respective flows in $D, \overline{D}$, with $\psi=0$ on γ, $\overline{\psi}=0$ on $\overline{\gamma}$, and $\psi>0$ in D, $\overline{\psi}=0$ in $\overline{D}$. Let $\Psi \equiv \overline{\psi}-\psi$ and $\Phi \equiv \overline{\varphi}-\varphi$. These functions satisfy an elliptic system

$$\Psi_y = A\,\Phi_x + B\,\Phi_y, \qquad -\Psi_x = B\,\Phi_x + C\,\Phi_y \tag{17}$$

which is obtained by application of the mean value theorem:

$$\begin{aligned}\Psi_y &= \overline{\varrho}\,\overline{u} - \varrho\,u = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[u'\,\varrho(u', v')\right] dt \\ &= \Phi_x \int_0^1 \left[\varrho(u', v') + u'\,\varrho_u(u', v')\right] dt + \Phi_y \int_0^1 2u'\,v'\,\frac{d\varrho}{dq^2}(u', v')\,dt \\ &= A\,\Phi_x + B\,\Phi_y,\end{aligned}$$

where

$$u' = u + t(\overline{u}-u), \qquad v' = v + t(\overline{v}-v), \qquad 0 < t < 1.$$

Similarly for the second equation in (17).

It follows from the definition of A, B, and C, that these functions are Hölder continuous at infinity and at P because of the corresponding Hölder properties of $u, v, \overline{u}, \overline{v}$. A linear transformation takes (17) into another system of the same form whose coefficients A, B, C approach 1, 0, 1 at infinity (Hölder continuously), and we assume that (17) already has this property.

If $\bar{q}_0 > q_0$ it is evident that $\Psi > 0$ in D, whereas if $q_0 = \bar{q}_0$ Lemma 1 is then applicable to the mapping $\Omega(z) = \Psi - i\Phi$ and yields the same conclusion. Namely, $\Psi \geqq 0$ on γ; $\Psi = o(r)$ as $r \to \infty$ (since grad $\Psi \to 0$ at ∞); and finally, $\Omega(z)$ is quasi-conformal in D with a dilatation coefficient that approaches unity Hölder continuously at infinity, and hence satisfies (7). It follows that $\Psi > 0$ throughout D or $\Psi \equiv 0$.

In the latter case the theorem follows trivially, whereas in the former Lemma 2 becomes applicable. To see this, we remark as above that a linear transformation takes (17) into another such system with coefficients that approach 1, 0, 1 Hölder continuously at P, and after a suitable conformal transformation the hypotheses of Lemma 2 are satisfied by the mapping $\Omega = \Psi - i\Phi$. The conclusion of the lemma, in the z-plane, states that $\frac{\partial \Psi}{\partial n}(P) > 0$ and from this follows directly the desired inequality $\bar{q}(P) > q(P)$. Q.E.D.

Asymptotic properties of free surface flows

In order to apply the comparison theorem to flows with free boundaries, in particular to infinite cavity flows, it is necessary to have certain results concerning the asymptotic behavior of the free streamlines, and also to verify that the regularity hypotheses of the comparison theorem are satisfied.

Let φ and ψ be the potential and stream function of a subsonic infinite cavity flow past an obstacle AOB. That is, φ and ψ satisfy (15) in a region D bounded by a curve consisting of the arc AOB and two curves Γ_1, Γ_2 — the free streamlines — extending from A and B respectively to $x = \infty$; $f = \varphi + i\psi$ maps the interior of D homeomorphically onto the full f-plane slit along the positive real axis, the lower edge of the slit corresponding to $OA + \Gamma_1$ and the upper to $OB + \Gamma_2$; on Γ_1, Γ_2, $|\text{grad}\,\varphi| = \text{const.} = q_0$, and in D, grad $\varphi \to q_0$ at infinity.

We introduce in the usual way the hodograph variables ϑ and λ, where $\vartheta = \arctan(v/u)$ and

$$\lambda = \int_{q_0}^{q} \sqrt{\frac{1}{\varrho} \frac{d(\varrho q)}{dq}}\, \frac{dq}{q}.$$

With ϑ and λ as independent variables the nonlinear equations (15) are transformed into the linear system

$$\varphi_\vartheta = -K(\lambda)\,\psi_\lambda, \qquad \varphi_\lambda = K(\lambda)\,\psi_\vartheta \tag{18}$$

where $K(\lambda)$ is positive and analytic in λ if the density function $\varrho(q^2)$ is also analytic.

In the $\omega = \vartheta + i\lambda$ plane the free streamlines Γ_1, Γ_2 become a segment S of the real axis $\lambda = 0$, the point $z = \infty$ mapping into $\omega = 0$. Since the singularities of solutions $f = \varphi + i\psi$ of (18) are essentially the same as those of analytic functions, it is to be expected, as in the case of incompressible fluids, that f has an expansion at $\omega = 0$ starting with a singular term of order $\omega^{-2/n}$ for some integer $n \geqq 1$. That this is indeed the case is seen as follows.

Equation (18) shows that ω is a quasi-conformal function of f, and hence of $t=1/\sqrt{f}$. Since the mapping from the physical plane to the f-plane, and hence into the upper half t-plane, is one-to-one, with $\lambda=0$ on the free streamline image $\mathrm{Im}\, t=0$, it follows by reflection that ω is a (single-valued) quasi-conformal mapping of the neighborhood of $t=0$, and $\omega(t)$ approaches zero Hölder continuously at $t=0$. Hence, by the representation formula (5), we have $\omega(t)=g(\zeta(t))$, where $g(\zeta)$ is analytic, and $\zeta(t)$ is a quasi-conformal homeomorphism such that $\zeta(0)=0$. Further, since the dilatation of the mapping $\omega(t)$ can be made to satisfy (9) after a suitable affine transformation, it follows that in a neighborhood $|t|\leqq t_0$, $|\zeta(t)/t|$ is bounded from below and above as in (11). Thus, if $g(\zeta)$ has a zero of order n at $\zeta=0$, so that $\omega=c\zeta^n+\cdots$, we see that f has a singularity of order $\omega^{-2/n}$ at $\omega=0$. We conclude from the work of BERS and BERGMAN (cf. [3]) that f has an expansion in powers of $\omega^{2/n}$, $\omega^{-2/n}$ starting with a singular term of order $\omega^{-2/n}$. On $\lambda=0$ we may therefore write

$$\varphi(\vartheta, 0)=\frac{P\left(\vartheta^{\frac{2}{n}}\right)}{\vartheta^{\frac{2}{n}}} \tag{19}$$

where $P\left(\vartheta^{\frac{2}{n}}\right)$ is a power series in $\vartheta^{\frac{2}{n}}$ and $P(0)\neq 0$.

The connection between the z-plane and ω-plane is given by

$$x+iy=\int \frac{e^{i\theta}}{q}\left(d\varphi+\frac{i}{\varrho}d\psi\right)$$

so that the free streamlines, on which $q=q_0$ and $\psi=0$, are represented parametrically by

$$z(\vartheta)=\frac{1}{q_0}\int e^{i\vartheta}\varphi_\vartheta(\vartheta, 0)\,d\vartheta. \tag{20}$$

In the typical and most important case, when $n=1$, (19) gives

$$z(\vartheta)=\text{const.}\left(\frac{1}{\vartheta^2}+\frac{2i}{\vartheta}+\log|\vartheta|+\cdots\right), \tag{21}$$

showing that the free streamlines are asymptotic to a parabola,

$$y=C\,x^{\frac{1}{2}}, \tag{22}$$

just as in the theory of incompressible fluids. The fact that the free streamlines have a Hölder continuous tangent at infinity follows directly from (21). The asymptotic behavior when $n>1$ is found in the same way by inserting (19) into (20). In symmetric flow, the free streamlines are asymptotic to the curves

$$y^2=\text{const.}\,x^{-2k+1}, \qquad k=0, 1, 2, \ldots.$$

All results based on the comparison theorem and on the asymptotic behavior of the free streamlines — in particular the uniqueness of the infinite cavity — now carry over from incompressible fluids to subsonic flows.

An alternative derivation of the asymptotic shape (22) of the free streamlines was first obtained by P. BERG [2], in connection with his proof of existence of subsonic cavity flows. We remark that a simpler form of the preceding argument yields the analyticity of the free boundaries at all finite points. The behavior of the free streamlines at detachment from a fixed boundary can be discussed as in the incompressible case (see [5]), with only slight modifications based on the representation formula (5). The explicit dependence of the hydrodynamic force on the shape factor C in (22) can be derived from momentum considerations by means of the asymptotic flow properties described above.

References

[1] BELINSKII, P.: Behavior of a quasi-conformal mapping at an isolated singular point. L'vov. Gos. Univ. Uč. Zap. 29, Ser. Meh.-Mat. no. 6, 58–70 (1954). — [2] BERG, P.: On the existence of Helmholtz flows of a compressible fluid. Comm. Pure Appl. Math. (to appear). — [3] BERS, L.: Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics. New York: John Wiley 1958. — [4] BERS, L., and L. NIRENBERG: On a representation theorem for linear elliptic systems with discontinuous coefficients and its applications. Atti del Convegno Internaz. sulle Equazioni alle Derivate Parziali, 111–140, Trieste 1954. — [5] BIRKHOFF, G., and E. ZARANTONELLO: Jets, Wakes and Cavities. New York: Academic Press 1956. — [6] FINN, R., and D. GILBARG: Asymptotic behavior and uniqueness of plane subsonic flows. Comm. Pure Appl. Math. **10**, 23–63 (1957). — [7] FINN, R., and J. SERRIN: On the Hölder continuity of quasi-conformal and elliptic mappings. Trans. Amer. Math. Soc. **89**, 1–15 (1958). — [8] GILBARG, D.: The Phragmén-Lindelöf theorem for elliptic partial differential equations. J. Rational Mech. Anal. **1**, 411–417 (1952). — [9] GILBARG, D.: Jets and cavities. Encyclopedia of Physics, vol. 9. Heidelberg: Springer (to appear). — [10] GILBARG, D.: Comparison methods in the theory of subsonic flows. J. Rational Mech. Anal. **2**, 233–251 (1953). — [11] GILBARG, D., and J. SERRIN: On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations. J. d'Analyse Math. **4**, 309–340 (1955). — [12] HOPF, E.: A remark on linear elliptic differential equations of the second order. Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 791–793 (1952). — [13] MORREY, C. B.: On the solutions of quasilinear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 126–166 (1938). — [14] PFLUGER, A.: Quelques théorèmes sur une classe de fonctions pseudo-analytiques. C. R. Acad. Sci. Paris **231**, 1022–1023 (1950). — [15] TEICHMÜLLER, O.: Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildungen. Deutsche Math. **3**, 621–678 (1938). — [16] WITTICH, H.: Zum Beweis eines Satzes über quasikonforme Abbildungen. Math. Z. **51**, 278–288 (1948).

Dept. of Math., Stanford University, Stanford, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 18. April 1959)

NEHARI, Z.
Math. Zeitschr. 72, 175–183 (1959)

On a class of nonlinear integral equations

In memoriam LEON LICHTENSTEIN

By

ZEEV NEHARI

1. The nonlinear integral equations to be considered in this paper are of the form

$$y(x) = \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, F[y^2(t), t]\, dt, \tag{1}$$

where $K(x,t)$ is a symmetric, positive-definite kernel which is continuous for $x, t \in [a,b]$. Equation (1) is a special case of the more general equation

$$y(x) = \int_a^b K(x,t)\, \varphi[y(t), t]\, dt \tag{2}$$

treated by HAMMERSTEIN in the fundamental paper on the subject [3]. The special form (1) of equation (2) is suggested by the requirements — which are natural in many physical problems leading to equations of this type — that $y(x) \equiv 0$ be a solution of the equation, and that $-y(x)$ be a solution if the same is true of $y(x)$. We shall further assume that the function $F(u,x)$ is positive and continuous for $x \in [a,b]$ and $u \in [0,\infty]$, and that $F(u,x)$ increases monotonically with u for constant x.

In the literature on equation (2) [e.g. 1, 2, 3, 4, 5], the existence of a solution of (2) has been proved under a number of different assumptions regarding the nature of the function $\varphi(y,x)$. Most of the assumptions used in this work have the effect of preventing a too radical departure of $\varphi(y,x)$ from a linear function in y. In the present paper we shall adopt a different course and investigate the effect on the equation of a "strong" non-linearity of the function $yF(y^2,x)$. Such a non-linearity will be produced by the assumption

$$u_1^{-\varepsilon} F(u_1, x) < u_2^{-\varepsilon} F(u_2, x), \qquad (0 < u_1 < u_2 < \infty) \tag{3}$$

where ε is a fixed positive number. As an example of an equation satisfying these conditions we may mention

$$y(x) = \int_a^b K(x,t)\, p(t)\, y^{2n+1}(t)\, dt, \tag{4}$$

where $p(x)$ is continuous and positive in $[a,b]$ and n is a positive integer.

This research was supported by the United States Air Force Office of Scientific Research.

The following theorem shows that, under the assumptions made, equation (1) has a non-trivial solution, i.e., a solution which does not reduce to $y(x) \equiv 0$. It will then be shown that this result remains true if $yF(y^2, x)$ also contains a linear term, provided the latter is properly restricted. In general, these solutions will not be unique. As the example of the differential system

$$y'' + p(x)\, y^{2n+1} = 0, \qquad y(a) = y(b) = 0$$

(which is equivalent to equation (4) with a suitable $K(x, t)$) shows [6], an equation of type (1) may have a discrete infinity of solutions.

THEOREM I. *Let $K(x, t)$ be a symmetric, positive-definite kernel which is continuous for $x, t \in [a, b]$, and let $F(u, x)$ be positive and continuous for $x \in [a, b]$ and $u > 0$. If $F(u, x)$ is moreover subject to condition (3), the equation (1) has a non-trivial solution which is continuous in $[a, b]$.*

2. The proof will be based on a suitable variational problem. If the function $G(u, x)$ and the functional $J(u, v)$ are defined, respectively, by

$$G(u, x) = \int_0^u F(\eta, x)\, d\eta \tag{5}$$

and

$$J(u, v) = \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, u(x)\, F(u^2, x)\, v(t)\, F(v^2, t)\, dx\, dt, \tag{6}$$

the problem in question is

$$H(y) \equiv \int_a^b [y^2 F(y^2, x) - G(y^2, x)]\, dx = \min., \tag{7'}$$

under the side conditions

$$\int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx = J(y, y), \qquad y(x) \not\equiv 0. \tag{7''}$$

This problem will be considered within the class of functions $y(x)$ which possess a representation

$$y(x) = \int_a^b K(x, t)\, u(t)\, dt, \tag{8}$$

where $u(t)$ is continuous in $[a, b]$.

As a first step, we show that the first condition (7'') is a normalization condition, i.e., if $y(x)$ is an admissible function which is not subject to this identity there exists a positive constant α such that $y_1(x) = \alpha y(x)$ satisfies the first condition (7''). To prove this, we have to show that for any function having the representation (8) and not vanishing identically, the equation

$$\alpha^2 \int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2, x)\, dx = J(\alpha y, \alpha y) \tag{9}$$

has a positive root α.

By (8), we have

$$\int_a^b\int_a^b K(x,t)\,u(t)\,y(x)\,F(\alpha^2 y^2,\,x)\,dt\,dx = \int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2,\,x)\,dx.$$

From the positive-definite character of $K(x,t)$ it follows that

$$\alpha^2\left(\int_a^b\int_a^b K(x,t)\,u(t)\,y(x)\,F(\alpha^2 y^2,\,x)\,dt\,dx\right)^2 \leqq J(\alpha y,\alpha y)\int_a^b\int_a^b K(x,t)\,u(x)\,u(t)\,dt\,dx,$$

where J is the functional defined in (6). Hence,

$$\alpha^2\left[\int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2,\,x)\,dx\right]^2 \leqq J(\alpha y,\alpha y)\int_a^b\int_a^b K(x,t)\,u(x)\,u(t)\,dt\,dx.$$

With the abbreviation

$$A(\alpha) = J(\alpha y,\alpha y)\left[\alpha^2\int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2,\,x)\,dx\right]^{-1}, \tag{10}$$

this may be written

$$A(\alpha) \geqq C\int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2,\,x)\,dx,$$

where C is the positive constant defined by

$$C^{-1} = \int_a^b\int_a^b K(x,t)\,u(x)\,u(t)\,dt\,dx.$$

If $\alpha > 1$ we have, by (3), $F(\alpha^2 y^2,\,x) > \alpha^{2\varepsilon} F(y^2,\,x)$ and therefore

$$A(\alpha) \geqq C\,\alpha^{2\varepsilon}\int_a^b y^2 F(y^2,\,x)\,dx.$$

This shows that $A(\alpha)$ can be made arbitrarily large by choosing α large enough.

Our aim is to show that there exists a value α such that $A(\alpha) = 1$; in view of the definition (10) of $A(\alpha)$ this will be equivalent to (9). Since $A(\alpha)$ is evidently a continuous function of α, the existence of such a value will be proved if we can show that $A(\alpha)$ can be made arbitrarily small by a suitable choice of α. It follows from the definition (6) and the Schwarz inequality that

$$J^2(\alpha y,\alpha y) \leqq \int_a^b\int_a^b K^2(x,t)\,F(\alpha^2 y^2,\,x)\,F(\alpha^2 y^2,\,t)\,dt\,dx\left(\alpha^2\int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2,\,x)\,dx\right)^2,$$

i.e.

$$A^2(\alpha) \leqq \int_a^b\int_a^b K^2(x,t)\,F(\alpha^2 y,\,x)\,F(\alpha^2 y,\,t)\,dt\,dx.$$

If $\alpha < 1$ it thus follows from (3) that

$$A^2(\alpha) \leqq \alpha^{4\varepsilon}\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)\,F(y^2,\,x)\,F(y^2,\,t)\,dt\,dx,$$

and this shows that $A(\alpha)$ will indeed become small if α is taken small enough. In view of what was said before, this proves that it is always possible to choose a positive α such that $\alpha y(x)$ satisfies the first condition (7″).

3. Suppose now that $y(x)$ is an admissible function which satisfies conditions (7''), and define a function $v(x)$ by

$$v(x) = \alpha \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, F(y^2, t)\, dt, \tag{11}$$

where α is determined by the condition that $v(x)$ have the normalization (7''), i.e.,

$$\int_a^b v^2 F(v^2, x)\, dx = J(v, v). \tag{12}$$

By (11), (6), and (7''), we have

$$\int_a^b v(x)\, y(x)\, F(y^2, x)\, dx = \alpha \int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx,$$

whence

$$\alpha^2 \Big(\int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx \Big)^2 \leqq \int_a^b v^2(x)\, F(y^2, x)\, dx \int_a^b y^2(x)\, F(y^2, x)\, dx,$$

i.e.

$$\alpha^2 \int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx \leqq \int_a^b v^2(x)\, F(y^2, x)\, dx. \tag{13}$$

It further follows from (11) that

$$\int_a^b v^2(x)\, F(v^2, x)\, dx = \alpha \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, y(t)\, v(x)\, F(y^2, t)\, F(v^2, x)\, dt\, dx = \alpha J(y, v).$$

Since, by (7'') and (12),

$$J^2(y, v) \leqq J(y, y)\, J(v, v) = \int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx \int_a^b v^2 F(v^2, x)\, dx,$$

this implies that

$$\int_a^b v^2 F(v^2, x)\, dx \leqq \alpha^2 \int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx.$$

Combining this inequality with (13), we obtain

$$\int_a^b v^2 F(v^2, x)\, dx \leqq \int_a^b v^2 F(y^2, x)\, dx. \tag{14}$$

Since $F(u, x)$ is an increasing function of u, the function $G(u, x)$ defined in (5) is convex in u (for constant x) and we have

$$G(\eta, x) \geqq G(\zeta, x) + (\eta - \zeta) F(\zeta, x) \tag{15}$$

for any positive ζ and η. Hence,

$$G(v^2, x) \geqq G(y^2, x) + (v^2 - y^2) F(y^2, x)$$

and thus, if $H(y)$ denotes the functional (7'),

$$\begin{aligned} H(v) &\leqq \int_a^b [v^2 F(v^2, x) - G(y^2, x) - (v^2 - y^2) F(y^2, x)]\, dx \\ &= H(y) + \int_a^b v^2 [F(v^2, x) - F(y^2, x)]\, dx. \end{aligned}$$

In view of (14), this leads to the inequality

$$H(v) \leqq H(y). \tag{16}$$

This shows that *the transformation* $y(x) \to v(x)$ *given by* (11) *and the normalization condition* (12) *has the effect of diminishing the functional* (7′) *unless* $y(x)$ *is a solution of the integral equation* (1). That the latter is the only case in which we can have equality in (16) follows from the fact that, because of the way the Schwarz inequality was used in the derivation of (14), the sign of equality in (14) is possible only if $y(x)$ and $v(x)$ are proportional. Inserting this in (11) and observing (7″) we find that $y(x)$ is indeed a solution of (1).

We note, incidentally, that the admissibility condition (8) for the extremal problem (7) may be replaced by the condition that $y(x)$ be continuous in $[a, b]$. Indeed, in view of (11), $v(x)$ satisfies (8) automatically if $y(x)$ is continuous, and (16) shows that for the purpose of minimizing (7′) it is sufficient to consider functions $v(x)$ defined by (11) and (12).

4. We next show that, under the conditions (7″), the functional $H(y)$ defined in (7′) has a positive lower bound. By (3) and (5), we have

$$G(\eta, x) = \int_0^\eta F(t, x)\, dt = \int_0^\eta t^\varepsilon [t^{-\varepsilon} F(t, x)]\, dt$$

$$\leqq \eta^{-\varepsilon} F(\eta, x) \int_0^\eta t^\varepsilon\, dt = (1+\varepsilon)^{-1} \eta F(\eta, x).$$

Hence,

$$H(y) \equiv \int_a^b [y^2 F(y^2, x) - G(y^2, x)\, dx \geqq \varepsilon (1+\varepsilon)^{-1} \int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx. \tag{17}$$

We proceed to show that the right-hand side of (17) has a positive lower bound. By hypothesis, $K(x, t)$ is continuous for $x, t \in [a, b]$. Hence there exists a positive constant M such that $|K(x, t)| \leqq M$, and it follows from (7″) and (6) that

$$\int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx \leqq M \left| \int_a^b y\, F(y^2, x)\, dx \right|^2 \leqq M \int_a^b F(y^2, x)\, dx \int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx.$$

Since $y(x)$ was assumed not to vanish identically, this implies

$$M^{-1} \leqq \int_a^b F(y^2, x)\, dx. \tag{18}$$

If m is an arbitrary positive constant, we denote by β and γ the subsets of $[a, b]$ in which, respectively, $|y(x)| \leqq m$ and $|y(x)| > m$. We then have

$$\begin{aligned} \int_a^b F(y^2, x)\, dx &\leqq \int_\beta F(m^2, x)\, dx + m^{-2} \int_\gamma y^2 F(y^2, x)\, dx \\ &\leqq \int_a^b F(m^2, x)\, dx + m^{-2} \int_a^b y^2 F(y^2, x)\, dx. \end{aligned} \tag{19}$$

According to (3), $\int_a^b F(m^2, x)\,dx$ varies from 0 to ∞ if m ranges over the same interval. There exists therefore a positive constant m, independent of $y(x)$, such that $\int_a^b F(m^2, x)\,dx = (2M)^{-1}$, where M is the constant appearing in (18). It thus follows from (18) and (19) that

$$\int_a^b y^2 F(y^2, x)\,dx \geqq m^2(2M)^{-1} = C_0, \tag{20}$$

where C_0 is a positive constant which is independent of x. Combining this with (17), we finally obtain

$$H(y) \geqq \varepsilon(1+\varepsilon)^{-1} C_0 = C_1 > 0, \tag{21}$$

where the constant C_1 again does not depend on $y(x)$. It may be noted that, if the condition $y(x) \equiv 0$ is dropped, the variational problem (7) has the trivial solution $y(x) \equiv 0$.

5. Let now $y_0(x)$ be a functional which is continuous in $[a, b]$ and satisfies the conditions (7''), and let $\{y_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ be the sequence of functions obtained from $y_0(x)$ by applying successively the procedure indicated by (11) and (12), i.e.,

$$y_{n+1}(x) = \alpha_n \int_a^b K(x, t)\, y_n(t) F(y_n^2, t)\,dt, \tag{22}$$

where α_n is determined by

$$\int_a^b y_{n+1}^2 F(y_{n+1}^2, x)\,dx = J(y_{n+1}, y_{n+1}). \tag{23}$$

In view of (16), we have $H(y_{n+1}) \leqq H(y_n)$, and we may therefore conclude from (17) that there exists a positive constant A such that

$$\int_a^b y_n^2 F(y_n^2, x)\,dx \leqq A \tag{24}$$

for all positive n. Since $F(u, x)$ is an increasing function of u, we have

$$0 \leqq \int_a^b (y_{n+1}^2 - y_n^2)\,[F(y_{n+1}^2, x) - F(y_n^2, x)]\,dx,$$

and thus

$$\int_a^b y_{n+1}^2 F(y_n^2, x)\,dx \leqq \int_a^b [y_{n+1}^2 F(y_{n+1}^2) + y_n^2 F(y_n^2, x)]\,dx \leqq 2A.$$

It follows therefore from (13) and (20) that $\alpha_n^2 \leqq 2A\,C_0^{-1} = B^2$, where B does not depend on n. Applying this to (22), we obtain

$$y_{n+1}^2(x) \leqq B^2 M^2 \Big(\int_a^b |y_n|\,F(y_n^2, t)\,dt\Big)^2 \leqq B^2 M^2 \int_a^b F(y_n^2, t)\,dt \int_a^b y_n^2 F(y_n^2, t)\,dt.$$

Since, by (24) and (19) (with $m=1$),

$$\int_a^b F(y_n^2, t)\, dt \leqq \int_a^b F(1, x)\, dx + A = A_1,$$

this shows the functions $|y_{n+1}(x)|$ are uniformly bounded.

If x_1 and x_2 are two values in $[a, b]$, it follows from (22) that

$$y_{n+1}(x_2) - y_{n+1}(x_1) = \alpha_n \int_a^b [K(x_2, t) - K(x_1, t)]\, y_n F(y_n^2, t)\, dt.$$

In view of the uniform boundedness of the constants α_n and the functions $|y_n(x)|$, there exists a constant A_2, independent of n, such that

$$|y_{n+1}(x_2) - y_{n+1}(x_1)| \leqq A_2 \int_a^b |K(x_2, t) - K(x_1, t)|\, dt.$$

Because of the continuity of $K(x, t)$, this shows that the sequence of functions $\{y_n(x)\}$ is equicontinuous. Since it is also uniformly bounded, there will thus exist a subsequence $y_n(x)$ converging uniformly to a continuous function $y(x)$, which — as shown by (18) — cannot reduce to the constant zero.

It is now easy to show that this function $y(x)$ is a solution of (1). It is, however, not necessarily the solution of the extremal problem (7). To obtain the solution of (7), we begin with a sequence of admissible functions $\{y_{n,0}\}$ for which $\lim_{n\to\infty} H(y_{n,0}) = \lambda = \inf H(y)$, where $H(y)$ is the functional (7') (we recall that, by (21), $\lambda > 0$). (17) shows that all functions $y_{n,0}(x)$ satisfy the inequality (24) with a suitable constant A. If we now define the sequence $y_{n,1}(x)$, $y_{n,2}(x)$, ... by means of the recursion formula (22) and the normalization condition (23), the preceding argument shows that the diagonal sequence $\{y_{n,n}(x)\}$ is again uniformly bounded and equicontinuous.

Since, by (16), $H(y_{n,m+1}) \leqq H(y_{n,m})$, the limit $y(x)$ of a uniformly converging subsequence must satisfy $H(y) \leqq \lambda$, and therefore $H(y) = \lambda$. If $v(x)$ is the function obtained from $y(x)$ by means of (11) and (12), it follows from (16) and the definition of λ that $H(v) = H(y) = \lambda$. But, as shown in Section 3, this implies that $y(x)$ is a solution of (1). This completes the proof of Theorem I. It was pointed out above that an equation of type (1) may have many solutions. Whether the solution of (1) which yields the solution of the variational problem (7) is unique, remains an open question.

6. As already mentioned, Theorem I can be extended to a somewhat more general type of equation.

THEOREM II. *Let $K(x, t)$, $F(u, x)$, a, b have the same meaning as in Theorem* I, *and let $F_1(u, x) = p(x) + F(u, x)$, where $p(x)$ is continuous and non-negative in $[a, b]$. If $\Lambda > 1$, where Λ is the lowest eigenvalue of the linear integral equation*

$$w(x) = \Lambda \int_a^b K(x, t)\, [p(x)\, p(t)]^{\frac{1}{2}}\, w(t)\, dt, \tag{25}$$

then the equation

$$y(x) = \int_a^b K(x,t)\, y(t)\, F_1(y^2, t)\, dt \tag{26}$$

has a non-trivial continuous solution.

If $G_1(u, x)$ denotes the function obtained from (5) if $F(u, x)$ is replaced by $F_1(u, x)$, we have $y^2 F_1(y^2, x) - G_1(y^2, x) = y^2 F(y^2, x) - G(y^2, x)$. Hence, the functional (7′) remains unchanged by this substitution. However, to make the variational problem (7) applicable to the present case we have to show that any non-trivial function represented by (8) can be normalized as indicated in (7″). As pointed out, this amounts to showing the existence of a positive constant α such that (9) (with F replaced by F_1) is satisfied. If we write

$$A_1(\alpha) = J_1(\alpha y, \alpha y) \left[\alpha^2 \int_a^b y^2 F_1(\alpha^2 y^2, x)\, dx\right]^{-1}, \tag{27}$$

where J_1 is defined as in (6) except that F_1 take the place of F, we thus have to solve the equation $A_1(\alpha) = 1$.

We first remark that, since $K(x, t)$ is positive-definite and $F_1(u, x) = p(x) + F(u, x)$,

$$\{[J(\alpha y, \alpha y)]^{\frac{1}{2}} - \alpha [J_0(y, y)]^{\frac{1}{2}}\}^2 \leqq J_1(\alpha y, \alpha y) \leqq \{[J(\alpha y, \alpha y)]^{\frac{1}{2}} + \alpha [J_0(y, y)]^{\frac{1}{2}}\}^2,$$

where

$$J_0(y, y) = \int_a^b \int_a^b K(x, t)\, p(x)\, p(t)\, y(x)\, y(t)\, dt\, dx. \tag{28}$$

Using the quantity $A(\alpha)$ defined in (10), we may write this pair of inequalities in the form

$$\left\{\begin{aligned} &\left\{A^{\frac{1}{2}}(\alpha) \left[\int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2, x)\, dx\right]^{\frac{1}{2}} - [J_0(y, y)]^{\frac{1}{2}}\right\}^2 \\ &\quad \leqq A_1(\alpha) \left[\int_a^b p(x)\, y^2\, dx + \int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2, x)\, dx\right] \\ &\quad \leqq \left\{A^{\frac{1}{2}}(\alpha) \left[\int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2, x)\, dx\right]^{\frac{1}{2}} + [J_0(y, y)]^{\frac{1}{2}}\right\}^2, \end{aligned}\right. \tag{29}$$

where $A_1(\alpha)$ is given by (27). As shown in Section 2, both $A(\alpha)$ and $\int_a^b y^2 F(\alpha^2 y^2, x)\, dx$ can be made arbitrarily large by choosing a sufficiently large α, and it follows therefore from the left-hand inequality (29) that $A_1(\alpha) \to \infty$ for $\alpha \to \infty$. As likewise shown in Section 2, the two expressions just mentioned tend to zero for $\alpha \to 0$. For $\alpha \to 0$, the right-hand inequality (29) will therefore reduce to

$$\limsup_{\alpha \to 0} A_1(\alpha) \leqq J_0(y, y) \left[\int_a^b p(x)\, y^2\, dx\right]^{-1}, \tag{30}$$

where $J_0(y, y)$ is given by (28).

By classical results, the right-hand side of (30) cannot exceed the value Λ^{-1}, where Λ is the lowest eigenvalue of the linear integral equation (25). Since, by hypothesis, $\Lambda > 1$, we may therefore conclude from (30) that $A_1(\alpha)$ is — for small positive α — capable of values smaller than 1. In view of the fact that $A_1(\alpha) \to \infty$ for $\alpha \to \infty$, it therefore follows from the continuity of $A_1(\alpha)$ that the equation $A_1(\alpha) = 1$ indeed has a positive solution. As remarked above, this is equivalent to the possibility of normalizing a non-trivial admissible function so as to satisfy condition (7″) (with F replaced by F_1).

The remainder of the proof of Theorem II is identical with that of Theorem I.

References

[1] Dolph, C. L.: Nonlinear integral equations of the Hammerstein type. Trans. Amer. Math. Soc. **66**, 289—307 (1949). — [2] Golomb, M.: Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Z. **39**, 45—75 (1935). — [3] Hammerstein, A.: Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. Acta Math. **54**, 117—176 (1930). — [4] Iglisch, R.: Existenz- und Eindeutigkeitssätze bei nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Ann. **108**, 161—189 (1933). — [5] Krasnosel'skii, M. A.: Some problems of nonlinear analysis. Uspehi Mat. Nauk (N. S.) **9**, no. 3 (61), 57—114 (1954). — Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2, **10**, 57—114 (1958). — [6] Moore, R. A., and Z. Nehari: Non-oscillation theorems for a class of non-linear differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **93**, 30—52 (1959).

Carnegie Institute of Technology, Pittsburgh, Pa. (U.S.A.)

(Eingegangen am 21. Mai 1959)

MALGRANGE, B.
Math. Zeitschr. 72, 184–186 (1959)

Sur une inégalité de F. Treves

A la mémoire de LEON LICHTENSTEIN

Par

BERNARD MALGRANGE

1. Nous commencerons par étendre aux distributions à support compact [4] une identité démontrée par TREVES pour les opérateurs différentiels à coefficients constants ([6], chap. 4). Soit $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{E}'$) l'espace des fonctions indéfiniment dérivables (resp. l'espace des distributions) à support compact de n variables réelles $x=(x_1, \ldots, x_n)$. Nous utiliserons les notations suivantes: $x^2=\sum x_i^2$, $xy=\sum x_i y_i$; en outre, k désignant un ensemble de n entiers $\geqq 0$, $(k_1, \ldots, k_n)$ nous poserons $|k|=k_1+\cdots+k_n$, $k!=k_1!\ldots k_n!$, $x^k=x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n}$. Enfin, nous noterons $\int \mu(x)\,\varphi(x)\,dx$ le produit scalaire de $\mu\in\mathscr{E}'$ avec $\varphi\in\mathscr{D}$.

Soit alors $\mu\in\mathscr{E}'$, et soit μ^* la distribution $\overline{\mu(-x)}$. A μ, nous associerons les deux noyaux [5] suivants (adjoints l'un de l'autre):

$$\psi \to S(\mu)\,\psi = e^{\frac{x^2}{4}}\left(\mu * e^{-\frac{x^2}{4}}\psi\right); \qquad \psi \to T(\mu)\,\psi = e^{-\frac{x^2}{4}}\left(\mu^* * e^{\frac{x^2}{4}}\psi\right) \qquad (\psi\in\mathscr{D}).$$

Pour tout $x\in R^n$, on trouve immédiatement

$$[S(\mu)\,\psi](x) = \int e^{\frac{xy}{2}-\frac{y^2}{4}}\,\mu(y)\,\psi(x-y)\,dy$$

$$[T(\mu)\,\psi](x) = \int e^{\frac{xy}{2}+\frac{y^2}{4}}\,\overline{\mu(y)}\,\psi(x+y)\,dy.$$

Posons, pour tout $\varphi\in\mathscr{D}$: $\|\varphi\|^2=\int|\varphi|^2\,dx$. Nous avons alors:

$$\|S(\mu)\,\psi\|^2 = \int e^{\frac{xy}{2}+\frac{xz}{2}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}}\,\mu(y)\,\overline{\mu(z)}\,\psi(x-y)\,\overline{\psi(x-z)}\,dx\,dy\,dz$$

d'où, en prenant comme nouvelles variables $u=x-y$, y, z:

$$(1)\quad \|S(\mu)\,\psi\|^2 = \int e^{\frac{yz}{2}}\,e^{\frac{uy}{2}+\frac{uz}{2}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}}\,\mu(y)\,\overline{\mu(z)}\,\psi(u)\,\overline{\psi(u+y-z)}\,du\,dy\,dz.$$

De même;

$$(2)\quad \|T(\mu)\,\psi\|^2 = \int e^{-\frac{yz}{2}}\,e^{\frac{uy}{2}+\frac{uz}{2}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}}\,\mu(y)\,\overline{\mu(z)}\,\psi(u)\,\overline{\psi(u+y-z)}\,du\,dy\,dz.$$

Remarquons maintenant que l'on a:

$$(3)\qquad e^{\frac{yz}{2}} = e^{-\frac{yz}{2}}\sum_{|k|=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\,y^k\,z^k.$$

Remplaçons dans (1) $e^{\frac{yz}{2}}$ par la série qui figure au second membre de (3); après interversion des signes $\sum$ et $\int$ (ce qui est permis, puisque la série précédente est uniformément absolument convergente sur tout compact, ainsi que les séries dérivées), nous obtiendrons, compte tenu de (2), le

THÉORÈME 1. *Pour tout*

$$\psi \in \mathscr{D}, \quad \|S(\mu)\psi\|^2 = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|T(x^k \mu)\psi\|^2.$$

2. TREVES, dans l'article cité, déduit de cette formule une importante inégalité sur les équations aux dérivées partielles à coefficients constants, qui a été utilisée par HÖRMANDER [2] pour étudier «l'unicité du problème de Cauchy». En suivant la même méthode, nous allons en donner une autre application.

Considérons N points distincts $a_1, \ldots, a_N \in R^n$, $a_i \neq 0$, et $N+1$ opérateurs différentiels (à n variables) $D_0, \ldots, D_N$; et prenons pour μ la distribution: $D_0\delta + \sum D_i \delta_{a_i}$ (δ_a = masse $+1$ au point a, $\delta = \delta_0$). L'opérateur $\varphi \to \mu * \varphi$ est alors un opérateur différentiel aux différences finies à coefficients constants.

Soit $P(x)$ un polynome possédant les propriétés suivantes:

a) P s'annule ainsi que toutes ses dérivées d'ordre $\leqq$ (ordre de D_i), au point a_i ($i = 1, \ldots, N$).

b) $P-1$ s'annule ainsi que toutes ses dérivées d'ordre $\leqq$ (ordre de D_0) à l'origine. On a évidemment $P(x)\,\mu = D_0\delta$; et, d'après le théorème 1, pour tout $\psi \in \mathscr{D}$:

$$\|S\big(P(x)\,\mu\big)\psi\|^2 = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|T\big(x^k P(x)\,\mu\big)\psi\|^2.$$

Dans la série qui figure au second membre, tous les termes sont nuls sauf un nombre fini, puisque $x^k D_0\delta = 0$ lorsque $k >$ (ordre de D_0); or, chaque terme de cette série est évidemment majoré par une combinaison linéaire finie des termes de la série $\sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|T(x^k\mu)\psi\|^2$. Par conséquent, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $\psi \in \mathscr{D}$, on ait: $\|S\big(P(x)\mu\big)\psi\|^2 \leqq C \|S(\mu)\psi\|^2$. Posons maintenant $\psi = e^{-\frac{x^2}{4}}\varphi$: revenant à la définition de μ et $S(\mu)$, cette inégalité s'écrit:

$$\int e^{\frac{x^2}{2}} |D_0\varphi|^2\,dx \leqq C \int e^{\frac{x^2}{2}} |D_0\varphi + \sum D_i \varphi(x - a_i)|^2\,dx$$

pour tout $\varphi \in \mathscr{D}$; changeant un peu les notations, nous obtenons en particulier le

THÉORÈME 2. *Soient b_i N points distincts de R^n et D_i N opérateurs différentiels (à n variables) à coefficients constants. Pour tout compact $K \subset R^n$, il existe une constante $C(K)$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}$ à support dans K, on ait:*

$$\sum \|D_i\varphi\| \leqq C(K) \|\sum D_i \varphi(x - b_i)\|.$$

Indiquons, pour terminer, deux conséquences simples de ce résultat:

a) La comparaison (au sens de HÖRMANDER [1], chap. 2) des opérateurs différentiels aux différences finies à coefficients constants se ramène immédiatement à celle des opérateurs différentiels à coefficients constants, étudiée dans [1].

b) Soit g une distribution (non nécessairement à support compact) de la forme $\sum D_i h_i$, où les h_i sont des fonctions localement-L^2; il existe une fonction f localement-L^2 telle que l'on ait:

$$\sum D_i f(x - b_i) = g$$

(le raisonnement est calqué sur ceux de [3] chap. 1). D'après [3], ce résultat s'applique notamment à toute fonction g localement-L^2.

Bibliographie

[1] HÖRMANDER, L.: On the theory of general partial differential operators. Acta Math. **94**, 160–248 (1955). — [2] HÖRMANDER, L.: On the uniqueness of the Cauchy problem. Math. Scand. **6** (1958). — [3] MALGRANGE, B.: Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles. Ann. Inst. Fourier **6**, 272–354 (1955/56). — [4] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions. Paris: Hermann 1950/51. — [5] SCHWARTZ, L.: Théorie des noyaux. Proc. Int. Congress Math. 1952. — [6] TREVES, F.: Relations de domination entre opérateurs différentiels. Acta Math. **101**, 1–139 (1959).

Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg (France)

(Eingegangen am 1. Juni 1959)

JARNÍK, V.
Math. Zeitschr. 72, 187–191 (1959)

Eine Bemerkung über diophantische Approximationen

LEON LICHTENSTEIN zum Gedächtnis

Von

VOJTĚCH JARNÍK

Alle Zahlen in dieser Note sind reell. Es sei

$$\Theta = \begin{pmatrix} \vartheta_{11} \cdots \vartheta_{1m} \\ \cdots\cdots \\ \vartheta_{n1} \cdots \vartheta_{nm} \end{pmatrix} \tag{1}$$

eine Matrix von $n\,m$ Zahlen. Für $t \geqq 1$ setze man

$$\psi_\Theta(t) = \operatorname*{Min}_{0 < x \leqq t} \left(\operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq n} \left| \sum_{j=1}^{m} \vartheta_{ij} x_j + x_{m+i} \right| \right)$$

mit $x = \operatorname{Max}(|x_1|, \ldots, |x_m|)$, wobei sich Min nur auf *ganze* Zahlen $x_1, \ldots, x_{m+n}$ bezieht. Die Funktion ψ_Θ mißt die Genauigkeit, mit welcher das System

$$\sum_{j=1}^{m} \vartheta_{ij} x_j + x_{m+i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

in ganzen $x_1, \ldots, x_{m+n}$ lösbar ist (mit Ausschluß der trivialen Nullösung). Wir stellen zunächst einige teils triviale, teils bekannte Tatsachen zusammen.

A. Bekanntlich ist $\psi_\Theta(t) < t^{-\frac{m}{n}}$ (vgl. z. B. [1], S. 13).

B. Die Menge derjenigen Θ, für welche $\psi_\Theta(t) = o\left(t^{-\frac{m}{n}}\right)$ $(t \to +\infty)$, hat das Maß Null ([1], S. 92 oder [5], S. 172); solche Θ nennt KHINTCHINE singulär. Dabei wird in dieser Note jede Matrix Θ als Punkt des $n\,m$-dimensionalen Raumes E^{nm} mit den Koordinaten $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \ldots, \vartheta_{nm}$ gedeutet.

C. Ist $m = n = 1$, ϑ_{11} irrational, so ist $\psi_\Theta(t) = \Omega(t^{-1})$; man vergleiche dies mit **A** ([1], S. 92 oder [4], S. 172, Satz I).

D. Ein System von Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ $(k \geqq 1)$ heiße *linear unabhängig*, wenn für ganze c_i stets $c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k + c_0 \neq 0$ ist, mit Ausnahme des Falles $c_0 = c_1 = \cdots = c_k = 0$. Das System $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ heiße *algebraisch unabhängig*, wenn für jedes Polynom $F(x_1, \ldots, x_k)$ mit ganzen Koeffizienten $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \neq 0$ ist, solange F nicht das Polynom Null ist.

E. Im Falle $m = 1$, $n > 1$ ist $\limsup_{t \to +\infty} t\psi_\Theta(t) = +\infty$ dann und nur dann, wenn es unter den Zahlen $\vartheta_{11}, \ldots, \vartheta_{n1}$ mindestens zwei linear unabhängige gibt (vgl. [3], S. 199, Satz 9; dort erscheint dieses Resultat als eine Folge allgemeinerer Sätze, man kann es aber auch direkt ziemlich einfach beweisen).

F. Falls die ϑ_{ij} in (1) linear unabhängig sind, so ist offenbar $\psi_\Theta(t)>0$ für jedes $t\geqq 1$.

G. Wenn Ξ aus Θ durch Hinzufügung einer Spalte entsteht, so ist $\psi_\Xi(t)\leqq \psi_\Theta(t)$.

H. Es sei $F(x_1, \ldots, x_p)$ ein Polynom, das in jeder Veränderlichen höchstens vom Grad k ist. Für $i=1, 2, \ldots, p$ sei N_i eine Menge von $k+1$ Zahlen. Wenn für jedes System $b_1, \ldots, b_p$ mit $b_1\in N_1, \ldots, b_p\in N_p$ gilt $F(b_1, \ldots, b_p)=0$, so sind alle Koeffizienten von F gleich Null. Beweis durch Induktion nach p (man entwickle F nach Potenzen von x_p).

J. Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ algebraisch unabhängig. Dann bilden diejenigen α_{k+1}, für welche das System $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ algebraisch abhängig ist, eine abzählbare Menge.

Satz. *Es sei $m\geqq 1$, $n\geqq 1$, $m+n>2$; $\varphi(t)$ sei positiv und abnehmend für $t\geqq 1$, $\varphi_1(t)$ sei positiv für $t\geqq 1$, $\varphi_1(t)\to+\infty$ für $t\to+\infty$. Es sei $M_{n,m}$ die Menge derjenigen Matrizen* (1), *für welche folgendes gilt:*

I. Das System der Zahlen ϑ_{ij} $(1\leqq i\leqq n,\ 1\leqq j\leqq m)$ ist algebraisch unabhängig.

II. Im Falle $m=1$ ist $\psi_\Theta(t)=O\left(\frac{\varphi_1(t)}{t}\right)$; im Falle $m>1$ ist $\psi_\Theta(t)=O\left(\varphi(t)\right)$.

Dann ist $M_{n,m}$ eine nichtleere Menge. Genauer: Ist G eine beliebige nichtleere offene Menge in E^{nm}, so hat die Projektion des Durchschnitts $G\cap M_{n,m}$ auf jede Koordinatenachse die Mächtigkeit des Kontinuums.

Bemerkung. Der Satz zeigt, daß die in **E** für den Fall $m=1$, $n>1$ gegebene Abschätzung definitiv ist. Satz und Beweis gelten auch für $m=n=1$, haben aber dann wegen **A** keinen Wert. Die Existenz von algebraisch unabhängigen ϑ_{ij} mit der Eigenschaft II wurde im Falle $n<m$ von CHABAUTY und LUTZ [2] bewiesen; im Falle $n\geqq m$ bekommen sie weniger vollständige Resultate. Fordert man nur *lineare* Unabhängigkeit, so findet man derartige Existenzsätze bereits bei KHINTCHINE ([4], S. 173—177, vgl. auch [1], S. 94). Zum Unterschied zu den mehr geometrisch gehaltenen Beweisen von KHINTCHINE und CHABAUTY-LUTZ ist der folgende Beweis rein arithmetisch.

Beweis. 1. Die Fälle $m=1$, $m=2$. Es seien φ, φ_1 den Voraussetzungen gemäß gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß $t^{-1}\varphi_1(t)$ für $t\geqq 1$ nicht wächst. In der Tat, man kann offenbar zunächst annehmen, daß $\varphi_1(t)\geqq 1$ für $t\geqq 1$, und dann ersetze man $\varphi_1(t)$ durch

$$\varphi_2(t)=t\cdot\inf_{1\leqq\tau\leqq t}\tau^{-1}\varphi_1(\tau)\leqq\varphi_1(t).$$

Wegen $\varphi_1(t)\to+\infty$ ist nämlich auch $\varphi_2(t)\to+\infty$; denn, ist $\varphi_1(t)\geqq K>0$ für $t\geqq C\geqq 1$, so ist

$$\varphi_2(t)\geqq t\cdot\operatorname{Min}\left(\frac{1}{C}, \frac{K}{t}\right)=K \quad \text{für} \quad t\geqq\operatorname{Max}(KC, 1).$$

Man ordne nun alle Polynome $F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ mit ganzzahligen Koeffizienten und mit Ausschluß des Polynoms Null in eine Folge

$$(\mathfrak{F}) \qquad F_1, F_2, F_3, \ldots$$

so, daß jedes derartige Polynom auf unendlich vielen Stellen der Folge auftritt und daß der Grad von F_r in jeder Veränderlichen höchstens gleich r ist. Dann wähle man eine Folge von natürlichen Zahlen

$$q_1 < Q_1 < q_2 < Q_2 < \cdots \tag{2}$$

so, daß für $r = 1, 2, \ldots$ folgendes gilt:

$$\frac{r+1}{q_{r+1}} < \frac{1}{q_r' Q_r'}, \tag{3}$$

$$\frac{2(r+1)q_r}{q_{r+1}} < \varphi(Q_r), \quad \frac{2(r+1)Q_r}{Q_{r+1}} < \varphi(q_{r+1}), \tag{4}$$

$$2(r+1)q_r < \varphi_1(q_{r+1}); \tag{5}$$

dazu genügt es, daß (2) hinreichend rasch wächst. Aus (2), (3) folgt noch für $r \geqq 1$

$$\frac{r+2}{Q_{r+2}} < \frac{r+2}{q_{r+2}} < \frac{1}{4Q_{r+1}} < \frac{1}{2}\frac{r+1}{Q_{r-1}}, \quad \frac{r+2}{q_{r+2}} < \frac{1}{4q_{r+1}} < \frac{1}{2}\frac{r+1}{q_{r-1}}. \tag{6}$$

Wir gehen nun von einer bestimmten Folge (2) aus, wählen $2n$ ganze Zahlen $p_{1,i}, P_{1,i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ und ordnen jeder Folge

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2 \cdots \quad (\varepsilon_r = 1 \quad \text{oder} \quad -1, \tag{7}$$

$2n$ Zahlen ϑ_i, η_i $(i = 1, \ldots, n)$ auf folgende Weise zu:

Man konstruiere für $r \geqq 2$, $1 \leqq i \leqq n$ ganze Zahlen $p_{r,i}, P_{r,i}$ nach folgender Vorschrift: Sind diese Zahlen für ein $r \geqq 1$ definiert, so wähle man $p_{r+1,i}, P_{r+1,i}$ (vgl. **H**) so, daß

$$\begin{cases} 0 < \varepsilon_r \left(\dfrac{p_{r+1,i}}{q_{r+1}} - \dfrac{p_{r,i}}{q_r} \right) \leqq \dfrac{r+1}{q_{r-1}}, \\ 0 < \varepsilon_r \left(\dfrac{P_{r+1,i}}{Q_{r+1}} - \dfrac{P_{r,i}}{Q_r} \right) \leqq \dfrac{r+1}{Q_{r-1}}, \end{cases} \tag{8}$$

$$F_r\left(\frac{p_{r+1,1}}{q_{r+1}}, \ldots, \frac{p_{r-1,n}}{q_{r-1}}, \ \frac{P_{r+1,1}}{Q_{r+1}}, \ldots, \frac{P_{r-1,n}}{Q_{r-1}} \right) \neq 0. \tag{9}$$

Dabei denke man sich alle Systeme $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ $(a_i, b_i$ ganz) von vornherein in eine Folge geordnet, und nehme für $(p_{r+1,1}, \ldots, p_{r+1,n}, P_{r+1,1}, \ldots, P_{r+1,n})$ das erste Glied dieser Folge, für welches (8), (9) gilt, so daß die Zahlen $p_{r+1,i}, P_{r+1,i}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ durch $p_{11}, \ldots, p_{1n}, P_{11}, \ldots, P_{1n}, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ eindeutig bestimmt sind. Man setze dann

$$\vartheta_i = \lim_{r \to \infty} \frac{p_{r,i}}{q_r}, \quad \eta_i = \lim_{r \to \infty} \frac{P_{r,i}}{Q_r},$$

so daß [vgl. (6)]

$$\left| \vartheta_i - \frac{p_{r,i}}{q_r} \right| = \left| \sum_{s=r}^{\infty} \left(\frac{p_{s+1,i}}{q_{s+1}} - \frac{p_{s,i}}{q_s} \right) \right| \leqq \sum_{s=r}^{\infty} \frac{s+1}{q_{s+1}} < 2\frac{r+1}{q_{r-1}} \tag{10}$$

und analog

$$\left|\eta_i - \frac{P_{r,i}}{Q_r}\right| < 2\,\frac{r+1}{Q_{r+1}}. \tag{11}$$

Daraus sieht man:

1. Wenn bei gegebener Folge (2) und bei gegebenen $p_{1,i}$, $P_{1,i}$ statt (7) eine andere Folge $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots$ gewählt wird, wo also für ein $k \geqq 1$ gilt $\varepsilon_k' \neq \varepsilon_k$, $\varepsilon_g' = \varepsilon_g$ für $1 \leqq g < k$, so bekommt man neue Zahlen $p_{r,i}', \vartheta_i', P_{r,i}', \eta_i'$, und es ist [vgl. (8), (10), (6)]

$$p_{k,i}' = p_{k,i}, \quad p_{k+1,i}' \neq p_{k+1,i}, \quad |\vartheta_i' - \vartheta_i| \geqq \frac{1}{q_{k+1}} - 4\,\frac{k+2}{q_{k+2}} > 0,$$

also $\vartheta_i' \neq \vartheta_i$ und ebenso $\eta_i' \neq \eta_i$.

2. Ist G eine nichtleere offene Menge, so kann man durch eine geeignete Wahl von $q_1, p_{1,i}, Q_1, P_{1,i}$ erreichen, daß alle Punkte $(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ (für alle Folgen (7)) in G liegen. Denn nach (10), (11) ist

$$\left|\vartheta_i - \frac{p_{1,i}}{q_1}\right| < \frac{4}{q_2} < \frac{4}{q_1}, \quad \left|\eta_i - \frac{P_{1,i}}{Q_1}\right| < \frac{4}{Q_1}.$$

3. Man setze

$$\Xi = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vartheta_n \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{Z} = \begin{pmatrix} \vartheta_1, & \eta_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \vartheta_n, & \eta_n \end{pmatrix}.$$

Dann ist für $q_r \leqq t < q_{r+1}$ [nach (10), (5)]

$$\psi_\Xi(t) \leqq \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq n} |q_r \vartheta_i - p_{r,i}| < \frac{\varphi_1(q_{r+1})}{q_{r+1}} \leqq \frac{\varphi_1(t)}{t}.$$

Weiter ist [nach (4), (10), (11)] für $q_r \leqq t < Q_r$:

$$\psi_{\mathsf{Z}}(t) \leqq \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq n} |q_r \vartheta_i + 0 \cdot \eta_i - p_{r,i}| < \varphi(Q_r) < \varphi(t),$$

und für $Q_r \leqq t < q_{r+1}$:

$$\psi_{\mathsf{Z}}(t) \leqq \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq n} |0 \cdot \vartheta_i + Q_r \eta_i - P_{r,i}| < \varphi(q_{r+1}) < \varphi(t).$$

Es bleibt noch übrig, die algebraische Unabhängigkeit der Zahlen $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$ zu beweisen. Es sei also

$$F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum a(g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_n)\, x_1^{g_1} \ldots x_n^{g_n}\, y_1^{h_1} \ldots y_n^{h_n}$$

ein Polynom mit ganzzahligen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten; sein Grad in jeder Veränderlichen sei höchstens k. Man setze voraus, daß

$$F(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0; \tag{12}$$

daraus wird sich ein Widerspruch ergeben.

Es gibt eine Folge $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots$ so, daß $F = F_{r_a}$ für $a = 1, 2, \ldots$ (s. die Folge $(\mathfrak{F})$]. Im Folgenden soll r nur die Zahlen $r_1, r_2, \ldots$ durchlaufen. Bezieht

sich O auf $r \to +\infty$, so kann man (12) nach (10), (11) folgendermaßen schreiben:

$$0 = \sum a(g_1, \ldots, h_n) \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{r+1,i}}{q_{r+1}} + O\left(\frac{r+2}{q_{r+2}}\right)\right)^{g_i} \left(\frac{P_{r+1,i}}{Q_{r+1}} + O\left(\frac{r+2}{Q_{r-2}}\right)\right)^{h_i}$$

$$= F\left(\frac{p_{r+1,1}}{q_{r+1}}, \ldots, \frac{p_{r+1,n}}{q_{r+1}}, \frac{P_{r+1,1}}{Q_{r+1}}, \ldots, \frac{P_{r+1,n}}{Q_{r+1}}\right) + O\left(\frac{r+2}{q_{r+2}}\right).$$

Wegen $F = F_r$ und nach (9) ist der erste Summand rechts von der Gestalt $\frac{c}{q_{r+1}^{nk} Q_{r+1}^{nk}}$ ($c \neq 0$ ganz), während nach (3)

$$\frac{r+2}{q_{r+2}} < \frac{1}{q_{r+1}^{r+1} Q_{r+1}^{r+1}}$$

ist, was für $r \to +\infty$ den gesuchten Widerspruch liefert.

2. Der Fall $m > 2$. Man füge der Matrix $\mathbf{Z}$ nacheinander weitere Glieder hinzu, bis man m Spalten bekommt. Nach J kann man es auf „hinreichend viele" Arten so machen, daß das resultierende System algebraisch unabhängig ist; dann benutze man G.

Bemerkung 1. Für die Matrizen Ξ aus dem Beweis des Satzes (Fall $m = 1$) ist nach (10), (4)

$$\psi_\Xi(q_r) \leqq \frac{2(r+1)q_r}{q_{r+1}} < \varphi(Q_r) < \varphi(q_r),$$

so daß

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{\psi_\Xi(t)}{\varphi(t)} < +\infty.$$

Bemerkung 2. Ist $t^{-1}\varphi_1(t) = o\left(t^{-\frac{1}{n}}\right)$ (für $m = 1$), bzw. $\varphi(t) = o\left(t^{-\frac{m}{n}}\right)$ (für $m > 1$), so ist die Menge $M_{n,m}$ von erster Kategorie in E^{nm}. In der Tat, es sei $N_{T,k}$ die Menge derjenigen Θ, für welche gilt

$$\psi_\Theta(t) \leqq k\,\varphi(t) \qquad \text{für alle } t \geqq T$$

[für $m = 1$ schreibe man $t^{-1}\varphi_1(t)$ statt $\varphi(t)$]. Dann ist $N_{T,k}$ abgeschlossen und besteht aus lauter singulären Systemen, hat also (vgl. B) das Maß Null. Also ist $N_{T,k}$ nirgendsdicht, und offenbar ist $M_{n,m} < \bigcup_{T=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} N_{T,k}$.

Literatur

[1] Cassels, J. W. S.: An Introducion to Diophantine Approximation. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 1957. — [2] Chabauty, C., et E. Lutz: Sur les approximations diophantiennes linéaires réelles (I). Problème homogène. Comptes rendus **231**, 887–889 (1950). — [3] Jarník, V.: Zum Khintchineschen „Übertragungssatz". Travaux de l'Institut Mathématique de Tbilissi **3**, 193–216 (1938). — [4] Khintchine, A.: Über eine Klasse linearer diophantischer Approximationen. Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo **50**, 170–195 (1926). — [5] Khintchine, A.: Über die angenäherte Auflösung linearer Gleichungen in ganzen Zahlen. Acta Arithmetica **2**, 161–172 (1937).

Praha II, Ke Karlovu 3 (Tschechoslowakei)

(Eingegangen am 12. Juni 1959)

RADEMACHER, H.
Math. Zeitschr. 72, 192–204 (1959)

On the Phragmén-Lindelöf theorem and some applications*

In memoriam LEON LICHTENSTEIN

By

HANS RADEMACHER

1. One of the most fruitful applications of the Phragmén-Lindelöf theorem occurs in analytic number theory in the discussion of the Riemann zetafunction. In its most frequently used form the theorem is applied to a half-strip and to a single function (cf. LANDAU, Vorlesungen über Zahlentheorie, vol. 2, Satz 404, 405, pp. 48–51). This, however, is not quite general enough for situations encountered e.g. in the theory of character sums and of primes in arithmetic progressions. We need here estimations which are uniform in several parameters for an infinite set of $L(s,\chi)$ or $\zeta(s,\lambda)$-functions, and the whole strip must be considered[1]). It is the purpose of the present paper to provide a suitable refinement of the Phragmén-Lindelöf theorem. The improvement is achieved through the use of certain subharmonic functions. The applications in Theorems 3, 4, 5 concern zetafunctions. But already the results about the Γ-function in Lemmas 1 to 3 are believed to be new.

2. Basic for our arguments is the following

THEOREM 1. *Let a, b, Q, γ, δ be real numbers,*

$$-Q<a<b, \qquad \gamma \leqq \delta. \tag{2.1}$$

Then there exists an analytic function $\varphi(s)=\varphi(s;Q)$, depending also on the parameters a, b, γ, δ, which is regular in the strip

$$S(a,b): \qquad a \leqq \Re(s) \leqq b$$

and such that

$$\begin{cases} |\varphi(a+it;Q)| = |Q+a+it|^{\gamma} \\ |\varphi(b+it;Q)| = |Q+b+it|^{\delta} \end{cases} \tag{2.2}$$

and that for $a \leqq \sigma \leqq b$

$$|\varphi(s;Q)| \geqq |Q+s|^{l(\sigma)} \tag{2.3}$$

where

$$l(\sigma) = \gamma \frac{b-\sigma}{b-a} + \delta \frac{\sigma-a}{b-a}. \tag{2.31}$$

*) This research was supported by the United States Air Force under Contract No. AF 18 (600)–685, monitored by the Office of Scientific Research.

[1]) Such a situation is found e.g. in the discussion of the Hecke functions in [5], Hilfssatz 15, pp. 363–365, where, however, a rather crude treatment if sufficient.

Moreover

$$\varphi(s;Q)=O(|t|^c),\quad |t|\to\infty \tag{2.32}$$

for a certain $c>0$.

REMARK. Because of (2.1) we have $|Q+s|>0$ so that (2.3) implies

$$\varphi(s;Q)\neq 0. \tag{2.33}$$

It is essential for our further arguments that we have *equality* in (2.2) and that (2.3) holds for all Q with $Q+a>0$.

PROOF. The case $\gamma=\delta$ is trivial since here $\varphi(s;Q)=(Q+s)^\gamma=(Q+s)^\delta$ furnishes the solution. Here, and in similar situations later, we take the principal branch of $(Q+s)^\gamma$ in $S(a,b)$, i.e. that one which is real for positive $Q+s$. We can now assume $\gamma<\delta$.

We construct a harmonic function $u(\sigma,t)$ in the strip $S(a,b)$ which fulfills the boundary conditions

$$\begin{cases} u(a,t)=\gamma\log|Q+a+it|=\frac{1}{2}\gamma\log\left((Q+a)^2+t^2\right)\\ u(b,t)=\delta\log|Q+b+it|=\frac{1}{2}\delta\log\left((Q+b)^2+t^2\right). \end{cases} \tag{2.4}$$

The boundary problem for $\Delta u=0$ in a strip is solved by a transformation of the Poission formula for the circle. Let us put

$$\omega(\sigma,t)=\frac{1}{2}\,\frac{\sin\pi\sigma}{\cosh\pi t-\cos\pi\sigma}. \tag{2.51}$$

Then

$$\begin{aligned} u(\sigma,t)=&\frac{1}{b-a}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\left(\frac{\sigma-a}{b-a},\ \frac{t-y}{b-a}\right)A(y)\,dy+\\ &+\frac{1}{b-a}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\left(\frac{b-\sigma}{b-a},\ \frac{t-y}{b-a}\right)B(y)\,dy \end{aligned} \tag{2.52}$$

satisfies $\Delta(u)=0$ in the interior of $S(a,b)$ with the boundary conditions

$$u(a,t)=A(t),\qquad u(b,t)=B(t), \tag{2.53}$$

where $A(t)$, $B(t)$ are supposed to be continuous and $e^{-\frac{\pi|t|}{b-a}}|A(t)|$, $e^{-\frac{\pi|t|}{b-a}}|B(t)|$ integrable in the interval $(-\infty,\infty)$. (Cf [2], p. 550.)

Taking

$$A(t)=\gamma\log|Q+a+it|,\qquad B(t)=\delta\log|Q+b+it|, \tag{2.6}$$

we have in (2.52) a solution of the boundary problem (2.4).

From (2.51), (2.52) (2.6) it follows by a simple estimation that

$$u(\sigma,t)=O\left(\log(2+|t|)\right) \tag{2.7}$$

in the strip $S(a,b)$ uniformly in σ, although not in Q.

Let now $v(\sigma, t)$ be a conjugate harmonic function to $u(\sigma, t)$. Since $u(\sigma, t)$ in view of the boundary conditions (2.4) is evidently symmetric with respect to the σ-axis, $v(\sigma, t)$ must be constant for $t=0$, and we can normalize $v(\sigma, t)$ through an additive constant so that $v(\sigma, 0)=0$. We put now

$$\varphi(s; Q) = \exp\left(u(\sigma, t) + i v(\sigma, t)\right) \tag{2.8}$$

which is a regular analytic function of $s=\sigma+it$ with the absolute value

$$|\varphi(s; Q)| = \exp u(\sigma, t). \tag{2.81}$$

The boundary conditions (2.4) show that (2.2) is satisfied. Also satisfied is (2.32) because of (2.7).

In order to finish the proof of Theorem 1 we consider the function

$$U(\sigma, t) = (\lambda\sigma + \mu)\log|Q+\sigma+it| = (\lambda\sigma+\mu)\log|Q+s|. \tag{2.9}$$

We have

$$\Delta U = 2\lambda\frac{Q+\sigma}{(Q+\sigma)^2+t^2}, \tag{2.91}$$

which is easily seen, since $U(\sigma, t)=f\cdot g$ and $\Delta U = f\cdot\Delta g + 2(f_\sigma g_\sigma + f_t g_t) + g\cdot\Delta f$, where Δg, Δf and f_t obviously vanish. We choose now the constants λ and μ so that $U(\sigma, t)$ also satisfies the boundary conditions (2.4) i.e.

$$\lambda a + \mu = \gamma, \qquad \lambda b + \mu = \delta$$

or

$$\lambda = \frac{\delta-\gamma}{b-a}, \qquad \mu = \frac{\gamma b - \delta a}{b-a}. \tag{2.92}$$

The conditions (2.1) show then that

$$\lambda > 0.$$

(since we consider here only $\gamma<\delta$), and therefore in virtue of (2.91) and $Q+\sigma>0$

$$\Delta U > 0.$$

In other words, $U(\sigma, t)$ is a *subharmonic* function in the strip $S(a, b)$. It has the same boundary values as the harmonic function $u(\sigma, t)$, and therefore we conclude

$$U(\sigma, t) \leqq u(\sigma, t)$$

in $S(a, b)$. This inequality for the infinite strip $S(a, b)$ is obtained by an application of the Phragmén-Lindelöf argument to the subharmonic function $D(\sigma, t)=U(\sigma, t)-u(\sigma, t)$ which, in view of (2.7) and (2.9), has the property $D(\sigma, t)=O(|t|^c)$, $|t|\to\infty$, in $S(a, b)$. But then it follows from (2.81) that

$$|\varphi(s; Q)| \geqq \exp U(\sigma, t).$$

If we take into account (2.9) and (2.92) we see that this inequality is exactly (2.3). This concludes the proof of Theorem 1.

3. We use this theorem now to prove the following one, which is of the Phragmén-Lindelöf type:

THEOREM 2. *Let $f(s)$ be regular analytic in the strip $S(a, b)$ and satisfy for certain positive constants c, C*

$$|f(s)| < C e^{|t|^c}. \tag{3.1}$$

Suppose moreover that

$$\begin{cases} |f(a+it)| \leqq A|Q+a+it|^\alpha \\ |f(b+it)| \leqq B|Q+b+it|^\beta \end{cases} \tag{3.2}$$

with

$$Q+a>0, \tag{3.31}$$

$$\alpha \geqq \beta. \tag{3.32}$$

Then in the strip $S(a, b)$

$$|f(s)| \leqq (A|Q+s|^\alpha)^{\frac{b-\sigma}{b-a}} (B|Q+s|^\beta)^{\frac{\sigma-a}{b-a}}. \tag{3.4}$$

REMARK. It will be noticed that no constants enter into (3.4) which do not already appear in the conditions (3.2)

PROOF. We consider the function $\varphi(s; Q)$ of Theorem 1 with the parameter values

$$\gamma = -\alpha, \qquad \delta = -\beta, \tag{3.5}$$

which in view of (3.32) satisfy (2.1). Then we form the regular function

$$F(s) = f(s)\,\varphi(s; Q)\,E^{-1}e^{-\nu s}, \tag{3.6}$$

where E and ν are so determined that

$$A = E e^{\nu a}, \qquad B = e^{\nu b}. \tag{3.7}$$

We see that because of (3.1) and (2.32) an estimate

$$|F(s)| < C^{|t|^c} \tag{3.8}$$

holds with suitable positive c, C. Now the conditions (3.2), (3.5), (3.7) give together with (2.2) the boundary conditions for $F(s)$:

$$|F(a+it)| \leqq 1, \qquad |F(b+it)| \leqq 1.$$

The well-known Phragmén-Lindelöf argument, admissible in view of (3.8), applied on the rectangle $a \leqq \sigma \leqq b$, $|t| \leqq T$, $T \to \infty$, shows that

$$|F(s)| \leqq 1$$

throughout $S(a, b)$. The definition (3.6) of $F(s)$ shows that this means

$$|f(s)| \leqq E\,e^{\nu\sigma}\,|\varphi(s)|^{-1},$$

which because of (2.3), (2.31), (3.5) and (3.7) yields the assertion (3.4) of the theorem.

4. The case $\alpha<\beta$ can also be treated, but the resulting theorem is less concise, since a factor M depending on a, b, α, β, Q appears. We obtain here

THEOREM 2a. *Under the conditions of Theorem 2, except* (3.32) *to be replaced by*

$$\alpha<\beta, \tag{4.1}$$

we have in the strip $S(a, b)$

$$|f(s)| \leqq M_Q^2 \left(A|Q+s|^{\alpha}\right)^{\frac{b-\sigma}{b-a}} \left(B|Q+s|^{\beta}\right)^{\frac{\sigma-a}{b-a}}, \tag{4.2}$$

where

$$M_Q = \operatorname{Max}\left(\left(\frac{a+Q}{b+Q}\right)^{\alpha}, \left(\frac{b+Q}{a+Q}\right)^{\beta}\right). \tag{4.3}$$

The factor M_Q *is a monotone decreasing function of* Q *and*

$$\lim_{Q\to\infty} M_Q = 1. \tag{4.4}$$

PROOF. This theorem is derived from Theorem 2 by the substitutions

$$s' = a+b-s,$$

$$\alpha' = \beta, \qquad \beta' = \alpha, \qquad A' = B, \qquad B' = A.$$

We have again

$$a \leqq \sigma' = \Re(s') \leqq b,$$

and α', β' satisfy condition (3.32) of Theorem 2.

We put

$$g(s') = g(a+b-s) = f(s).$$

Then $g(s')$ satisfies the conditions

$$|g(a+it)| = |f(b-it)| \leqq A'|Q+b+it|^{\alpha'}$$
$$|g(b+it)| = |f(a-it)| \leqq B'|Q+a+it|^{\beta'},$$

which have not yet the form (3.2), a and b being exchanged on the right side of the inequalities. We have, however,

$$\begin{cases} |g(a+it)| \leqq A'|Q+a+it|^{\alpha'} \cdot M_Q \\ |g(b+it)| \leqq B'|Q+b+it|^{\beta'} \cdot M_Q \end{cases} \tag{4.5}$$

with

$$M_Q = \operatorname{Max}_t \left\{ \left|\frac{Q+b+it}{Q+a+it}\right|^{\beta}, \left|\frac{Q+a+it}{Q+b+it}\right|^{\alpha} \right\}.$$

Now

$$1 \leqq \left|\frac{Q+b+it}{Q+a+it}\right| \leqq \frac{Q+b}{Q+a},$$

so that M_Q takes the form (4.3). Application of Theorem 2 on $g(s')$ with conditions (4.5) now yields in $S(a, b)$

$$|g(s')| \leqq M_Q \left(A'|Q+s'|^{\alpha'}\right)^{\frac{b-\sigma'}{b-a}} \left(B'|Q+s'|^{\beta'}\right)^{\frac{\sigma'-a}{b-a}}.$$

or

$$(4.6)\qquad \begin{cases} |f(s)| \leqq M_Q \left(B \mid Q+a+b-s|^{\beta}\right)^{\frac{\sigma-a}{b-a}} \left(A \mid Q+a+b-s|^{\alpha}\right)^{\frac{b-\sigma}{b-a}} \\ \quad = M_Q \left(A \mid Q+s|^{\alpha}\right)^{\frac{b-\sigma}{b-a}} \left(B \mid Q+s|^{\beta}\right)^{\frac{\sigma-a}{b-a}} P_Q(s) \end{cases}$$

with

$$P_Q(s) = \left| \frac{Q+a+b-s}{Q+s} \right|^{\alpha \frac{b-\sigma}{b-a} + \beta \frac{\sigma-a}{b-a}}.$$

But for $a \leqq \sigma \leqq b$, $-\infty < t < \infty$ we have

$$\left(\frac{Q+a}{Q+b}\right)^2 \leqq \frac{(Q+a)^2+t^2}{(Q+b)^2+t^2} \leqq \frac{(Q+a+b-\sigma)^2+t^2}{(Q+\sigma)^2+t^2} \leqq \frac{(Q+b)^2+t^2}{(Q+a)^2+t^2} \leqq \left(\frac{Q+b}{Q+a}\right)^2$$

and thus

$$(4.7)\qquad \begin{cases} P_Q(s) \leqq \operatorname*{Max}_{a \leqq \sigma \leqq b} \left\{ \left(\frac{Q+a}{Q+b}\right)^{\alpha \frac{b-\sigma}{b-a} + \beta \frac{\sigma-a}{b-a}}, \left(\frac{Q+b}{Q+a}\right)^{\alpha \frac{b-\sigma}{b-a} + \beta \frac{\sigma-a}{b-a}} \right\} \\ \quad \leqq \operatorname{Max} \left\{ \left(\frac{Q+a}{Q+b}\right)^{\alpha}, \left(\frac{Q+b}{Q+a}\right)^{\beta} \right\} = M_Q. \end{cases}$$

The inequalities (4.6) and (4.7) together prove (4.2) of Theorem 2a. The statement (4.4) es evident from the definition of M_Q.

5. It is fortunate that in the application of our theorems to the theory of Dirichlet series the situation $\alpha \geqq \beta$ of Theorem 2 prevails. We need, however, first some lemmas about Γ-quotients, which are simple consequences of Theorem 2.

LEMMA 1. *For $Q \geqq 0$, $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}$ we have*

$$(5.1)\qquad \left| \frac{\Gamma\left(\frac{Q}{2} + \frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{Q}{2} + \frac{s}{2}\right)} \right| \leqq \left(\frac{1}{2} \mid Q+1+s|\right)^{\frac{1}{2}-\sigma}.$$

REMARK. Equality holds here for $\sigma = \frac{1}{2}$, any $Q \geqq 0$, and for $\sigma = -\frac{1}{2}$ with $Q = 0$.

PROOF. Let us put $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ and

$$f(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{Q}{2} + \frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{Q}{2} + \frac{s}{2}\right)},$$

which is regular in the strip $S(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. We have, because of $|\Gamma(s)| = |\Gamma(\bar{s})|$,

$$(5.2)\qquad |f(a+it)| = \left| \frac{\Gamma\left(\frac{Q}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{it}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{Q}{2} - \frac{1}{4} + \frac{it}{2}\right)} \right| = \left| \frac{Q}{2} - \frac{1}{4} + \frac{it}{2} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \left| Q - \frac{1}{2} + it \right| \leqq \frac{1}{2} \left| Q + \frac{1}{2} + it \right| = \frac{1}{2} \left| Q + 1 + a + it \right|,$$

and similarly

$$|f(b+it)| = 1.$$

With $\alpha=1, \beta=0$ Theorem 2 is applicable with $Q+1$ instead of Q and yields (5.1).

For $Q\geqq\frac{1}{2}$ this lemma can be sharpened to

LEMMA 2. *For* $Q-\frac{1}{2}\geqq 0$, $-\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq\frac{1}{2}$ *the inequality*

$$\left|\frac{\Gamma\left(\frac{Q}{2}+\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{Q}{2}+\frac{s}{2}\right)}\right|\leqq\left(\frac{1}{2}|Q+s|\right)^{1-\sigma} \tag{5.4}$$

holds.

REMARK. Equality in (5.3) on both boundaries of $S(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ for all $Q\geqq\frac{1}{2}$.

PROOF. The proof is almost the same as the previous one. Only instead of (5.2) we write

$$|f(a+it)|=\tfrac{1}{2}|Q-\tfrac{1}{2}-it|=\tfrac{1}{2}|Q+a+it|,$$

which again permits the application of Theorem 2 for $Q+a=Q-\frac{1}{2}>0$. For $Q-\frac{1}{2}=0$ formula (5.3) follows by a passage to the limit.

LEMMA 3. *For* $Q\geqq 0$, $-\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq\frac{1}{2}$ *we have*

$$\left|\frac{\Gamma(Q+1-s)}{\Gamma(Q+s)}\right|\leqq|Q+1+s|^{1-2\sigma}. \tag{5.4}$$

REMARK. Equality holds here on the boundaries under the same circumstances as in Lemma 1.

PROOF. We have again $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$. For

$$f(s)=\frac{\Gamma(Q+1-s)}{\Gamma(Q+s)}$$

we find easily

$$|f(a+it)|=|Q+\tfrac{1}{2}+it|\cdot|Q-\tfrac{1}{2}+it|\leqq|Q+\tfrac{1}{2}+it|^2=|Q+1+a+it|^2$$

and

$$|f(b+it)|=1.$$

Theorem 2 with $\alpha=2$, $\beta=0$ and $Q+1$ instead of Q yields immediately (5.4).

6. We apply our results to some classes of L- and ζ-functions. Let $k>1$ be an integer and $\chi(n)$ a primitive character modulo k. For $\sigma>1$ one defines

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}.$$

This function with its analytic continuation is regular in the whole s-plane. For $\eta>0$ we have

$$|L(1+\eta+it,\chi)|\leqq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\eta}}=\zeta(1+\eta). \tag{6.1}$$

On the other hand, $L(s,\chi)$ satisfies the functional equation

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{a+s}{2}\right)L(s,\chi)=\varepsilon(\chi)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{a+1-s}{2}\right)L(1-s,\bar{\chi}),$$

where $\varepsilon(\chi)$ is a certain root of unity depending on χ and $a=0$ or 1 so that

$$\chi(-1)=(-1)^a.$$

We have therefore

$$|L(s,\chi)|=\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\sigma-\frac{1}{2}}\left|\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}+\frac{s}{2}\right)}\right||L(1-s,\bar{\chi})|.$$

For $-\frac{1}{2}\leqq\sigma\leqq\frac{1}{2}$ we apply on the Γ-quotient Lemma 1 or 2 according to the values 0 or 1 of a. This gives

$$|L(s,\chi)|\leqq\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{\sigma-\frac{1}{2}}|1+s|^{\frac{1}{2}-\sigma}|L(1-s,\bar{\chi})|,$$

and in particular for $0<\eta\leqq\frac{1}{2}$

$$|L(-\eta+it,\chi)|\leqq\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{\eta+\frac{1}{2}}|1+s|^{\eta+\frac{1}{2}}\zeta(1+\eta). \tag{6.2}$$

From (6.1) and (6.2) we derive then through Theorem 2 the result:

THEOREM 3. *For $-\frac{1}{2}\leqq-\eta\leqq\sigma\leqq1+\eta\leqq\frac{3}{2}$, for all moduli $k>1$ and all primitive characters χ modulo k the inequality*

$$|L(s,\chi)|\leqq\left(\frac{k|1+s|}{2\pi}\right)^{\frac{1+\eta-\sigma}{2}}\zeta(1+\eta)$$

holds.

It will be noticed that k and t appear here in the same order of magnitude.

7. The Dedekind zetafunction $\zeta_K(s)$ for the algebraic number field K of degree n is defined for $\sigma>1$ as

$$\zeta_K(s)=\sum_{\mathfrak{a}}\frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}=\prod_{\mathfrak{p}}\frac{1}{1-N(\mathfrak{p})^{-s}},$$

where $\mathfrak{a}$ runs through all ideals and $\mathfrak{p}$ through all prime ideals of K. Any rational prime number p has the prime ideal decomposition

$$(p)=\mathfrak{p}_1^{e_1}\dots\mathfrak{p}_k^{e_k},$$
$$N(\mathfrak{p}_j)=p^{f_j},$$

so that

$$e_1f_1+\dots+e_kf_k=n.$$

Therefore we can write

$$\zeta_K(s)=\prod_p\left\{\frac{1}{1-p^{-f_1s}}\cdots\frac{1}{1-p^{-f_ks}}\right\},$$

hence

$$|\zeta_K(s)|\leqq\prod_p\left\{\frac{1}{1-p^{-f_1\sigma}}\cdots\frac{1}{1-p^{-f_k\sigma}}\right\}$$
$$\leqq\prod_p\left\{\frac{1}{1-p^{-\sigma}}\right\}^k\leqq\prod_p\left\{\frac{1}{1-p^{-\sigma}}\right\}^n=\zeta(\sigma)^n$$

or, for $\eta>0$,

$$|\zeta_K(1+\eta+it)| \leqq \zeta(1+\eta)^n \tag{7.1}$$

(which is, of course, a rather crude estimate, since $\zeta_K(s)$ has only a pole of first order at $s=1$). The function $\zeta_K(s)$ satisfies after HECKE the functional equation ([4], p. 74)

$$A^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2} \zeta_K(s) = A^{1-s} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(1-s)^{r_2} \zeta_K(1-s), \tag{7.11}$$

where

$$A = 2^{-r_2} \pi^{-\frac{n}{2}} \sqrt{|d|}, \tag{7.12}$$

and d is the discriminant of the field K, which has among its conjugates r_1 real and $2r_2$ complex fields, $r_1+2r_2=n$.

We have thus

$$|\zeta_K(s)| = A^{1-2\sigma} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \right|^{r_1} \left| \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} \right|^{r_2} |\zeta_K(1-s)|$$

and, from Lemmas 1 and 3, for $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}$

$$|\zeta_K(s)| \leqq A^{1-2\sigma} \left(\tfrac{1}{2}|1+s|\right)^{r_1(\frac{1}{2}-\sigma)} |1+s|^{r_2(1-2\sigma)} |\zeta_K(1-s)|$$

and in particular for $0<\eta \leqq \frac{1}{2}$, in view of (7.1)

$$|\zeta_K(-\eta+it)| \leqq A^{1+2\eta} 2^{-r_1(\frac{1}{2}+\eta)} |1-\eta+it|^{n(\frac{1}{2}+\eta)} \zeta(1+\eta)^n. \tag{7.2}$$

Theorem 2 can be applied only to regular functions. We consider therefore $\zeta_K(s)\,(s-1)$. From (7.1) and (7.2) we obtain

$$|\zeta_K(1+\eta+it)\,(\eta+it)| < \zeta(1+\eta)^n |1+(1+\eta+it)| \tag{7.31}$$

and

$$\begin{cases} |\zeta_K(-\eta+it)\,(-\eta+it-1)| \\ \qquad \leqq \zeta(1+\eta)^n A^{1+2\eta} 2^{-r_1(\frac{1}{2}+\eta)} \dfrac{1+\eta}{1-\eta} |1-\eta+it|^{n(\frac{1}{2}+\eta)+1} \end{cases} \tag{7.32}$$

since

$$|-\eta+it-1| \leqq \frac{1+\eta}{1-\eta} |1-\eta+it|.$$

From (7.31), (7.32) we infer now by means of Theorem 2 that in the strip $-\eta \leqq \sigma \leqq 1+\eta$

$$|\zeta_K(s)\,(s-1)| \leqq \zeta(1+\eta)^n |1+s| \left\{ A^{1+2\eta} 2^{-r_1(\frac{1}{2}+\eta)} \frac{1+\eta}{1-\eta} |1+s|^{n(\frac{1}{2}+\eta)} \right\}^{\frac{1+\eta-\sigma}{1+2\eta}}.$$

With $1 < \dfrac{1+\eta}{1-\eta} \leqq 3$ for $0<\eta \leqq \dfrac{1}{2}$, and with the meaning of A in (7.12) we obtain thus

THEOREM 4. *In the strip $-\eta \leqq \sigma \leqq 1+\eta$, $0<\eta \leqq \frac{1}{2}$, the Dedekind function $\zeta_K(s)$ belonging to the algebraic number field K of degree n and discriminant d satisfies the inequality*

$$|\zeta_K(s)| \leqq 3 \left| \frac{1+s}{1-s} \right| \left(|d| \left(\frac{|1+s|}{2\pi} \right)^n \right)^{\frac{1+\eta-\sigma}{2}} \zeta(1+\eta)^n. \tag{7.4}$$

We know through E. ARTIN and R. BRAUER [1] that RIEMANN'S $\zeta(s)$ divides DEDEKIND'S $\zeta_K(s)$ in case K is normal over the rational field. We can use this fact to obtain a sharper version of the previous theorem.

In R. BRAUER'S notation the quotient, which is an entire function, appears as

$$\frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)} = \prod_{\varrho} L(s;\omega_\varrho^*)^{c_\varrho} \tag{7.5}$$

where $c_\varrho > 0$ and the functions under the product sign are L-functions for certain congruence characters ω_ϱ^*. Let us put

$$\sum c_\varrho = q = q(K). \tag{7.51}$$

Included in (7.5) is, in view of the class field theory, the case of Abelian K, for which $c_\varrho = 1$, $q \leqq n-1$. Moreover, as Prof. RICHARD BRAUER pointed out to me in a letter of August 10, 1957, the inequality

$$q \leqq n-1 \tag{7.52}$$

holds also for all normal fields. From (7.5) and (6.1) follows then, for $\eta > 0$

$$\left|\frac{\zeta_K(1+\eta+it)}{\zeta(1+\eta+it)}\right| \leqq \zeta(1+\eta)^{n-1}. \tag{7.53}$$

On the other hand, the functional equation (7.11) of $\zeta_K(s)$ together with that of $\zeta(s)$ furnishes

$$\frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)} = A^{1-2s}\pi^{\frac{1}{2}-s}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\right)^{r_1-1}\left(\frac{\Gamma(1-s}{\Gamma(s)}\right)^{r_1}\frac{\zeta_K(1-s)}{\zeta(1-s)}. \tag{7.6}$$

If $r_1 \geqq 1$ we obtain from Lemmas 1 and 3, for $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)}\right| \leqq A^{1-2\sigma}\pi^{\frac{1}{2}-\sigma}\left(\frac{1}{2}|1+s|\right)^{(r_1-1)\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}|1+s|^{r_1\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}\left|\frac{\zeta_K(1-s)}{\zeta(1-s)}\right|$$

and in particular with $0 < \eta \leqq \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{\zeta_K(-\eta+it)}{\zeta(-\eta+it)}\right| \leqq A^{1+2\eta}\pi^{\frac{1}{2}+\eta}2^{-(r_1-1)\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}|1+s|^{(n-1)\left(\frac{1}{2}+\eta\right)}\zeta(1+\eta)^{n-1}. \tag{7.7}$$

From this and (7.53) we obtain just as before by means of Theorem 2 the estimation

$$\left|\frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)}\right| \leqq \left(|d|\left(\frac{|1+s|}{2\pi}\right)^{n-1}\right)^{\frac{1+\eta-\sigma}{2}}\zeta(1+\eta)^{n-1}, \quad -\eta \leqq \Re(s) \leqq 1+\eta. \tag{7.8}$$

If $r_1 = 0$ we write instead of (7.6)

$$\frac{\zeta_K(s)}{\zeta(s)} = A^{1-2s}\pi^{\frac{1}{2}-s}\left(\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\right)^{r_2-1}\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\frac{\zeta_K(1-s)}{\zeta(1-s)}$$

$$= (2A)^{1-2s}\pi^{\frac{1}{2}-s}\left(\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\right)^{r_2-1}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{s}{2}\right)}\frac{\zeta_K(1-s)}{\zeta(1-s)}.$$

The application of Lemmas 1 and 2 yields also here exactly (7.7), and (7.8) can then be established as before.

We have thus:

THEOREM 4a. *If K is a normal field over the rational field then in the strip $-\eta \leqq \sigma \leqq 1+\eta$, $0<\eta \leqq \frac{1}{2}$ the Dedekind function $\zeta_K(s)$ satisfies*

$$|\zeta_K(s)| \leqq |\zeta(s)| \left(|d| \left(\frac{|1+s|}{2\pi}\right)^{n-1}\right)^{\frac{1+\eta-\sigma}{2}} \zeta(1+\eta)^{n-1}.$$

For Abelian fields the Theorem 4a is a direct consequence of Theorem 3 because of $c_\varrho = 1$ and because the discriminant d is the product of the conductors k_ϱ of the characters ω_ϱ^*.

8. The full strength of the uniformity with respect to the parameter Q which Theorem 2 and Lemma 3 show is established only in their application to HECKE's $\zeta(s, \lambda)$-functions.

Let K be any algebraic number field and $\mathfrak{f}$ an ideal in K. The Hecke functions are then defined as

$$\zeta(s, \lambda) = \sum_{\mathfrak{m}} \frac{\lambda(\mathfrak{m})}{N(\mathfrak{m})^s} = \sum_{(\hat{\mu})} \frac{\lambda(\hat{\mu})}{|N(\hat{\mu})|^s}, \qquad \Re(s) > 1, \tag{8.1}$$

where $\mathfrak{m}$ runs over all ideals of K, $\hat{\mu}$ over all corresponding non-associate ideal numbers, and $\lambda(\mathfrak{m}) = \lambda(\hat{\mu})$ is a "Größencharacter for ideals modulo $\mathfrak{f}$" defined as

$$\lambda(\hat{\mu}) = \prod_{q=1}^{r_1+r_2} |\hat{\mu}^{(q)}|^{-iv_q} \prod_{p=r_1+1}^{n} \left(\frac{\hat{\mu}^{(p)}}{|\hat{\mu}^{(q)}|}\right)^{a_p} \tag{8.2}$$

where the a_p $(p = r_1+1, \ldots, n)$ are non-negative integers with the condition $a_p \cdot a_{p+r_2} = 0$, and the v_q $(q = 1, \ldots, r_1+r_2)$ certain real numbers, whose definition does not concern us here ([3], p. 30 and [5], p. 343).

From (8.1) and (8.2) follows immediately

$$|\zeta(s, \lambda)| \leqq \zeta_K(\sigma), \qquad \sigma > 1. \tag{8.3}$$

We put with HECKE

$$\xi(s, \lambda) = \gamma(\lambda)\, \Gamma(s, \lambda)\, A^s \zeta(s, \lambda),$$

where

$$|\gamma(\lambda)| = 1,$$

$$A^2 = \frac{|d|\, N(\mathfrak{f})}{\pi^n 2^{2r_2}},$$

$$\Gamma(s, \lambda) = \prod_{q=1}^{r_1} \Gamma\left(\frac{a_q + s + iv_q}{2}\right) \cdot \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \Gamma\left(\frac{a_p + a_{p+r_2}}{2} + s + \frac{iv_p}{2}\right).$$

Here the a_q for $q = 1, \ldots r_1$, which are not explicitly mentioned in (8.2), are 0 or 1 and are determined by the character χ belonging to the congruence

group modulo $\mathfrak{f}$ in the narrowest sense and induced by the Größencharacter λ ([3], p. 21). The $\xi(s, \lambda)$-functions with primitive λ-character modulo $\mathfrak{f}$ fulfill a functional equation

$$\xi(s, \lambda) = W(\lambda)\, \xi(1 - s, \bar{\lambda}),$$

where $W(\lambda)$ is a certain number of absolute value 1, so that

$$|\zeta(s, \lambda)| = A^{1-2\sigma} \prod_{q=1}^{r_1} \left| \frac{\Gamma\left(\frac{a_q + 1 - s - i v_q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a_q + s + i v_q}{2}\right)} \right| \times$$

$$\times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \left| \frac{\left(\Gamma \frac{a_p + a_{p+r_2}}{2} + 1 - s - \frac{i v_p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a_p + a_{p+r_2}}{2} + s + \frac{i v_p}{2}\right)} \right| \cdot |\zeta(1 - s, \bar{\lambda})|.$$

If we apply on the first product, where $a_q = 0$ or 1, the Lemmas 1 and 2, and on the second product, where $(a_p + a_{p+r_2})$ are unbounded non-negative integers, the Lemma 3, we obtain for $-\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}$

$$|\zeta(s, \lambda)| \leqq A^{1-2\sigma} \prod_{q=1}^{r_1} \left(\frac{1}{2} |1 + s + i v_q| \right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \times$$

$$\times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \left| \frac{a_p + a_{p+r_2}}{2} + 1 + s + \frac{i v_p}{2} \right|^{1-2\sigma} \cdot |\zeta(1 - s, \lambda)|$$

and in particular for $s = -\eta + i t$, $0 \leqq \eta \leqq \frac{1}{2}$ in virtue of (8.3),

$$(8.4) \quad \begin{cases} |\zeta(-\eta + i t, \lambda)| \leqq A^{1+2\eta} \prod_{q=1}^{r_1} \left(\frac{1}{2} |1 - \eta + i (t + v_q)| \right)^{\frac{1}{2}+\eta} \times \\ \qquad \times \prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2} \left| \frac{a_p + a_{p+r_2}}{2} + 1 - \eta + i \left(t + \frac{v_p}{2} \right) \right|^{1+2\eta} \cdot \zeta_K(1 + \eta). \end{cases}$$

We have not prepared a theorem which we could apply here directly as we could use Theorem 2 in the previous cases. We construct therefore a function $F(s)$, on which the Phragmén-Lindelöf argument can be applied, out of factors which are furnished by Theorem 1. This theorem yields functions according to the given boundary conditions, and we select, with $a = -\eta$, $b = 1 + \eta$ the two functions

$$\varphi_1(s; 1) \quad \text{with} \quad \gamma = -\tfrac{1}{2} - \eta, \quad \delta = 0$$

and

$$\varphi_2(s; Q) \quad \text{with} \quad \gamma = -1 - 2\eta, \quad \delta = 0$$

which show, in view of (2.3), the properties

$$(8.5) \quad \begin{cases} |\varphi_1(s; 1)| \geqq |1 + s|^{-\frac{1}{2}(1+\eta-\sigma)} \\ |\varphi_2(s; Q)| \geqq |Q + s|^{-(1+\eta-\sigma)} \end{cases}$$

for $-\eta \leqq \sigma \leqq 1 + \eta$, $Q - \eta > 0$.

Then

$$F(s)=\zeta(s,\lambda)\cdot\prod_{q=1}^{r_1}\varphi_1(s+iv_q;1)\cdot\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\varphi_2\left(s+\frac{iv_p}{2};1+\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}\right)\cdot E\,e^{\nu s},$$

where E and ν are so determined that

$$E\,e^{-\nu\eta}=\left(A\cdot 2^{-\frac{r_1}{2}}\right)^{-1-2\eta},$$
$$E\,e^{\nu(1+\eta)}=1,$$

has because of (8.3) and (8.4) the properties

$$|F(-\eta+it)|\leqq\zeta_K(1+\eta)$$
$$|F(1+\eta+it)|\leqq\zeta_K(1+\eta)$$

and therefore satisfies after PHRAGMÉN and LINDELÖF also

$$|F(s)|\leqq\zeta_K(1+\eta)$$

for $-\eta\leqq\Re(s)\leqq 1+\eta$.
From this we infer, valid in the same strip,

$$|\zeta(s,\lambda)|\leqq\zeta_K(1+\eta)\prod_{q=1}^{r_1}|\varphi_1(s+iv_q;1)|^{-1}\times$$
$$\times\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\left|\varphi_2\left(s+\frac{iv_p}{2};1+\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}\right)\right|^{-1}\cdot E^{-1}e^{-\nu\sigma}.$$

If we now use (8.5) and take into account also (7.1) we obtain the

THEOREM 5. *Let for the field K of degree n, which is among r_1 real and $2r_2$ imaginary conjugate fields of discriminant d the Hecke function $\zeta(s,\lambda)$ be given by* (8.1) *with primitive Größencharacter $\lambda(\tilde{\mu})$ modulo $\tilde{\mathfrak{f}}$ of* (8.2). *Then $\zeta(s,\lambda)$ satisfies in the strip $-\eta\leqq\sigma\leqq 1+\eta$, $0<\eta\leqq\frac{1}{2}$ the inequality*

$$|\zeta(s,\lambda)|\leqq\zeta(1+\eta)^n\left\{\frac{|d|\,N(\tilde{\mathfrak{f}})}{(2\pi)^n}\prod_{q=1}^{r_1}|1+s+iv_q|\times\right.$$
$$\left.\times\prod_{p=r_1+1}^{r_1+r_2}\left|1+\frac{a_p+a_{p+r_2}}{2}+s+\frac{iv_p}{2}\right|^2\right\}^{\frac{1+\eta-\sigma}{2}}$$

[1] BRAUER, R.: On the zeta-functions of algebraic numberfields. Amer. J. Math. **69**, 243–250 (1947). — [2] HARDY, G. H., A. E. INGHAM and G. POLYA: Theorems concerning mean values of analytic functions. Proc. Royal Soc. London (A) **113**, 542–569 (1927). — [3] HECKE, E.: Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. Math. Z. **6**, 11–51 (1920). — [4] LANDAU, E.: Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. Leipzig 1918. — [5] RADEMACHER, H.: Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper. III. Math. Z. **27**, 321–426 (1928).

Dept. of Math., University of Pennsylvania, Philadelphia 4, Pa. (U.S.A.)

(Eingegangen am 7. November 1958)

Erhard Schmidt †

Am 6. Dezember 1959 ist Erhard Schmidt im Alter von 83 Jahren in Berlin gestorben. Viele Mathematiker gedenken in Verehrung des weitblickenden Forschers und warmherzigen Lehrers, dem sie bedeutende Anregungen und unvergeßliche Begegnungen mit der Schönheit der Mathematik verdanken. Mit hoher menschlicher Würde verkörperte Schmidt die Haltung, die er in seiner Berliner Rektoratsrede 1929 als die Quelle der mathematischen Grundlagenforschung bezeichnet hat: Unbeirrbarer Wahrheitsdrang, der nach Gewißheit vor dem eigenen Bewußtsein ringt, Selbstbeschränkung in der Breite der Fragestellung, Mut in der Weite der Zielsetzung und kühne Selbständigkeit in der Abstreifung der Fesseln des Geläufigen.

Die Mathematische Zeitschrift hat nach Lichtenstein, Schur und Knopp nun den letzten der vier Gründer verloren, die sich 1918 unter Lichtensteins tatkräftiger Führung zusammenfanden. Schmidt hat die Zeitschrift durch ständige Mitwirkung in der Redaktion und durch eigene, zum Teil außergewöhnlich umfangreiche Beiträge gefördert. Sein Vermächtnis wird in hohen Ehren gehalten werden.

Die Schriftleitung

KARLIN, S., and G. SZEGÖ
Math. Zeitschr. 72, 205–228 (1960)

On certain differential-integral equations

To the memory of LEON LICHTENSTEIN

By

S. KARLIN and G. SZEGÖ

§ 1. Introduction. Problems and Results[1])

1. The study of certain models of stochastic processes [*1, 6*] leads to the problem of finding all solutions of the linear differential-integral equation

$$\left[\prod_{k=1}^{n}(D+\lambda_k)\right]f(x)=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\int_0^\infty f(x+t)\,dH(t),\quad x\geqq 0, \tag{1.1}$$

which tend to a finite limit as $x\to+\infty$. Here H is a distribution function on the positive real axis with a positive finite second moment and the parameters λ_k are assumed (at first) to be positive but otherwise arbitrary; $D=d/dx$. All solutions $f(x)$ dealt with are naturally supposed to be n-fold differentiable.

Equation (1.1) is of the Wiener-Hopf convolution type since it is valid only for positive x. Consequently, with more stringent restrictions imposed on H this equation can be studied by employing relatively deep methods of complex analysis. Such an approach was carried out in [*1*]. In the present paper we offer a direct and elementary approach which yields more complete results. For possible applications the reader is referred to [*1*].

As examples we point out the following special cases of (1.1):

$$f'(x)+f(x)=\int_0^\infty f(x+t)\,dH(t),\quad x\geqq 0, \tag{1.2}$$

and

$$\left[\prod_{k=1}^{n}(D+\lambda_k)\right]f(x)=\sum_{p=1}^{m}\gamma_p f(x+t_p),\quad x\geqq 0, \tag{1.3}$$

where $t_p>0$, $\gamma_p>0$, $\sum_{p=1}^{m}\gamma_p=1$.

2. Let us illustrate the general idea of the method to be used by proving that $f(x)=\text{const.}$ is the only solution of (1.2) for which $\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty)$ exists and $f(+\infty)=f(0)$. (Below we prove more.) We may assume that $f(+\infty)=f(0)=0$. If $f(x)$ is not a constant, it attains either a positive maximum or a negative minimum (or both). Let $\max f(x)=f(\xi)=M>0$, $\xi>0$. We then have $f'(\xi)=0$ and from (1.2)

$$M=\int_0^\infty f(\xi+t)\,dH(t)\leqq M\int_0^\infty dH(t)=M$$

[1]) This research was supported by the Office of Naval Research and by the National Science Foundation. — Numbers in square brackets refer to the Bibliography at the end of the paper.

follows. This implies $f(\xi+t)=M$ for all points $t>0$ where $H(t)$ possesses a positive measure; such t must exist in view of the assumption that the second moment of $H(t)$ is positive. Choosing some $t=t_0>0$, and repeating the previous argument, we conclude that

$$f(\xi+2t_0)=M, \ldots, f(\xi+nt_0)=M,$$

when n is an arbitrary positive integer; for $n\to\infty$ this contradicts to $f(+\infty)=0$. In some cases more complicated "mean values" appear on the right-hand side and the method requires certain modifications.

3. Dealing with linear differential equations of constant coefficients it is natural to seek exponential solutions where the coefficient in the exponent is determined to satisfy an appropriate algebraic equation. We try the same procedure in the present problem. By direct verification we see that $f(x)=e^{-\alpha x}$ is a solution of (1.1) having a finite limit at $x\to+\infty$, if and only if $\Re(\alpha)>0$ and

$$W(\alpha)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{\lambda_k}\right)-\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,dH(t)=0. \tag{1.4}$$

An additional solution is furnished by $\alpha=0$ leading to $f(x)=\text{const}$. The usual convention applies to multiple roots: if α is a root of (1.4) of multiplicity r, $\Re(\alpha)>0$, then $e^{-\alpha x}$, $xe^{-\alpha x}$, ..., $x^{r-1}e^{-\alpha x}$ represent independent solutions, all having the limit 0 as $x\to+\infty$. (If $\alpha=0$ is a double root, the solution x must, of course, be rejected.)

We shall see in Section 2 that there exist precisely n or $n-1$ (counting multiplicities) exponential solutions with $\Re(\alpha)>0$ according as

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}<\int_0^\infty t\,dH(t) \quad \text{or} \quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\geqq\int_0^\infty t\,dH(t), \tag{1.5}$$

respectively. The principal result of this paper is the following uniqueness theorem.

THEOREM A. *The only solution of* (1.1) *which tends to a finite limit as* $x\to+\infty$, *is a linear combination of exponential solutions* $\{e^{-\alpha x}\}$, *where* $\Re(\alpha)>0$, *and of a constant. In particular, if the first inequality in* (1.5) *holds, there exists an* n*-dimensional linear manifold of exponential solutions; if the second inequality holds, there exists an* $(n-1)$*-dimensional linear manifold of such solutions.*

4. Before embarking on the proof of Theorem A we must discuss the roots of the transcendental equation $W(\alpha)=0$. This is accomplished in the following Section 2. Certain mean values and some preliminary remarks concerning their behavior at $x\to+\infty$ are dealt with in Section 3. The proof of Theorem A is completed in Section 4.

In Section 5 we consider the differential-integral equation (1.1) under more general conditions concerning λ_k. In Section 6 we deal with the equation

$$\left[\prod_{k=1}^{n}(D+\lambda_k)\right]f(x)=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\int_{-\infty}^{\infty}f(x+t)\,dH(t), \tag{1.6}$$

where x runs from $-\infty$ to $+\infty$. Here λ_k is real, $\lambda_k \neq 0$. The only solutions having finite limits, as $x \to +\infty$ and $x \to -\infty$, are in this case $f(x) = \text{const.}$

Sections 7—9 are devoted to a general treatment of our problem under the point of view of the concept of *semi-groups*. This general background might lead to other remarkable applications of our elementary method. Several illustrations are offered discussing in particular the partial differential equation of the heat transfer and a partial differential equation involving Laplace's operator.

§ 2. Preliminaries: On zeros

In this section we study the number and location of the zeros of the function $W(\alpha)$ defined by (1.4) in the right half of the complex plane, $\Re(\alpha) > 0$. We assume that all λ_k are positive.

1. We set

$$U(\alpha) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\alpha}{\lambda_k}\right), \qquad V(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dH(t), \tag{2.1}$$

so that $W(\alpha) = U(\alpha) - V(\alpha)$. This function is regular for $\Re(\alpha) > 0$ and continuous for $\Re(\alpha) \geqq 0$. For $\alpha = iu$, u real and non-zero, $W(\alpha)$ is different from zero. In fact,

$$|U(\alpha)| = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{u^2}{\lambda_k^2}\right)^{\frac{1}{2}} > 1 \geqq |V(\alpha)|. \tag{2.2}$$

Let $\varrho = 3 \max(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Since $\varrho \geqq 3\lambda_k$, $\lambda_k^{-1}\varrho - 1 > 1$, we have for α lying on the semicircle of radius ϱ about the origin and in $\Re(\alpha) \geqq 0$,

$$|U(\alpha)| \geqq \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{\varrho}{\lambda_k} - 1\right) > 1 \geqq |V(\alpha)|.$$

Thus the only non-vanishing zeros of $W(\alpha)$ in $\Re(\alpha) \geqq 0$ lie in the interior of the domain S bounded by the semicircle mentioned and by the corresponding segment of the imaginary axis.

2. We now prove the following

LEMMA 1. *The function $W(\alpha)$ possesses exactly n zeros in the region $\Re(\alpha) > 0$ and a simple zero at $\alpha = 0$ if*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} < \int_0^\infty t\, dH(t).$$

The function $W(\alpha)$ possesses exactly $n-1$ zeros in $\Re(\alpha) > 0$ and a simple zero at $\alpha = 0$ if

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} > \int_0^\infty t\, dH(t).$$

The function $W(\alpha)$ has exactly $n-1$ zeros in $\Re(\alpha) > 0$ and a double zero at $\alpha = 0$ if

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{-1} = \int_0^\infty t\, dH(t).$$

In all these cases multiple zeros are counted with the right multiplicity. Of course, $W(\alpha)$ is in general not analytic at $\alpha=0$. We say that $W(\alpha)$ has a simple zero at $\alpha=0$ if $W(0)=0$, $\lim_{\alpha\to 0+} W'(\alpha)\neq 0$, and a double zero at $\alpha=0$ if $W(0)=\lim_{\alpha\to 0+} W'(\alpha)=0$, $\lim_{\alpha\to 0+} W''(\alpha)\neq 0$. It may also be pointed out that the complex zeros of $W(\alpha)$ are conjugate in pairs.

For the proof of the Lemma we observe first that

$$(2.3)\quad \begin{cases} U(\alpha)=1-\alpha\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1}+\alpha^2\sum_{k<l}\lambda_k^{-1}\lambda_l^{-1}-\cdots=1-s_1\alpha+\frac{s_2}{2}\alpha^2-\cdots, \\ V(\alpha)=1-\alpha\int_0^\infty t\,dH(t)+\frac{\alpha^2}{2}\int_0^\infty t^2\,dH(t)+o(\alpha^2) \\ \qquad =1-h_1\alpha+\frac{h_2}{2}\alpha^2+o(\alpha^2), \quad \alpha\to 0+. \end{cases}$$

As to the second equation we note that

$$\left|\alpha^{-2}\left(e^{-\alpha}-1+\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\right)\right|\leqq A$$

uniformly in the right half plane $\Re(\alpha)\geqq 0$. Now, let ε be given and $\int_\omega^\infty t^2\,dH(t)<\varepsilon$; we have

$$\alpha^{-2}\left(V(\alpha)-1+h_1\alpha-\frac{h_2}{2}\alpha^2\right)=\left(\int_0^\omega+\int_\omega^\infty\right)\alpha^{-2}t^{-2}\left(e^{-\alpha t}-1+\alpha t-\frac{\alpha^2t^2}{2}\right)t^2\,dH(t).$$

The modulus of the second integral is less than $A\varepsilon$; the modulus of the first integral is less than $B|\alpha|$ where $B=B(\omega)$ is independent of α. This yields the assertion.

We add that in the first and second case of the lemma $\alpha=0$ is a simple zero. In the third case we have, by SCHWARZ's inequality,

$$s_2<s_2+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-2}=s_1^2=h_1^2\leqq h_2$$

so that $U(\alpha)-V(\alpha)$ vanishes exactly of the second order.

3. Let δ be a positive number. We denote by S_δ the domain arising from S by indentation into $\Re(\alpha)>0$ by a semicircle of radius δ about the origin. We apply the principle of the argument to the function

$$W(\alpha)=U(\alpha)-V(\alpha)=U(\alpha)\left(1-\frac{V(\alpha)}{U(\alpha)}\right)$$

in the domain S_δ. The total change of the argument of $U(\alpha)$ when the boundary of S_δ is described in the positive direction is $=2\pi n$. It remains to discuss the second factor which we denote by w. On the large semicircle and on the imaginary axis ($\alpha\neq 0$) we have $|U(\alpha)|>|V(\alpha)|$ so that the vector w will be restricted to a circle of radius less than 1 about 1 and consequently

$$-\pi/2<\arg w<\pi/2.$$

On the small semicircle of radius δ we have, if $s_1 \neq h_1$,

$$w = 1 - \frac{V(\alpha)}{U(\alpha)} = 1 - \frac{1 - h_1\alpha + \frac{h_2}{2}\alpha^2}{1 - s_1\alpha + \frac{s_2}{2}\alpha^2} + o(\alpha^2) = \alpha\left(h_1 - s_1 + o(1)\right).$$

In the third case, $s_1 = h_1$, we have

$$w = \alpha^2\left(\tfrac{1}{2}(s_2 - h_2) + o(1)\right).$$

Here and in the sequel, $o(1)$ tends to zero as $\delta \to 0$.

In the first case $h_1 - s_1$ is positive. At $\alpha = i\delta$ we have $\arg w = \pi/2 + o(1)$; at $\alpha = -i\delta$ we have $w = -\pi/2 + o(1)$ (see the remark about $\arg w$ above). Thus, describing the major arc of the boundary of S_δ from $-i\delta$ to $+i\delta$, the change of arg w will be $\pi + o(1)$. Now, describing the minor semicircle in the negative direction, the first factor α contributes a change of $-\pi$ to the argument while the second factor does not produce any significant change. Thus the total change of $\arg w$ is $o(1)$, i.e., $= 0$, and that of $\arg W(\alpha)$ is $2\pi n$.

In the second case $h_1 - s_1$ is negative. The change of $\arg w$ along the major arc is now $-\pi + o(1)$. Along the minor semicircle the same holds as before so that the total change of $\arg w$ is $-2\pi + o(1)$, i.e., -2π. Hence the change of $\arg W(\alpha)$ is $2\pi(n-1)$.

In the third case we note that $s_2 - h_2 < 0$ so that $\arg w = o(1)$ at $\alpha = \pm i\delta$. Hence the change along the major arc is also $o(1)$; along the minor arc it is determined essentially by α^2, i.e., $= -2\pi$, so that the result is the same as in the second case.

This completes the proof of Lemma 1.

§ 3. Preliminaries: On Transforms

In this section we define certain mean values useful in the discussion of the solutions of the differential-integral equation (1.1) which is in the center of our attention.

1. *We assume first that the constants* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *are all positive.* Let $\varphi(x)$ be a continuous function defined for $x \geqq 0$. We introduce the "transform"

$$\left\{\begin{aligned} K\varphi &= K\{\varphi(x)\} \\ &= e^{-\lambda_n x}\int\!\!\int \ldots \int \exp\{(\lambda_n - \lambda_{n-1})u_{n-1} + (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2})u_{n-2} + \\ &\quad + \cdots + (\lambda_2 - \lambda_1)u_1 + \lambda_1 u_0\} \cdot \varphi(u_0)\, du_0\, du_1 \ldots du_{n-1}, \end{aligned}\right. \tag{3.1}$$

where the domain of integration is:

$$0 \leqq u_0 \leqq u_1 \leqq \cdots \leqq u_{n-1} \leqq x. \tag{3.2}$$

(We may carry out this integration by integrating first with respect to u_0 from 0 to u_1, then integrate the resulting function with respect to u_1 from 0 to u_2, etc.; finally we integrate with respect to u_{n-1} from 0 to x.) The

transform (3.1) establishes a correspondence between $\varphi(x)$ and $K\{\varphi(x)\}$. Clearly $y\,K\{\varphi(x)\}$ is a particular solution of the differential equation

$$[(D+\lambda_1)(D+\lambda_2)\dots(D+\lambda_n)]\cdot Ky=\varphi(x), \tag{3.3}$$

uniquely determined by the conditions

$$(D^\nu K\{\varphi(x)\})_{x=0}=0, \qquad 0\leqq\nu\leqq n-1. \tag{3.4}$$

Thus if $f(x)$ is *any* solution of (3.3) we have

$$f(x)=K\{\varphi(x)\}+A_1e^{-\lambda_1x}+A_2e^{-\lambda_2x}+\dots+A_ne^{-\lambda_nx}, \tag{3.5}$$

where $A_1, A_2, \dots, A_n$ are proper constants depending on $f(x)$. The necessary modification is obvious if some λ_k are equal. Actually, by this remark our differential-integral equation (1.1) can be transformed into an integral equation (3.5) in which $K\{\varphi(x)\}$ stands for the K-transform of

$$\varphi(x)=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\int_0^\infty f(x+t)\,dH(t).$$

We note that $\varphi(x)>0$ involves $K\{\varphi(x)\}>0$.

Let us consider the special case $\varphi(x)=1$. Step-by-step application of the trivial inequality $\int_0^{u_1}e^{\lambda_1u_0}\,du_0<\lambda_1^{-1}\,e^{\lambda_1u_1}$ leads to

$$0<K\{1\}<(\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n)^{-1}, \tag{3.6}$$

valid for all $x>0$. [The constant on the right is a particular solution of (3.3), $\varphi(x)=1$.] We also have, if $0<\eta<\min(\lambda_k)$,

$$0<K\{e^{-\eta x}\}<\{(-\eta+\lambda_1)\dots(-\eta+\lambda_n)\}^{-1}e^{-\eta x}. \tag{3.7}$$

With the aid of (3.6) we conclude the following important inequalities concerning an arbitrary bounded and continuous $\varphi(x)$:

$$m<\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\cdot K\{\varphi(x)\}<M, \tag{3.8}$$

where $m\leqq\varphi(x)\leqq M$, *provided that* $m<0$ *and* $M>0$. In particular, if $|\varphi(x)|\leqq M$, $M>0$, we have

$$\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\cdot|K\{\varphi(x)\}|<M. \tag{3.8'}$$

Finally we observe that for $\varphi(x)=x^\nu e^{\beta x}$, $\beta>0$, ν integral, $\nu\geqq0$, we have $K\{\varphi(x)\}\sim x^\nu e^{\beta x}$ as $x\to+\infty$. This follows easily from the definition (3.1) for $\nu=0$ and by integrating by parts for $\nu>0$.

2. The following lemma which yields further information regarding the derivatives of the transform $K\{\varphi(x)\}$, is remarkable in itself, but it will not be used in the sequel.

LEMMA 2. *Let $\varphi(x)$ be continuous and $\varphi(x)\to0$ as $x\to+\infty$. Then all derivatives $\Phi^{(\nu)}(x)$ of the transform $K\{\varphi(x)\}=\Phi(x)$ defined by* (3.1) *tend to zero as $x\to+\infty$ where $0\leqq\nu\leqq n$.*

We set

$$(D+\lambda_n)\,\Phi(x)=g(x)$$
$$=e^{-\lambda_{n-1}x}\iint\cdots\int\exp\{(\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2})\,u_{n-2}+\cdots+\lambda_1 u_0\}\cdot\varphi(u_0)\,du_0\ldots du_{n-2},$$

where the range of integration is $0\leqq u_0\leqq u_1\leqq\cdots\leqq u_{n-2}\leqq x$.

We prove the assertion by mathematical induction showing that $g(x)\to 0$ implies $\Phi(x)\to 0$, hence also $\Phi'(x)\to 0$ as $x\to+\infty$. Let $\varepsilon>0$ be given and $|g(u)|<\varepsilon$ for $u\geqq\omega$. We have, $x>\omega$,

$$\Phi(x)=e^{-\lambda_n x}\int_0^x e^{\lambda_n u}\,g(u)\,du=e^{-\lambda_n x}\left(\int_0^{\omega}+\int_{\omega}^{x}\right)e^{\lambda_n u}\,g(u)\,du.$$

The first term on the right yields $e^{-\lambda_n x}O(1)$ while the second term is less than $\varepsilon e^{-\lambda_n x}\int_0^x e^{\lambda_n u}\,du$.

From Lemma 2 we conclude the following

COROLLARY. *Let $f(x)$ be any solution of (1.1) for which $\lim_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty)$ exists. Then all derivatives $f^{(\nu)}(x)$ tend to zero as $x\to+\infty$ where $1\leqq\nu\leqq n$.*

Indeed, we can assume that $f(+\infty)=0$ so that

$$\varphi(x)=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\int_0^{\infty}f(x+t)\,dH(t)\to 0.$$

Use (3.5) and Lemma 2.

3. *We assume now that all λ_k are negative.*

Let $\varphi(x)$ be bounded and continuous for all real x [2]). The "transform" adapted to the present case can be defined as follows:

$$(3.9)\quad\begin{cases}L\varphi=L\{\varphi(x)\}\\ \quad=(-1)^n e^{-\lambda_n x}\iint\cdots\int\exp\{(\lambda_n-\lambda_{n-1})\,u_{n-1}+(\lambda_{n-1}-\lambda_{n-2})\,u_{n-2}+\\ \quad+\cdots+(\lambda_2-\lambda_1)\,u_1+\lambda_1 u_0\}\cdot\varphi(u_0)\,du_0\,du_1\ldots du_{n-1}\end{cases}$$

where the domain of integration is now

$$(3.10)\qquad x\leqq u_{n-1}\leqq u_{n-2}\leqq\cdots\leqq u_1\leqq u_0<+\infty.$$

(Again we integrate, first with respect to u_0, from u_1 to $+\infty$, then with respect to u_1, from u_2 to $+\infty$, etc., finally with respect to u_{n-1} from x to $+\infty$.) The expression (3.9) is meaningful since the integral with respect to u_0 is majorized by $\int_{u_1}^{\infty}e^{\lambda_1 u_0}\,du_0=-\lambda_1^{-1}e^{\lambda_1 u_1}$, etc. The differential equation (3.3) holds again and also (3.5) (with $L\{\varphi(x)\}$ instead of $K\{\varphi(x)\}$); however, (3.4) does not hold in general. Also (1.1) is again equivalent to the integral equation (3.5) where $L\{\varphi(x)\}$ stands for the L-transform of

$$\varphi(x)=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\int_0^{\infty}f(x+t)\,dH(t).$$

We note that $\varphi(x)>0$ involves $(-1)^n L\{\varphi(x)\}>0$.

[2]) In some applications we assume that $x\geqq 0$ throughout.

Let $\varphi(x)=1$. We obtain

$$L\{1\}=(\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n)^{-1}. \tag{3.11}$$

This formula is a limiting case of the following one:

$$L\{e^{-\eta x}\}=\{(-\eta+\lambda_1)\dots(-\eta+\lambda_n)\}^{-1}e^{-\eta x},\quad \eta>0. \tag{3.12}$$

Finally the analog of (3.8) holds:

$$m<\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\cdot L\{\varphi(x)\}<M \tag{3.13}$$

where $m\leqq\varphi(x)\leqq M$, unless $\varphi(x)=\text{const}$. There is no restriction on the sign of m and M in the present case. (Clearly, for m and M we may take the lower and upper bound of $\varphi(x)$ in $[x, +\infty]$.)

4. The following important lemma is partly an analog of Lemma 2.

LEMMA 3. *Let $\varphi(x)$ be continuous for all real x and $\varphi(x)\to 0$ as $x\to+\infty$. Then $L\{\varphi(x)\}\to 0$ as $x\to+\infty$.*

Also, if $\varphi(x)\to 0$ as $x\to-\infty$, we have $L\{\varphi(x)\}\to 0$ as $x\to-\infty$.

In view of (3.11) the following more general assertion holds: If $\varphi(x)\to c$ as $x\to+\infty$ or $x\to-\infty$ we have:

$$L\{\varphi(x)\}\to c\,L\{1\}=c(\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n)^{-1}. \tag{3.14}$$

We note that $x\to+\infty$ is singled out in the definition of L so that the proofs of the two assertions contained in the lemma will be somewhat different. Actually the first assertion is an obvious consequence of (3.13). So we turn to the second one assuming that $\varphi(x)\to 0$ as $x\to-\infty$.

We again use mathematical induction. Let $L\{\varphi(x)\}=L_n(x)$ and let us denote by $L_{n-1}(x)$ the analogous transform of $\varphi(x)$ with parameters $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$. Since

$$(D+\lambda_n)L_n(x)=L_{n-1}(x),\quad L_0(x)=\varphi(x),$$

we have

$$L_n(x)=e^{-\lambda_n x}\int_{+\infty}^{x}e^{\lambda_n u}L_{n-1}(u)\,du.$$

Now the argument is essentially the same as in 2. Let $|L_{n-1}(u)|<\varepsilon$, $u<-\omega$; also let $x<-\omega$. Then

$$L_n(x)=e^{-\lambda_n x}\left(\int_{+\infty}^{-\omega}+\int_{-\omega}^{x}\right)e^{\lambda_n u}L_{n-1}(u)\,du=e^{-\lambda_n x}O(1)+\varepsilon e^{-\lambda_n x}\int_{x}^{\infty}e^{\lambda_n u}\,du.$$

This yields the assertion.

COROLLARY. *Let $\varphi(x)\to c$ as $x\to+\infty$.* Then

$$DL\{\varphi(x)\}\to 0\quad as\quad x\to+\infty.$$

The same holds for the limiting process $x\to-\infty$.

Indeed, $DL_n=L_{n-1}(x)-\lambda_n L_n(x)$ so that

$$DL_n\to c(\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{n-1})^{-1}-\lambda_n c(\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n)^{-1}=0.$$

§ 4. Proof of Theorem A

We follow the notation of § 2 and assume, for the sake of simplicity, that the zeros of $W(\alpha)$ in $\Re(\alpha)>0$ are all distinct. The proof is carried out by considering two cases.

1. *Case 1.* $s_1<h_1$. Here, we have available an n-dimensional manifold of exponential solutions spanned by the solutions $e^{-\alpha_k x}$, $k=1, 2, \ldots, n$, where $W(\alpha_k)=0$, $\Re(\alpha_k)>0$.

Suppose $f(x)$ is a real solution of (1.1) having a limit as $x\to+\infty$, say $f(+\infty)$. We may assume that $f(+\infty)=0$. By subtracting a suitable linear combination of the $e^{-\alpha_k x}$ we may suppose that

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0. \tag{4.1}$$

Furthermore, the resulting solution $f(x)$ is still real since the α_k occur in conjugate pairs; also $f(+\infty)=0$. We show now that such a real solution $f(x)$ is identically zero.

In view of (3.4) and (4.1) we must have $f(x)=K\{\varphi(x)\}$ where $K\{\varphi(x)\}$ is the transform of $\varphi(x)=\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\int_0^\infty f(x+t)\,dH(t)$. If $f(x)$ would not be identically zero, $|f(x)|$ would attain its maximum for some finite $x=\xi$, $\max|f(x)|=|f(\xi)|=M$, $\xi>0$, $M>0$. Since $|\varphi(x)|\leqq\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n\cdot M$ we obtain from (3.8) $|f(x)|<M$. For $x=\xi$ this is a contradiction.

2. *Case 2.* $s_1\geqq h_1$. The proof in this case is less simple since we do not have now enough exponential solutions in order to effect the relations (4.1). Let the existing exponential solutions guaranteed by Lemma 1 be denoted by $e^{-\beta_k x}$, $k=1, 2, \ldots, n-1$, $W(\beta_k)=0$, $\Re(\beta_k)>0$. For convenience we assume again that all β_k are distinct.

Suppose $f(x)$ is a real solution of (1.1) satisfying the condition $f(+\infty)=0$. By a similar adjustment as in Case 1 we may assume that f also satisfies

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-2)}(0)=0. \tag{4.2}$$

[If $n=1$, then (4.2) is omitted.] We aim to prove that a solution satisfying (4.2), and in addition $f(+\infty)=0$, must yield $f(x)\equiv 0$. It suffices to prove that $f^{(n-1)}(0)=0$, for then we can proceed as we did in Case 1. Suppose to the contrary that $f^{(n-1)}(0)\neq 0$, say $f^{(n-1)}(0)<0$ for definiteness. [If $f^{(n-1)}(0)>0$ we consider $-f(x)$.] We form the new function

$$\gamma_\eta(x)=f(x)-\mu e^{-\eta x}-\sum_{k=1}^{n-1} b_k e^{-\beta_k x} \tag{4.3}$$

where η is a small positive parameter. The constants μ and b_k are determined according to the conditions

$$\gamma_\eta(0)=\gamma_\eta'(0)=\cdots=\gamma_\eta^{(n-1)}(0)=0; \tag{4.4}$$

in addition, we note that $\gamma_\eta(+\infty)=0$. In particular, by straightforward calculation it is readily seen that $\gamma_\eta(x)$ is real and as η approaches zero, the

coefficient $\mu=\mu(\eta)=f^{(n-1)}(0)\prod_{k=1}^{n-1}(\beta_k-\eta)^{-1}$ approaches $\mu(0)=f^{(n-1)}(0)\prod_{k=1}^{n-1}\beta_k^{-1}$ which is *negative*.

The constants $b_k=b_k(\eta)$ remain uniformly bounded as $\eta\to+0$. Since $f(+\infty)=0$ and $\Re(\beta_k)>0$ we may choose x so large that

$$\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n-1}b_k e^{-\beta_k x}\right|<-\tfrac{1}{2}\mu(0).$$

Afterward choosing η sufficiently small we see that $\gamma_\eta(x)$ will attain a positive value. Hence $\gamma_\eta(x)$ will have a positive maximum, say M, attained at some finite point ξ, $\xi>0$. Since

$$f(x)-\sum_{k=1}^{n-1}b_k e^{-\beta_k x}=\gamma_\eta(x)+\mu(\eta)\,e^{-\eta x}$$

is a solution of our differential-integral equation (1.1), we have

$$[(D+\lambda_1)(D+\lambda_2)\dots(D+\lambda_n)]\,\gamma_\eta(x)=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\int_0^\infty\gamma_\eta(x+t)\,dH(t)+$$
$$+\mu(\eta)\left\{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\int_0^\infty e^{-\eta t}\,dH(t)-(-\eta+\lambda_1)\dots(-\eta+\lambda_n)\right\}e^{-\eta x}.$$

We denote the K-transform of

$$\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\int_0^\infty\gamma_\eta(x+t)\,dH(t)\quad\text{by}\quad\Gamma_\eta(x).$$

Since $\gamma_\eta(x)$ satisfies the conditions (4.4) we have

$$\gamma_\eta(x)=\Gamma_\eta(x)+\mu(\eta)\left\{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\int_0^\infty e^{-\eta t}\,dH(t)-\right.$$
$$\left.-(-\eta+\lambda_1)\dots(-\eta+\lambda_n)\right\}\cdot K\{e^{-\eta x}\}.$$

Inserting $x=\xi$ in this equation, we find, in view of $\gamma_\eta(\xi)=M$, $\Gamma_\eta(\xi)<M$, see (3.8), that

$$\mu(\eta)\left\{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\int_0^\infty e^{-\eta t}\,dH(t)-(-\eta+\lambda_1)\dots(-\eta+\lambda_n)\right\}>0.$$

Expanding in powers of η, we see that

$$\mu(\eta)\left\{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\left(1-h_1\eta+\frac{h_2}{2}\eta^2\right)-\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n\left(1-s_1\eta+\frac{s_2}{2}\eta^2\right)+o(\eta^2)\right\}>0.$$

Let $s_1>h_1$; for sufficiently small η, the last inequality can prevail only if $\mu(\eta)>0$. The same conclusion follows if $s_1=h_1$ since in this case $h_2-s_2>0$. Consequently, we find in all circumstances $\mu(\eta)>0$ which contradicts $f^{(n-1)}(0)<0$.

The proof of Theorem A is hereby complete.

§ 5. Generalization

We consider again the differential-integral equation (1.1) in which the λ_k are now supposed to be all real and different from 0 (distinct or not). We suppose that $x \geqq 0$.

1. THEOREM B. *Let $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ be negative numbers. The only solution of* (1.1) *having a finite limit as $x \to +\infty$, is $f(x) = \text{const}$.*

For the proof we denote by $f(x)$ a solution of (1.1) with $f(+\infty) = 0$ and by $\varphi(x)$ the function on the right so that $\varphi(+\infty) = 0$. According to Lemma 3 we have $L\{\varphi(x)\} \to 0$ as $x \to +\infty$. Thus in the L-analog of (3.5) (since $e^{-\lambda_k x} \to \infty$) all A_k must be zero, $f(x) = L\{\varphi(x)\}$.

Now let $M = |f(\xi)| > 0$, $\xi \geqq 0$, be the maximum of $|f(x)|$ for $x \geqq 0$ so that $|\varphi(x)| \leqq |\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n| \cdot M$. Here the sign $=$ cannot hold identically since $\varphi(+\infty) = 0$. Hence we infer from (3.13) that $|L\{\varphi(x)\}| < M$, i.e., $|f(x)| < M$ which is a contradiction for $x = \xi$. This completes the proof.

2. Before proceeding to a common generalization of Theorems A and B, let us recapitulate the foregoing results concerning the two transforms K and L. We employ K whenever all λ_k are positive, and L whenever all λ_k are negative. Both transforms satisfy the differential equation (3.3); the first one is completely characterized by conditions (3.4), the second one by the single condition that $L\{\varphi(x)\} \to 0$ (more generally, that L is bounded) as $x \to +\infty$.

THEOREM C. *Let $\{\lambda_k\}$ be a set of n non-vanishing real numbers, $n \geqq 2$; we denote by r the number of the negative λ_k and we assume that $1 \leqq r \leqq n-1$.*

The most general solution of (1.1) *which tends to a finite limit as $x \to +\infty$ is a linear combination of certain exponential solutions $\{e^{-\alpha x}\}$ where $\Re(\alpha) > 0$, and of a constant. In particular, there exists an $(n-r)$-dimensional and $(n-r-1)$-dimensional linear manifold of exponential solutions according as the first or second inequality in* (1.5) *holds, respectively.*

In (1.5) we include all λ_k, not only the $n-r$ positive ones.

We note that the function $W(\alpha)$ defined by (1.4) will now have exactly $n-r$ and $n-r-1$ zeros in the half plane $\Re(\alpha) > 0$, respectively. This follows by only a slight modification of the argument of § 2.

Further, we denote by $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ the negative elements, by $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n$ the positive elements of the set $\{\lambda_k\}$. We write again

$$\varphi(x) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \int_0^\infty f(x+t)\, dH(t)$$

and decompose the differential-integral equation (1.1) into the two equations:

$$\text{(5.1)} \qquad \begin{cases} [(D+\lambda_{r+1})(D+\lambda_{r+2}) \ldots (D+\lambda_n)]\, f(x) = g(x), \\ [(D+\lambda_1)(D+\lambda_2) \ldots (D+\lambda_r)]\, g(x) = \varphi(x). \end{cases}$$

3. In Case 1, $s_1 < h_1$, we have $n-r$ independent exponential solutions of (1.1). Thus we may assume that

$$\text{(5.2)} \qquad f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-r-1)}(0) = 0,$$

and in addition $f(+\infty)=0$; hence $\varphi(+\infty)=0$. From the second equation (5.1) we conclude that

$$g(x)=L\{\varphi(x)\}+A_1e^{-\lambda_1 x}+A_2e^{-\lambda_2 x}+\cdots+A_\nu e^{-\lambda_\nu x}$$

where $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ are constants and $L\{\varphi(x)\}$ is the L-transform of $\varphi(x)$ with respect to the negative parameters $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$. Now using the first equation (5.1) we conclude, in view of (5.2), that $f(x)=K\{g(x)\}$ where the transform K refers to the positive parameters $\lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2}, \ldots, \lambda_n$.

As observed at the end of § 3, 1, the K-transform of $x^\nu e^{\beta x}$, $\beta>0$, $\nu\geqq 0$, tends to ∞ as $x\to+\infty$. Since $f(x)$ has a finite limit, all A_k in $g(x)$ must be zero, i.e., $g(x)=L\{\varphi(x)\}$, $f(x)=K\{g(x)\}=KL\{\varphi(x)\}$. In explicit form:

$$(5.3)\qquad \begin{cases} f(x)=(-1)^\nu e^{-\lambda_n x}\times \\ \qquad \times\int\int\ldots\int \exp\{(\lambda_n-\lambda_{n-1})u_{n-1}+\cdots+(\lambda_2-\lambda_1)u_1+\lambda_1 u_0\}\times \\ \qquad \times\varphi(u_0)\,du_0\,du_1\ldots du_{n-1}, \end{cases}$$

where the range of integration has the form:

$$0\leqq u_\nu\leqq u_{\nu+1}\leqq\cdots\leqq u_{n-1}\leqq x;\qquad 0\leqq u_\nu\leqq u_{\nu-1}\leqq\cdots\leqq u_1\leqq u_0<+\infty.$$

Let us now assume that $f(x)$ is not identically zero, and let $M=|f(\xi)|$ be the maximum of $|f(x)|$, $\xi>0$, $M>0$. Since $|\varphi(x)|\leqq|\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n|\cdot M$ we have, by (3.13):

$$|g(x)|\leqq|\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_\nu|^{-1}\cdot|\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n|\cdot M.$$

Now, by (3.8),

$$|f(x)|<(\lambda_{\nu+1}\lambda_{\nu+2}\ldots\lambda_n)^{-1}\cdot|\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_\nu|^{-1}\cdot|\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n|\cdot M=M$$

which yields a contradiction for $x=\xi$.

4. In dealing with Case 2, $s_1\geqq h_1$, we may be brief. We have $n-\nu-1$ solutions $\{e^{-\beta_k x}\}$, $\Re(\beta_k)>0$, so that we may assume

$$(5.4)\qquad f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-\nu-2)}(0)=0$$

(if $n-\nu=1$ this condition must be omitted), and also $f(+\infty)=0$. We suppose as in § 4.2 that $f^{(n-\nu-1)}(0)<0$.

For positive η we introduce $\gamma_\eta(x)$ as in (4.3) so that (4.4) holds ($n-\nu-1$ must be written in place of $n-1$); also $\gamma_\eta(+\infty)=0$. Since $\gamma_\eta(x)+\mu(\eta)e^{-\eta x}$ satisfies (1.1) we find

$$(5.5)\qquad \begin{cases} [(D+\lambda_{\nu+1})\ldots(D+\lambda_n)]\,\gamma_\eta(x)+ \\ \qquad +\mu(\eta)(-\eta+\lambda_{\nu+1})\ldots(-\eta+\lambda_n)e^{-\eta x}=g_\eta(x), \\ [(D+\lambda_1)\ldots(D+\lambda_\nu)]\,g_\eta(x) \\ \qquad =\lambda_1\ldots\lambda_n\int_0^\infty\gamma_\eta(x+t)\,dH(t)+\mu(\eta)\lambda_1\ldots\lambda_n e^{-\eta x}\int_0^\infty e^{-\eta t}\,dH(t) \end{cases}$$

where $g_\eta(x)$ is defined by the first equation. Let us denote the L-transform (referring to $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$) of

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \int_0^\infty \gamma_\eta(x+t)\, dH(t) \quad \text{by} \quad \Delta_\eta(x).$$

We have from the second equation (5.5):

$$g_\eta(x) = \Delta_\eta(x) + \mu(\eta)\, \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \int_0^\infty e^{-\eta t}\, dH(t) \cdot L\{e^{-\eta x}\} + \sum_{k=1}^{r} A_k e^{-\lambda_k x}.$$

Now we conclude from the first equation (5.5) (K refers to $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$):

$$\begin{aligned}\gamma_\eta(x) &= K\{g_\eta(x)\} - \mu(\eta)\,(-\eta+\lambda_{r+1}) \ldots (-\eta+\lambda_n)\, K\{e^{-\eta x}\} \\ &= K\{\Delta_\eta(x)\} + \mu(\eta)\, \lambda_1 \ldots \lambda_n \int_0^\infty e^{-\eta t}\, dH(t) \cdot KL\{e^{-\eta x}\} - \\ &\quad - \mu(\eta)\,(-\eta+\lambda_{r+1}) \ldots (-\eta+\lambda_n)\, K\{e^{-\eta x}\};\end{aligned}$$

the constants A_k must all be zero since $\gamma_\eta(x)$ is bounded as $x \to +\infty$.

Again, for sufficiently small η, $\max \gamma_\eta(x) = M > 0$ is attained for some $x = \xi$, $\xi > 0$. Since

$$(-1)^r \Delta_\eta(x) = L\left\{|\lambda_1 \ldots \lambda_r| \cdot \lambda_{r+1} \ldots \lambda_n \int_0^\infty \gamma_\eta(x+t)\, dH(t)\right\}$$

and $\int_0^\infty \gamma_\eta(x+t)\, dH(t) \to 0$ as $x \to +\infty$, we have by (3.13):

$$\Delta_\eta(x) < \lambda_{r+1} \ldots \lambda_n \cdot M.$$

We use (3.8) and obtain, in view of (3.12):

$$\begin{aligned}\gamma_\eta(x) < M + \mu(\eta) \Big\{ &\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \int_0^\infty e^{-\eta t}\, dH(t)\, [(-\eta+\lambda_1) \ldots (-\eta+\lambda_r)]^{-1} - \\ &- (-\eta+\lambda_{r+1}) \ldots (-\eta+\lambda_n) \Big\} K\{e^{-\eta x}\}.\end{aligned}$$

Hence, as in § 4.2,

$$(-1)^r \mu(\eta) \left\{ \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \int_0^\infty e^{-\eta t}\, dH(t) - (-\eta+\lambda_1) \ldots (-\eta+\lambda_n) \right\} \overset{\cdot}{>} 0.$$

Expanding we see that

$$(-1)^r \mu(\eta) \left\{ \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \left(1 - h_1 \eta + \frac{h_2}{2} \eta^2\right) - \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \left(1 - s_1 \eta + \frac{s_2}{2} \eta^2\right) + o(\eta^2) \right\} > 0,$$

$$\mu(\eta)\,(s_1 - h_1) > 0 \quad \text{if} \quad s_1 > h_1,$$

$$\mu(\eta)\,(s_2 - h_2) > 0 \quad \text{if} \quad s_1 = h_1, \quad s_2 > h_2.$$

The contradiction is apparent (see § 4.2).

§ 6. Another Differential-Integral Equation

In this section we consider the equation (1.6) in which the constants $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ are again all real and different from zero (distinct or not). In this case, however, x runs over all real values [in contrast to (1.1) where x was non-negative]. Thus in the present situation no exponential solution exists which remains "stable" on the whole range except the constant. We prove

THEOREM D. *The only solutions of* (1.6) *where the numbers* $\{\lambda_k\}$ *are real and different from zero, having finite limits as* $x \to +\infty$ *and* $x \to -\infty$, *are* $f(x) = \text{const}$.

1. We denote by $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ the negative members of the set $\{\lambda_k\}$ and by $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n$ the remaining (positive) ones, and we decompose (1.6) as follows:

$$\begin{cases} [(D+\lambda_{r+1})(D+\lambda_{r+2})\ldots(D+\lambda_n)]\, f(x) = g(x), \\ [(D+\lambda_1)(D+\lambda_2)\ldots(D+\lambda_r)]\, g(x) = \varphi(x) \end{cases} \tag{6.1}$$

where $\varphi(x)$ is the function on the right-hand side of (1.6). Replacing x by $-x$ in the first equation, we obtain

$$[(D-\lambda_{r+1})(D-\lambda_{r+2})\ldots(D-\lambda_n)]\,(-1)^{n-r} f(-x) = g(-x). \tag{6.2}$$

From the second equation (6.1) we conclude

$$g(x) = L\{\varphi(x)\} + \sum_{k=1}^{r} A_k e^{-\lambda_k x}$$

where the transform L is taken with the negative constants $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Further, we obtain from (6.2):

$$(-1)^{n-r} f(-x) = L^* L_1 + \sum_{k=1}^{r} A_k L^*\{e^{\lambda_k x}\} + \sum_{k=r+1}^{n} A_k e^{\lambda_k x} \tag{6.3}$$

where the symbols L_1 and L^* can be explained as follows: First, in $L\{\varphi(x)\}$ we replace x by $-x$; the resulting function (transform) is denoted by $L_1 = L_1(x)$. To this function we apply the L-transform L^* associated with the negative parameters $-\lambda_{r+1}, -\lambda_{r+2}, \ldots, -\lambda_n$. Since $f(x)$, hence also $\varphi(x)$, is bounded, the transforms L_1 and L^* are bounded. Taking $x \to -\infty$ and $x \to +\infty$ we see that all constants A_k must vanish so that $(-1)^{n-r} f(-x) = L^* L_1$.

2. The case $f(+\infty) = f(-\infty)$ (say $=0$) can be dealt with in the familiar way. Indeed, if f would not be identically zero, $\max |f(x)| = M > 0$ would be attained for a finite $x = \xi$. Using (3.13) and inserting $x = -\xi$ in (6.3) a contradiction follows.

Let $f(+\infty) = +1$ and $f(-\infty) = -1$. It is easy to show that $\varphi(+\infty) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ and $\varphi(-\infty) = -\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ (decompose the integral $\varphi(x)$ into three parts corresponding to the ranges $-\infty, -\omega$; $-\omega, +\omega$; $+\omega, +\infty$). By applying Lemma 3 and its corollary (to L_1 and L^*, respectively) we obtain that $f'(x) \to 0$ as $x \to +\infty$ and $x \to -\infty$. Since $f'(x)$ cannot vanish identically (other-

wise $f(x)$ would be constant, a contradiction) $\max |f'(x)| = M' > 0$ will be attained for a finite $x = \xi$.

Now we observe that the function $\varphi(x)$ is differentiable and

$$\varphi'(x) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} f'(x+t)\, dH(t). \tag{6.4}$$

Indeed, $f'(x)$ is bounded so that the integral in (6.4) is uniformly convergent.

From (1.6) we obtain by differentiation

$$\left[\prod_{k=1}^{n} (D + \lambda_k)\right] f'(x) = \varphi'(x) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \int_{0}^{\infty} f'(x+t)\, dH(t), \tag{6.5}$$

or from (6.1):

$$\begin{cases} [(D+\lambda_{r+1})(D+\lambda_{r+2}) \dots (D+\lambda_n)]\, f'(x) = g'(x), \\ [(D+\lambda_1)(D+\lambda_2) \dots (D+\lambda_r)]\, g'(x) = \varphi'(x). \end{cases} \tag{6.6}$$

As above we have

$$[(D-\lambda_{r+1})(D-\lambda_{r+2}) \dots (D-\lambda_n)]\, (-1)^{n-r} f'(-x) = g'(-x). \tag{6.7}$$

Now using the same argument as before we find as in (6.3): $(-1)^{n-r} f'(-x) = L^* L_1$ where the L-transforms must be applied to $f'(x)$ in a similar fashion as above.

This yields a contradiction in the usual manner so that $f(+\infty)$ must coincide with $f(-\infty)$ and so $f(x) = \text{const}$.

§7. A Semi-Group Extension of the Differential-Integral Equation (1.1) [3]

1. The analysis concerning existence and uniqueness of solutions of the differential-integral equation (1.1) can be generalized in the following manner. We consider the equation

$$\left[\prod_{k=1}^{n} (A + \lambda_k)\right] f(x) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \int_{0}^{\infty} (T_t f)(x)\, dH(t), \qquad x \in I, \tag{7.1}$$

where again λ_k denote real non-zero constants and H represents a cumulative distribution function. Moreover, T_t $(t > 0)$ designates a semi-group of bounded linear transformations which act on an appropriate linear space of bounded functions Γ, mapping Γ into itself (each f in Γ is defined on a set I); A represents the infinitesimal generator of T_t. In formal terms $T_t \sim e^{tA}$.

We shall assume in what follows that T_t is continuous in t in the sense that if t_n tends to t, then for each f in Γ, $(T_{t_n} f)(x)$ converges to $(T_t f)(x)$ for $x \in I$. For our purposes we need not require the convergence to be uniform with respect to the variable x. (The reader will find that this notion of continuity of T_t does not conform to the customary one which involves convergence in a Banach space.) It is also usual to define $T_0 =$ the identity mapping

[3] We express our indebtedness to Professors J. McGregor and H. Scarf for several valuable comments related to Section 7.

and postulate the continuity of T at $t=0$ as well. In most examples of semi-groups encountered in applications these conditions are easily seen to be satisfied (see [4]). In the particular cases discussed below continuity of T_t at the origin is identical to a version of a classical summability theorem.

We also assume that the semi-groups considered are composed of uniformly bounded linear transformations. This means that for every f in Γ, $T_t f$ is uniformly bounded jointly in the variables t and x.

The linear operator A may be defined rigorously as follows: A function f in Γ belongs to the domain of A if

$$\frac{(T_t f)(x) - f(x)}{t}$$

converges for each x in I as t tends to zero, and the limit function $g(x)$ is a member of Γ. In that case, we set $Af=g$.

We shall be interested in determining the most general solution of (7.1) which belongs to Γ and obeys a suitable boundary condition. In speaking of solutions, we concentrate attention to functions of Γ belonging to the domain of A and verifying the integral equation (7.1). The boundary condition will express the natural analog of the limit requirement "$\lim_{x\to\infty} f(x)$ exists" which played so prominent a role in our investigations of Sections 1—6.

2. To illustrate the generality involved in the study of equation (7.1), we cite three examples, each of which are examined in more detail in the final Section 9.

(a) Let Γ represent the space of all bounded continuous functions defined on the interval $I=[0, \infty]$. We set $(T_t f)(x)=f(x+t)$. It is plain to see that $A=d/dt$. In this case, equation (7.1) reduces to (1.1).

If we enlarge T_t to embrace the full translation group so that t varies from $-\infty$ to $+\infty$ and $H(t)$ is correspondingly extended so as to represent a distribution on the full line, then the analog of (7.1) becomes (1.6).

The existence and uniqueness of solutions of (1.6) subject to the boundary condition "$\lim f(x)$ exists as $x\to+\infty$ and $x\to-\infty$" has been thoroughly explored in our discussions of Section 6.

(b) Let I denote the real line, i.e., $I=[-\infty, \infty]$ and determine Γ to consist of all bounded continuous functions defined on I. We define for f in Γ and $t\geqq 0$

$$(7.2) \qquad (T_t f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2t}(x-y)^2} f(y)\, dy, \quad x \in I.$$

An equivalent way of describing this semi-group is to recognize $T_t f$ as the solution $u(t, x)$ of the heat equation

$$(7.3) \qquad u_t = \tfrac{1}{2} u_{xx}, \quad \text{under the initial condition}$$

$$u(0, x) = f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

It follows easily from (7.2) that $Af = \frac{1}{2} f''$ wherever f'' is continuous. Hence, with this substitution for A, (7.1) becomes

$$(7.4)\quad \left[\prod_{k=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2} D^2 + \lambda_k\right)\right] f(x) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \int_0^\infty u(t, x)\, dH(t) \quad \text{for} \quad -\infty < x < \infty.$$

The semi-group, generated by the heat equation in several dimensions (say, p), is fitted into a similar framework provided the following identifications are made:

(1) I = Euclidean p-space (E^p);

(2) Γ consists of all continuous bounded functions defined on I. The semi-group of the heat equation in p-dimensions possesses for each x in I the representation formula

$$(7.5)\quad (T_t f)(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^p}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2t}\sum_{k=1}^{p}(x_k - y_k)^2} f(y_1, y_2, \dots, y_p)\, dy_1 \dots dy_p$$

(x stands for the vector $(x_1, x_2, \dots, x_p)$).

Alternatively, $T_t f(x) = u(t, x)$ represents the solution of the equation

$$(7.6)\quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \nabla^2 u, \text{ under the initial condition } u(0, x) = f(x).$$

Here $A = \frac{1}{2} \nabla^2$ and the corresponding differential-integral equation (7.1) is of the explicit form

$$(7.7)\quad \left[\prod_{k=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2} \nabla^2 + \lambda_k\right)\right] f(x) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \int_0^\infty u(t, x)\, dH(t), \qquad x \in I.$$

If we restrict our objectives so as to characterize only radial solutions of (7.7), i.e., solutions for which $f(x_1, \dots, x_p) = f(r)$, $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2}$, then the induced semi-group is generated by the infinitesimal operator

$$(7.8)\quad A = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{p-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

and $(T_t f)(r)$ represents the solution of the equation $u_t = A u$ subject to the initial condition $u(0, r) = f(r)$. In the radial case, $I = (0, \infty)$.

(c) For our final example we take I countable discrete. Without loss of generality we set $I = \{0, 1, 2, \dots\}$. The space Γ comprises the set of all bounded sequences $f = (f_0, f_1, f_2, \dots)$.

Consider the following semi-group:

$$(7.9)\quad (T_t f)(i) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}(t)\, f_j \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

where

$$(7.10)\quad P_{ij}(t) = \frac{(\lambda t)^i}{(1+\lambda t)^{i+1}} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \binom{i+j-k}{j} \left(\frac{1}{\lambda t}\right)^k \left(\frac{\lambda t}{1+\lambda t}\right)^{j-k} \quad \text{for} \quad i \leqq j$$

and $P_{ij}(t)$ for $i > j$ is constructed from the formula (7.10) by interchanging i and j on the right-hand side; $\lambda > 0$. We have, in particular,

$$P_{0j}(t) = \frac{(\lambda t)^j}{(1+\lambda t)^{j+1}}.$$

The semi-group character of $P(t)=(P_{ij}(t))$, although not obvious from the analytical formula (7.10), can be established, with some calculation. For a more transparent analysis we refer to [5]. This semi-group has its origin in the study of linear growth birth and death stochastic processes, and can be construed as the semi-group arising from a discrete version of a diffusion equation with linear coefficients. Specifically, $(T_t f)(n)=u_n(t)$ solves the equation

$$(7.11)\quad \frac{du_n(t)}{dt}=n\lambda u_{n-1}(t)-(2n+1)\lambda u_n(t)+(n+1)\lambda u_{n+1}(t),\quad n=0,1,2,\ldots$$

where

$$u_{-1}(t)=0 \quad \text{and} \quad u_n(0)=f_n.$$

An alternative representation of $P_{ij}(t)$ in terms of the classical Laguerre polynomials exists, viz.,

$$P_{ij}(t)=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-xt}\,Q_i(x)\,Q_j(x)\,e^{-x/\lambda}\,dx,\quad \lambda>0,$$

where $Q_i(x)=L_i(x/\lambda)$ and L_i is the ith Laguerre polynomial normalized so that $L_i(0)=1$ [5, p. 652].

§ 8. Formal Characterization of All Solutions of Equation (7.1)

1. Our aim is to characterize the most general solution of (7.1) satisfying certain boundary conditions. In the case of the translation semi-group the appropriate boundary condition involved all functions in Γ obeying the restriction: "$\lim_{x\to\infty} f(x)$ exists". (Henceforth, without specification to the contrary, any statement as to the existence of a limit will be recognized only when the limit value is finite.)

In the case of the semi-group (7.2) we shall determine those solutions f in Γ, which have the property that

$$(8.1)\quad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

exists.

The study of the radial function solutions of (7.7), that is the characterization of all solutions satisfying (7.1) when A is given by (7.8), may be accomplished if we restrict ourselves to those solutions which fulfill the boundary condition

$$(8.2)\quad \text{"}\lim_{r\to\infty}\frac{p}{r^p}\int_0^r f(x)\,x^{p-1}\,dx \quad \text{exists"}.$$

With regard to the semi-group of example (c) we shall see that the associated boundary condition states the existence of the limit of the sequence $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} f_j$.

2. The method of analysis for the determination of solutions of (7.1) consists in converting the problem to the case of the translation semi-group [i.e., Equation (1.1)] whose complete solution has been revealed in our previous discussions (Section 2—5).

We proceed as follows. Consider any solution of (7.1) with f in Γ and form

$$w(t, x) = (T_t f)(x), \quad t > 0, \quad x \in I. \tag{8.3}$$

Applying the transformation T_s to both sides in (7.1) and using the operator identity $T_s A = \frac{dT_s}{ds}$ [4, p. 308] formally, we obtain, employing the semi-group character of T_t, that

$$\left[\prod_{k=1}^{n} (D_s + \lambda_k)\right] w(s, x) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \int_0^\infty w(s+t, x)\, dH(t), \quad \left(D_s = \frac{d}{ds}\right). \tag{8.4}$$

This is Equation (1.1) in which $w(s, x)$ is a solution viewed as a function of s for each fixed x in I. Moreover, $w(s, x)$ is continuous and bounded in s by virtue of the corresponding assumptions imposed on the semi-group T_s. In our three illustrations, the truth of (8.4) can be easily ascertained by direct calculation. For example, in the situation of the heat equation the derivation of (8.4) amounts to some simple manipulations of the addition formula satisfied by the Gaussian distribution.

The determination of all solutions of (8.4) was made explicit (Theorem C) provided we are restricted to those solutions for which

$$\lim_{s \to \infty} w(s, x) \quad \text{exists.} \tag{8.5}$$

This suggests what the general boundary condition should be, and how to state precisely the problem we are solving. Specifically, we are seeking to delimit that class of solutions f of (7.1) in Γ which possess the property (8.5). Unfortunately, such a formulation of the boundary condition appears in a non-intrinsic form as it involves implicitly unknown ergodic characteristics of the semi-group T_t. We prefer to express the boundary condition directly in terms of the functions of Γ so that any f in Γ satisfying the boundary condition would automatically verify relation (8.5).

We shall see later in our examples how this can be done. Motivated by the results of these examples, we are able to suggest an abstract formulation of the boundary condition.

3. Let us suppose for the present, continuing to maintain generality, that the solution $f(x)$ in Γ satisfies the condition (8.5) for each x in I. By virtue of Theorem C, we deduce that

$$w(s, x) = \sum_{l=0}^{m} \gamma_l(x)\, e^{-\alpha_l s}; \tag{8.6}$$

here m depends on the comparison of the quantities s_1 and h_1, see Section 2, and the number of positive terms occurring in the sequence λ_k. The α_l are

the solutions of the transcendental equation

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha}{\lambda_k}\right)=\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,dH(t) \tag{8.7}$$

for which $\Re(\alpha_l)>0$, $l=1, 2, \ldots, m$, and $\alpha_0=0$. When multiple roots of (8.7) appear, then the usual conventions are adopted in order to keep the validity of the representation (8.6). (The repeated exponentials are replaced by suitable algebraic powers times exponentials.)

Applying A to both sides of (8.6) and taking account of the operator identity $A\,T_s=\frac{d}{ds}\,T_s$ [recall $T_s f=w(s, x)$], we secure that

$$A\,\gamma_l(x)=-\alpha_l\,\gamma_l(x). \tag{8.8}$$

[Since $w(s, x)$ belongs to the domain of A for each $s\geqq 0$, we infer easily that $\gamma_l(x)$ is likewise in the domain of A for each l.] Allowing s to approach zero, we note that $(T_s f)(x)\to f(x)$ for each x in I. Hence the most general solution of (7.1), with the property (8.5), is of the form

$$f(x)=\sum_{l=0}^{m}\gamma_l(x) \tag{8.9}$$

and $\gamma_l(x)$ are solutions of (8.8) in Γ.

4. We now prove the converse, i.e., that every representation of the form (8.9) provides a solution to (7.1) fulfilling the proper boundary conditions. We must show that each non-trivial $\gamma_l(x)$ in Γ which solves (8.8) for the prescribed α_l is itself a solution of (7.1). Indeed, (8.8) implies, by virtue of the identity $T_s\,A=\frac{d}{ds}\,T_s$, that

$$\frac{d}{ds}\,T_s\gamma_l(x)=-\alpha_l\,T_s\gamma_l(x).$$

This first-order linear differential equation may be integrated and we have

$$T_s\gamma_l(x)=\gamma_l(x)\,e^{-\alpha_l s}. \tag{8.10}$$

Equations (8.7), (8.8), and (8.10) in conjunction show that $\gamma_l(x)$ verify (7.1) and also obey the boundary condition (8.5). We refer to the $\gamma_l(x)$ as the basic solutions.

The form of the general solution of (7.1) for f in Γ satisfying (8.5) is now completely specified by the representation (8.9). In the following section we shall elaborate on the meaning of the boundary condition (8.5) in addition to furnishing analytical expressions for the basic solutions $\gamma_l(x)$ of examples (b) and (c).

5. We close this section with a proposal regarding the nature of the appropriate boundary condition for Equation (7.1) in the case of a general semi-group induced by a recurrent diffusion stochastic process (see [3]). Let us consider a semi-group of transformations T_t defined on the functions of Γ into itself and let $\mu(x)$ designate a stationary measure of the semi-group in the generalized

sense of DERMAN [2] (μ is usually unique apart from a multiplicative constant). It is known that μ is finite on every compact subset of I. It may happen that $\mu(I)=\infty$ and indeed this is so for the most interesting cases.

We construct a one-parameter family of truncated positive measures $\mu_t (t>0,\ \mu_t(I)=1)$ with the property that for each compact subset U of I, $\mu_t(U)$ converges to $\mu(U)$ as $t\to\infty$.

With these preparations we will now formulate the relevant boundary condition (labelled B) in terms of the measures μ_t. Generally, we say that f in Γ obeys the boundary condition B if the sequence $\int_I f(x)\,d\mu_t(x)$ converges to a finite limit as t increases to infinity.

It is interesting to see what the boundary condition B becomes when applied to examples (a)–(c) of Section 7, all of which qualify as semi-groups of diffusion stochastic processes.

In the case of the translation semi-group $((T_t f)(x)=f(x+t)$ and I is the non-negative real line), the stationary measure μ consists of placing unit mass at $+\infty$. Accordingly, μ_t can be defined as the measure which places a single unit mass at the point t $(t>0)$. Clearly, μ_t tends to μ in the sense described above. Moreover, for f in Γ

$$\int_0^\infty f(x)\,d\mu_t(x)=f(t).$$

Hence, the assertion that f satisfies the boundary condition B is equivalent to the existence of a finite limit for $f(t)$ as t increases to infinity, which is exactly the boundary restriction underlying the analysis of Sections 2–5.

The semi-group (7.2) of the one-dimensional heat equation has as its stationary measure the Lebesgue measure of the infinite line. We may take μ_t as the uniform distribution spread on the interval $[-t, t]$. The measures μ_t fulfill the required properties. In this case the interpretation that f verifies the boundary condition B means relation (8.1).

For the radial process of the heat equation in p dimensions the boundary condition takes the form (8.2). Plainly, the stationary measure of this process is $p\,x^{p-1}\,dx$ concentrating on the positive axis.

The stationary measure of the semi-group of example (c) assigns a unit mass at all the non-negative integer points. We define μ_t as the measure which concentrate mass of amount $1/[t+1]$ at the integer points $0\leqq n\leqq[t]$. Consequently, a function $f=(f_i)$ obeys the boundary condition B for this example if and only if

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f_i \quad \text{exists.} \tag{8.11}$$

§ 9. Some Special Semi-Groups

In this section we apply the previous theory to the solution of the differential-integral equation (7.1) associated with the semi-groups of operators described in examples (b) and (c) of Section 7.

1. We concentrate first on the semi-group of the radial process induced by the heat equation in p Euclidean variables $(p\geqq 2)$. Specifically, our task

is to determine the form of the solutions of the equation

$$\left[\prod_{k=1}^{n}(A+\lambda_k)\right] f(r) = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n \int_0^\infty v(t,r)\,dH(t), \qquad r>0, \tag{9.1}$$

where A is the infinitesimal operator (7.8), $v(t,r)=T_t f$ is the solution of $\frac{\partial v}{\partial t}=Av$ under the initial condition $v(0,r)=f(r)$, and f is subject to the boundary conditions: f is bounded, continuous (i.e., f in Γ), and we have (8.2).

The key lemma is as follows.

LEMMA 4. *If f is continuous and bounded, and satisfies* (8.2), *then* $\lim_{t\to\infty}(T_t f)(r)$ *exists for each $r>0$ and coincides with the constant limit* (8.2).

Proof. The semi-group operator $T_t f(r)$ is known to possess the explicit representation

$$(T_t f)(r) = e^{-\frac{r^2}{2t}}\cdot\frac{1}{r^\nu t}\int_0^\infty e^{-\frac{\varrho^2}{2t}} I_\nu\left(\frac{\varrho r}{t}\right)\varrho^{\nu+1} f(\varrho)\,d\varrho, \qquad \nu=\frac{p}{2}-1, \tag{9.2}$$

where $I_\nu(x)$ denotes the Bessel function of order ν with imaginary argument. This expression may be independently deduced from (7.5) with f a radial function by integrating out the angle variables in polar coordinates.

To prove that $(T_t f)(r)$ tends to the limit (8.2) as t increases to infinity, we observe first that the case $f(r)=1$ is trivial since $T_t 1=1$ identically in r and t [4]). Thus we may suppose without loss of generality that the limit in (8.2) is zero (otherwise, we deal with $f-a$ for an appropriate constant a). We have to show that $\lim_{t\to\infty}(T_t f)(r)=0$ for every fixed positive r. In the sequel we set, for the sake of simplicity, $r=1$.

Let $\varepsilon>0$ be given. We first choose $\eta=\eta(\varepsilon)$ so small that

$$\begin{cases} e^{-\frac{\varrho^2}{2t}} I_\nu\left(\frac{\varrho}{t}\right) = [c_\nu + h(\varrho,t)]\left(\frac{\varrho}{t}\right)^\nu, \\ c_\nu = [2^\nu\Gamma(\nu+1)]^{-1}, \quad |h(\varrho,t)|\leqq\varepsilon, \end{cases} \tag{9.3}$$

for all ϱ satisfying $\varrho^2/t\leqq\eta^2$ and $t\geqq 1$. We now split the range of integration in (9.2) into $[0,\eta\sqrt{t}]$ and $[\eta\sqrt{t},\infty]$ so that

$$|(T_t f)(1)| \leqq \frac{1}{t}\left|\int_0^{\eta\sqrt{t}}\cdots\right| + \frac{1}{t}\left|\int_{\eta\sqrt{t}}^\infty\cdots\right| = A_1 + A_2. \tag{9.4}$$

The first term A_1 of (9.4) can be estimated by using (9.3):

$$A_1 \leqq c_\nu\eta^p\frac{1}{(\eta\sqrt{t})^p}\left|\int_0^{\eta\sqrt{t}}\varrho^{p-1} f(\varrho)\,d\varrho\right| + \varepsilon\eta^p M$$

where M is a constant obtained from the uniform bound of f. Consequently,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} A_1 \leqq \varepsilon\eta^p M.$$

[4]) This also follows from a formula of SONINE [7, p. 394 (4)].

To estimate A_2, we introduce $G_\nu(\xi)=\xi^{-\nu}I_\nu(\xi)$,

$$F(\varrho)=\int_0^{\varrho} x^{\rho-1}f(x)\,dx, \qquad \delta(t)=\sup_{\varrho\geq\eta\sqrt{t}}\varrho^{-\rho}|F(\varrho)|$$

and integrate by parts:

$$A_2=\frac{1}{(\sqrt{t})^{\rho}}\left|\int_{\eta\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{\varrho^2}{2t}}G_\nu\left(\frac{\varrho}{t}\right)F'(\varrho)\,d\varrho\right|$$

$$\leqq G_\nu\left(\frac{\eta}{\sqrt{t}}\right)\frac{|F(\eta\sqrt{t})|}{(\sqrt{t})^{\rho}}+\frac{1}{(\sqrt{t})^{\rho}}\int_{\eta\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\frac{\varrho^2}{2t}}\left[\frac{\varrho}{t}\,G_\nu\left(\frac{\varrho}{t}\right)+\frac{1}{t}\,G_\nu'\left(\frac{\varrho}{t}\right)\right]|F(\varrho)|\,d\varrho.$$

The first term tends to zero as $t\to\infty$ by virtue of the hypothesis. The second term is bounded by

$$\frac{\delta(t)}{(\sqrt{t})^{\rho}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{\varrho^2}{2t}}\varrho^{\rho}\left[\frac{\varrho}{t}\,G_\nu\left(\frac{\varrho}{t}\right)+\frac{1}{t}\,G_\nu'\left(\frac{\varrho}{t}\right)\right]d\varrho$$

which by an obvious change of variables reduces to

$$\delta(t)\cdot\int_0^{\infty} e^{-\frac{\varrho^2}{2}}\varrho^{\rho}\left[\varrho\,G_\nu\left(\frac{\varrho}{\sqrt{t}}\right)+\frac{1}{\sqrt{t}}\,G_\nu'\left(\frac{\varrho}{\sqrt{t}}\right)\right]d\varrho.$$

Since $\nu\geqq 0$ and G_ν and G_ν' are strictly increasing functions when their arguments traverse the positive axis (see [7]), we obtain, provided $t\geqq 1$, the bound

$$\delta(t)\cdot\int_0^{\infty} e^{-\frac{\varrho^2}{2}}\varrho^{\rho}\left[\varrho\,G_\nu(\varrho)+G_\nu'(\varrho)\right]d\varrho=\delta(t)\,O(1).$$

This tends to zero as t increases to infinity, again by invoking the hypothesis. The proof of the lemma is hereby complete.

2. There is no difficulty in justifying all the remaining formal operations of the preceding sections.

The only bounded solution of $Ay=-\alpha_l y$ is known (apart from a constant factor) to be $r^{-\frac{\rho}{2}+1}J_{\frac{\rho}{2}-1}\left(\sqrt{2\alpha_l}\,r\right)$ which by direct computation satisfies (8.2).

Hence the general bounded solution of (9.1) satisfying (8.2) has the representation

$$f(r)=a_0+\sum_{l=1}^{m} a_l J_{\frac{\rho}{2}-1}\left(\sqrt{2\alpha_l}\,r\right)r^{-\frac{\rho}{2}+1}$$

where a_l, $l=0, 1, 2, \ldots, m$, are arbitrary constants and α_l are the roots of (8.7) for which $\Re(\alpha_l)>0$.

Similar considerations apply to the study of (7.1) for the case of the one-dimensional heat equation. The arguments are in fact more simple. The final result obtained states that the most general bounded solution f of (7.4),

for which (8.1) is fulfilled, is of the form

$$f(x) = a_0 + \sum_{l=1}^{m} (a_l \cos \sqrt{2\alpha_l}\, x + b_l \sin \sqrt{2\alpha_l}\, x)$$

where α_l, $\Re(\alpha_l) > 0$, satisfy (8.7). Here $\cos \sqrt{2\alpha_l}\, x$ and $\sin \sqrt{2\alpha_l}\, x$ are the basic solutions of $Af = \frac{D^2 f}{2} = -\alpha_l f$.

3. We close with a brief discussion of equation (7.1) for the semi-group of (7.9). A function $f = (f_i)$ satisfies the relevant boundary condition if and only if f_i are uniformly bounded and (8.11) is fulfilled.

We may prove

LEMMA 5. *If $f = (f_i)$ is bounded and satisfies* (8.11), *then*

$$(T_t f)(i) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j}(t)\, f_j$$

tends to a limit as t grows to infinity.

The proof goes parallel to the argument of Lemma 4. The explicit formula for $P_{i,j}(t)$ as displayed in (7.10) is used. The summation involved in $(T_t f)(i)$ is split into two parts, one consisting of the integers between 0 and $[\eta t]$ and the other composed of the remaining range of integers (η is to be chosen sufficiently small). In the first range $P_{i,j}(t)$ is close to $1/\eta t$ and this part converges because of the hypothesis. Summation by parts is applied to the second summand and the result follows. We omit the formal details.

All the other identities concerning T_t are obtained in a straightforward fashion by utilizing the available expression of T_t. The solutions of $A\gamma = -\alpha_l \gamma$ are recognized as the sequence $\gamma_j = L_j(\alpha_l/\lambda)$ where L_j is the jth Laguerre polynomial normalized such that $L_j(0) = 1$; $\lambda > 0$. Hence the most general bounded solution of (7.1) for the semi-group (7.9) satisfying (8.11) is of the form

$$f_j = \sum_{l=1}^{m} a_l L_j\left(\frac{\alpha_l}{\lambda}\right) + a_0$$

where the a_l are arbitrary constants and α_l satisfy (8.7) with $\Re(\alpha_l) > 0$.

Bibliography

[1] ARROW, K. J., S. KARLIN, and H. SCARF: Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Chap. 14. Stanford University Press 1958. — [2] DERMAN, C.: A Solution to a Set of Fundamental Equations in Markov Chains. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 332–334 (1954). — [3] FELLER, W.: Diffusion Processes in One Dimension. Trans. Amer. Math. Soc. **77**, 1–31 (1954). — [4] HILLE, E., and R. S. PHILLIPS: Functional Analysis and Semi-Groups. Amer. Math. Soc. Colloquium Publications **36** (1957). — [5] KARLIN, S., and J. MCGREGOR: Linear Growth, Birth and Death Processes. J. Math. and Mech. **7**, 643–662 (1958). — [6] SMITH, W. L.: On the Distribution of Queueing Times. Proc. Cambridge Phil. Soc. **49**, 449–461 (1953). — [7] WATSON, G. N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, second edition. Cambridge and New York 1944.

Dept. of Math., Stanford University, Stanford, Cal. (U.S.A.)

(Eingegangen am 23. März 1959)

GEIRINGER, H.
Math. Zeitschr. 72, 229–234 (1960)

On a limit theorem leading to a compound Poisson distribution

To the memory of LEON LICHTENSTEIN

By
HILDA GEIRINGER

1. One of the best known (and most easily proved) limit theorems of probability theory is the statement that the binomial distribution

$$q_n(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

(i.e. the probability of obtaining x successes in n independent trials with constant success probability p) converges towards the Poisson distribution

$$(1) \qquad q(x) \equiv \lim_{n\to\infty} q_n(x) = \psi(x,a) \equiv \frac{a^x\, e^{-a}}{x!}, \qquad a>0, \qquad x=0,1,2,\ldots.$$

Hereby, as $n\to\infty$, x remains fixed and p decreases in such a way that $np=a$ retains a finite value; thus $p=\frac{a}{n}$, $1-p=1-\frac{a}{n}$. This classical result was generalized by R. v. MISES[1]) who considered, instead of n "Bernoulli trials" with unchanged probabilities, the so-called "Poisson scheme" of n alternatives $p_\nu(1)=p_\nu$, $p_\nu(0)=1-p_\nu$, $\nu=1,2,\ldots,n$ and assumed that as $n\to\infty$,

$$(2) \qquad p_1+p_2+\cdots+p_n=a$$

remains fixed. Then $q_n(x)$, the probability of n successes in n Poisson trials, still converges towards the right side of (1) with the "a" given by (2).

A general situation of rare events is obviously one where each distribution function $P_\nu(x)$ has at $x=0$ a jump of amount $1-\frac{A_\nu}{n}$, which tends to one as $n\to\infty$, $\nu=1,2,\ldots,n$, and is otherwise arbitrary. The author has considered[2]) in 1928 an extension of the Poisson-Mises result which, however, for reasons that will appear in Sec. 4, does not deal with the above case in its generality.

We consider n distributions $p_\nu(x)$, $\nu=1,2,\ldots,n$; $x=0,1,2,\ldots,m$; thus, the generalization consists in assuming more general arithmetical distributions

[1]) Über die Wahrscheinlichkeit seltener Ereignisse. Z. angew. Math. Mech. **1**, 121–124 (1921).

[2]) Über die Poissonsche Verteilung und die Entwicklung willkürlicher Verteilungen. Z. angew. Math. Mech. **8**, 292–309 (1928).

with jumps at $0, 1, 2, \ldots, m$ [3]). In each of these distributions all probabilities except that for $x=0$ are "small". By that we mean the following: if r_ν denotes the probability of a non-zero event at the νth trial,

$$r_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} p_\nu(\mu), \qquad p_\nu(0) = 1 - r_\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

we assume that r_ν is of the order $1/n$; or, more precisely: if R_n is greater than all r_ν, $R_n > r_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, it is assumed that

$$R_n < \frac{C}{n}, \tag{4}$$

where C is a positive constant. We also put

$$\begin{cases} a_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu(\mu), \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu = a. \end{cases} \tag{5}$$

We consider $q_n(x)$, the probability of obtaining a sum x in n such trials, and we wish, in particular, to determine the limit of $q_n(x)$ as $n \to \infty$ in the way just explained, where (4) holds and the a_μ remain finite.

The problem is solved very easily [see l. cit. [2])] if the $p_\nu(x)$ are identical: $p_\nu(x) = p(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$. In the general case of varying $p_\nu(x)$, a not-too-simple investigation leads to the following result:

The limit of the probability $q_n(x)$ of obtaining x as the sum of the results of n trials, tends, as $n \to \infty$ under the above conditions, to

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x) = \sum \psi(n_1, a_1)\, \psi(n_2, a_2) \ldots \psi(n_m, a_m), \tag{6}$$

where the sum is over all combinations of the integers $(\geqq 0)$ $n_1, n_2, \ldots, n_m$ *for which* $\sum_{\mu=1}^{m} \mu n_\mu = x$, *and the* a_μ *are defined by* (5).

Note that the expected value of x in (6) is small or moderate (since all chances for non-zero results tend to zero), and that all n_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, m$, are $\leqq x$ since $\sum_{1}^{m} \mu n_\mu = x$. The main result expressed in (6) is that we have *proved* (not assumed, as often done) that, under quite general conditions, *rare events are mutually independent* (cf. p. 233). We do not enter into a discussion of the various applications of the theorem (6).

2. The result (6), although giving the answer to a natural and not unimportant question, seemed, at that time, rather disappointing to the author on account of the form of the right side of (6), compared to the case of n alternatives where the result for rare events is very concise, and to the "normal" case

[3]) The case where the positive abscissas of the jumps are not equally but rationally spaced can be reduced to the present one by a change of unit.

(all probabilities of the same order of magnitude) which leads under very general conditions to the simple and general Gaussian law. In the present little note we shall show that *the distribution to the right in* (6) *is a compound Poisson distribution*, a well-known distribution with remarkable properties and applications. We shall finally comment briefly on the more general problem of rare events mentioned previously.

3. The structure of the distribution on the right side of (6) becomes clearer if we investigate its generating function. With the a_μ and a of (5) we introduce

$$\alpha_\mu = \frac{a_\mu}{a}, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m, \qquad \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu = 1. \tag{7}$$

If the n original distributions $p_\nu(\mu)$ are identical and equal to $p(\mu), \mu = 1, 2, \ldots, m$ then $\alpha_\mu = p(\mu)/[p(1) + \cdots + p(m)]$ is *the conditional probability of the "rare" result* μ *if we already know that some rare result has arisen.* In the general case, $p(\mu) = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu(\mu)$ is an average probability of the result μ and α_μ has a meaning similar to that above. Consider the functions

$$g(t) = \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu t^\mu \tag{8}$$

and

$$h(t) = e^{-a[1-g(t)]}. \tag{9}$$

We wish to show that $h(t)$ is the generating function of $q(x)$. In fact, expanding the right side of (9) we obtain,

$$\begin{cases} h(t) = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} [g(t)]^k \\ \qquad = e^{-a} \left[1 + a(\alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m) + \frac{a^2}{2!} (\alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m)^2 + \cdots \right], \end{cases} \tag{10}$$

and rearranging

$$\begin{cases} h(t) = e^{-a} \left\{ 1 + a\alpha_1 t + \left[a\alpha_2 + \frac{a^2}{2!} \alpha_1^2 \right] t^2 + \left[a\alpha_3 + \frac{a^2}{2!} \cdot 2\alpha_1\alpha_2 + \frac{a^3}{3!} \alpha_1^3 \right] t^3 + \right. \\ \qquad \left. + \left[a\alpha_4 + \frac{a^2}{2!} (2\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2) + \frac{a^3}{3!} \cdot 3\alpha_1^2\alpha_2 + \frac{a^4}{4!} \alpha_1^4 \right] t^4 + \cdots \right\}. \end{cases} \tag{10'}$$

Here, in finding the coefficient of t^x, $x = 0, 1, 2, \ldots$ from (10), we proceed as follows: from the expansion of $a^k \cdot (\alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m)^k$ we pick those terms which are multiplied by t^x; each such term consists of exactly k factors[4]) (some of these terms may be zero, as, for example $\alpha_x = 0$ if $m < x$). The sum

[4]) The coefficient of t^x in the expansion of $(\alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m)^k$, where α_i is the probability of the result "i" and $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, is the probability of obtaining the sum x in k trials with probabilities $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

of all these terms for $k=1, 2, \ldots, x$ gives the coefficient of t^x in (10'). If in such a product of k factors a factor α_μ appears n_μ times, then, necessarily

$$(11) \qquad n_1 + n_2 + \cdots + n_m = k, \quad \text{and} \quad 1\,n_1 + 2n_2 + \cdots + m\,n_m = x,$$

where $k=1, 2, \ldots, x$. It is thus seen that the law of formation of the coefficient of t^x from (10) is exactly the same as the summation rule given for the right side of (6) which stated that in (6) the sum was to be taken over those combinations of $n_1, n_2, \ldots, n_m$ for which $\sum_{\mu=1}^{m} \mu n_\mu = x$. Thus

$$(12) \qquad h(t) = \sum_{x=0}^{\infty} q(x)\, t^x.$$

We may now write $q(x)$, the limit probability of the sum x, given in (6), in the following way. We denote by $\{\alpha\}_x^{(k)}$ the coefficient of t^x in $(\alpha_1 t + \cdots + \alpha_m t^m)^k$, i.e., the convolution (Faltung) of the m constants $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ to the order k with sum of the subscripts equal to x. Then

$$(13) \qquad q(x) = e^{-a} \sum_{k=1}^{x} \frac{a^k}{k!} \cdot \{\alpha\}_x^{(k)}.$$

Of course, any $q_n(x)$ (probability of a sum x in n trials) is, per definition, a convolution, but a convolution of order n, where n may tend towards infinity. In Eq. (13), however, for $q(x) = \lim_{n\to\infty} q_n(x)$, k goes from 1 to x and x is finite, actually rather small in a problem of rare events. In the case of n identical distributions the interpretation of (13) is immediate. Let $1 - \frac{a}{n}$ and $\frac{a}{n}$ be the probabilities of "zero" and "non-zero" (i.e. $1, 2, \ldots, m$) respectively, where "non-zero" corresponds to the rare events. Then $\left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k}$ is the probability that a certain group of k results (for example the first, second and k^{th}-one) are different from zero, while $(n-k)$ results are zero; and $\{\alpha\}_x^{(k)}$ is the probability that the sum of these k results, which we know to be different from zero, equals x. Now all groups of k variables out of n have the same $\left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k}$ and the same $\{\alpha\}_x^{(k)}$; hence, in order to take care of all possible groups of k variables out of n we have only to multiply by $\binom{n}{k}$. Finally, by the addition rule, the sum over k is to be taken so that

$$q_n(x) = \sum_{k=1}^{x} \left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k} \{\alpha\}_x^{(k)}.$$

Then in the limit $n \to \infty$ we obtain (13)[5]). If the n distributions $p_\nu(x)$ are not equal these simple considerations do not hold; the proof of (13) is then equivalent to that of the theorem of Sect. 1. The formulas (12) and (13) complete the result (6).

[5]) This proof differs from the one given in the paper, cit. [2]) for the case of identical distributions.

We give an alternative proof of (12). Write $h(t)$, given by (9) in the form

$$h(t) = e^{-a_1(1-t)} \cdot e^{-a_2(1-t^2)} \cdots \cdot e^{-a_m(1-t^m)} = h_1(t)\, h_2(t) \ldots h_m(t). \tag{9'}$$

Here

$$h_\mu(t) = e^{-a_\mu} \cdot e^{a_\mu t^\mu} = e^{-a_\mu}\left[1 + a_\mu t^\mu + \frac{a_\mu^2}{2!} t^{2\mu} + \cdots\right].$$

Thus, the probability $\varphi(z)$, $z = 0, \mu, 2\mu, \ldots$ whose generating function is $h_\mu(t)$ is given by

$$\varphi(\mu n_\mu) = \frac{a_\mu^{n_\mu}}{n_\mu!} e^{-a_\mu}, \qquad n_\mu = 0, 1, 2, \ldots; \tag{14}$$

it is the limit probability of obtaining n_μ times the result μ, or, of obtaining $z = \mu n_\mu$, in drawings from urns which contain only lots designated by either "0" or "μ", the latter being the rare event. On account of the theorem of the multiplication of generating functions it follows that $h(t) = h_1(t)\, h_2(t) \ldots h_m(t)$ is the generating function of the limit probability of the sum x obtained in $n \cdot m$ successive drawings from m groups of urns, where the first group contains only "zeros" and "ones", the next one only "zeros" and "twos", etc. That this probability *is* equal to the $q(x) = \lim_{n \to \infty} q_n(x)$ of (6) (i.e. that the problem of Sect. 2. is such as if there were m groups of n independent alternatives) is the content of our theorem (6).

A probability distribution whose generating function is a function $h(t)$, as in (9), *is a compound Poisson distribution*. We review:

The probability $q_n(x)$ of obtaining the sum x in the general situation of rare events, described in Eqs. (3), (4), (5), *converges as $n \to \infty$ towards a compound Poisson distribution $q(x)$ whose generating function $h(t)$ is given by Eqs.* (8), (9) *with the α_μ defined by* (7). The distribution $q(x)$ is explicitly given by (6) and (13). Only for $m = 1$ this compound Poisson distribution reduces to the right side of (1).

By means of (12) we find easily mean value $\bar{x}$ and variance s^2 of $q(x)$. In the usual way we compute $h'(1)$ and $h''(1)$ from (9), and find

$$\bar{x} = h'(1) = a\, g'(1), \qquad s^2 = h''(1) + h'(1) - [h'(1)]^2 = a\,[g''(1) + g'(1)];$$

thus, with $g(t)$ given by (8),

$$\bar{x} = a \sum_{\mu=1}^{m} \mu\, \alpha_\mu = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu, \qquad s^2 = a \sum_{1}^{m} \mu^2\, \alpha_\mu = \sum_{1}^{m} \mu^2\, a_\mu. \tag{15}$$

Hence for $m > 1$, the variance of $q(x)$ is always greater than the mean value, in contrast to the simple Poisson distribution where both are equal. Thus, if in a statistics which suggests a sum of rare events the observed variance is found to be appreciably greater than the mean one may try the hypothesis that the basic component distributions are not alternatives but $(m+1)$-valued distributions, $m > 1$.

4. In this paper the n distributions introduced in Sect. 2 were arithmetical distributions with a finite number of non-negative labels $0, 1, 2, \ldots, m$. If, even in the case of arithmetical distributions $P_\nu(x)$, negative labels are admitted, the situation changes considerably: take, for example, equal distributions $P_\nu(x)=P(x)$ with jumps only at the three points $-1, 0, 1$, $(p(0)$ the "large" probability). We denote by $q_n(n_1, n_2)$ the probability of obtaining in n trials n_1-times "1", n_2-times "-1", $n_0=(n-n_1-n_2)$-times "0". It is easily seen that with $a_1=np(1)$, $a_2=np(-1)$, $a=a_1+a_2$ we obtain as before,

$$\lim_{n\to\infty} q_n(n_1, n_2) = \psi(n_1, a_1)\,\psi(n_2, a_2).$$

But the summation, by means of which in (6) the $q(x)$ is derived from the product of the ψ's, is now unsatisfactory since $q(x)$ is a sum of the infinitely many products for which $n_1-n_2=x$. Likewise, in a formula corresponding to (13) the summation will go in the general case from $k=1$ to ∞ so that convolutions of any order occur. The generating function is still a compound Poisson distribution.

Division of Engineering and Applied Physics,
Harvard University, Cambridge 38, Mass. (U.S.A.)

(Eingegangen am 20. April 1959)

HÖLDER, E.
Math. Zeitschr. 72, 235—258 (1960)

Extremale geschlossene Differentialformen

Unterschallströmungen im Großen

LEON LICHTENSTEIN zum Gedächtnis

Von

ERNST HÖLDER

Die Methode der schrittweisen Fortsetzung nach einem Parameter liefert bei der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung eines regulären Variationsproblems unter Umständen, nämlich beim Vorhandensein von apriori-Schranken, einen Existenzsatz im Großen, gestattet also etwa in einem mehrfach zusammenhängenden ebenen Bereich eine Gasströmung bei Vergrößerung der Durchflüsse mathematisch solange zu verfolgen, bis die Geschwindigkeit w an einer Stelle die örtliche Schallgeschwindigkeit c bis auf ein festes $\varepsilon > 0$ erreicht: $w > c - \varepsilon$.

Die Methode stammt von S. BERNSTEIN [5], SCHAUDER und LERAY [7]; die Anwendung auf die Gasdynamik, die auf Sätzen der Potentialtheorie und der partiellen elliptischen Differentialgleichungen von LICHTENSTEIN [4] beruhen, habe ich im Jahre 1943 im III. Teil einer nicht veröffentlichten Lilienthal-Preisarbeit gemacht. Diesen reproduziere ich im II. Abschnitt der vorliegenden Abhandlung. Das sachliche Resultat, die Gewinnung von Unterschallströmungen im Großen, ist nach dem Kriege von SHIFFMAN [13] unmittelbar aus dem Variationsprinzip, das zu einem überall positiv regulären abgeändert wird, erbracht worden. Ich glaube, heute führte auch die Methode von BECKERT [22] zum Ziel, bei der sich die harmonische Differentialform der inkompressiblen Strömung als Ausgangslösung darbietet; sie gehört zu einem abgeänderten Variationsproblem mit Zusatzfunktion, diese versieht man mit einem Parameter λ, den man von $\lambda = 1$ zu $\lambda = 0$ abnehmen läßt.

Wenn ich den damals von mir behandelten Fall noch vorlege, so ist selbstverständlich, daß ich die Priorität SHIFFMANS anerkenne, der ja auch weitergeht betr. eines ins Unendliche sich erstreckenden Strömungsgebiets um eine Kontur mit Ecke. Dasselbe gilt bezüglich der Untersuchungen von BERS [25]; auf NIRENBERGS [14] neuartige Wendung bei der apriori-Abschätzung komme ich noch zurück.

Als neuen Beitrag bringt der I. Abschnitt der vorliegenden Arbeit die Anwendung der Fortsetzungsmethode auf „Strömungsfelder" auf einer geschlossenen Fläche endlichen Geschlechts, also Bildungen, die man „quasianalytische" Differentiale 1. Gattung nennen mag. Diese und die damit zusammenhängenden fastkonformen Abbildungen wurden in letzter Zeit mehrfach studiert, außer von BERS [21], S. BERGMANN [20] und

AHLFORS [30] von R. NEVANLINNA, LAVRENTIEFF, DANYLUK, SCHABAT, VEKUA u. a. in den Vorträgen auf dem Internationalen Colloquium über Funktionentheorie, Helsinki 1957 [26]. Dort habe ich [19] den Aufbau dieser Differentiale aus den klassischen Abelschen Differentialen 1. und 3. Gattung auf der zu einer Riemannschen Fläche R gemachten geschlossenen Fläche angegeben; die Herleitung dieser Darstellungsformel, unten (2.17), für geschlossene Differentiale, die auf R überall regulär sind, soll hier gebracht werden. Sie beruht auf einer Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel, (1.22), für analytische Funktionen, wie sie ähnlich auch bei HERGLOTZ [27], BOCHNER [17], CARLEMAN [23], NEVANLINNA [18] vorkommt. Hierein werden die Abelschen Integrale eingesezt in der Normierung, die WEYL [15] in der als abschließend zu betrachtenden Darstellung der 3. Auflage seiner „Idee der Riemannschen Fläche" gibt.

Für etwaige Verallgemeinerungen auf Flächen mit Rändern käme in Betracht die mit der Weylschen Methode der orthogonalen Projektion im Raume der Differentialformen arbeitende Darstellung von SCHIFFER-SPENCER, Functionals of finite Riemann Surfaces [16].

Bezüglich der Gewinnung von apriori-Abschätzungen, welche die Fortsetzungsmethode erfordert, sei noch auf die neue Behandlungsart nach MORREY [12] und NIRENBERG [14] hingewiesen, die sich vielleicht sogar auf höhere Dimensionen ausdehnen läßt. Diese benutzt 1. die quasikonforme Abbildung der x, y-Ebene in die P, Q-Hodographenebene, 2. eine daraus folgende Abschätzung für ein modifiziertes Dirichletintegral und 3. die daraus folgende H-Bedingung für die Geschwindigkeit. Die Einzelausführung verliefe wie im II. Abschnitt, wo mit den älteren Abschätzungen von S. BERNSTEIN in einem mehrfach zusammenhängenden berandeten schlichten Strömungsbereich der Existenzbeweis der Strömungen im Großen dargestellt wird.

I. Extremale geschlossene Differentiale

1. Es sei R eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $p \geqq 1$. Eine invariante reelle Differentialform

$$\pi = p\,dx + q\,dy \tag{1.1}$$

auf R heißt geschlossen (oder integrabel), falls π in C' enthalten ist und das äußere Differential

$$d\pi \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) dx\,dy = 0 \tag{1.2}$$

ist. $z = x + iy$ ist dabei lokaler Parameter. Die Tatsache, daß π geschlossen ist, soll symbolisch durch

$$\pi \to 0 \tag{1.3}$$

bezeichnet werden. Sind $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{d}_2$ zwei homologe eindimensionale Zyklen der Riemannschen Fläche R, so gilt für jede beliebige geschlossene Differentialform π auf R die Beziehung

$$\int_{\mathfrak{d}_1} \pi = \int_{\mathfrak{d}_2} \pi, \tag{1.4}$$

weil es einen Bereich V gibt, dessen Rand ∂V gleich $\delta_1 - \delta_2$ ist, und nach STOKES das Integral

$$\int_{\partial V} \pi = \int_V d\pi, \tag{1.5}$$

also wegen (1.3) Null ist.

π heißt exakt (oder total), falls $\pi \to 0$ und auf R eine in C'' enthaltene Funktion ψ existiert, so daß

$$\pi = d\psi \tag{1.6}$$

ist. $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^p, \Gamma'^1, \ldots, \Gamma'^p$ sei eine kanonische Homologiebasis der Riemannschen Fläche R, und zwar überkreuze Γ'^ν die Kurve Γ^ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ von rechts nach links. $\Gamma^1 + \Gamma'^1, \ldots, \Gamma^p + \Gamma'^p$ liefert eine kanonische Zerschneidung von R in ein einfach zusammenhängendes Polygon R'.

$$\int_{\Gamma^\nu} \pi = \gamma_\nu \quad \text{und} \quad \int_{\Gamma'^\nu} \pi = \gamma'_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, p) \tag{1.7}$$

sind die Perioden von π. Für eine geschlossene Differentialform π, deren sämtliche Perioden verschwinden, ergibt sich

$$\int_{P_0}^{P} \pi = \varphi(P) \tag{1.8}$$

als eine auf R eindeutige Funktion. In diesem Falle ist π exakt.

Eine invariante Differentialform π aus C' heißt harmonisch, falls

$$d\pi = 0 \quad \text{und} \quad d^*\pi = 0 \tag{1.9}$$

ist. Mit $^*\pi$ wird dabei die zu π duale Form bezeichnet, d. h. es gilt in den auf der Riemannschen Fläche R konform-zulässigen Parametern

$$^*\pi = -q\,dx + p\,dy. \tag{1.10}$$

Allgemeiner ist in beliebigen Koordinaten (t^1, t^2) und bei einer Metrik

$$ds^2 = g_{ij}\,dt^i\,dt^j \tag{1.11}$$

mit

$$g = \det(g_{ij}), \qquad (\varepsilon_{i\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (p_k) = (p, q)$$

zu $\pi = p_k\,dt^k$ dual

$$^*\pi = \sqrt{g}\, g^{ik} p_k \varepsilon_{i\alpha}\, dt^\alpha. \tag{1.12}$$

Man erhält

$$^{**}\pi = -\pi. \tag{1.13}$$

Ist π harmonisch, so ergeben sich die Gleichungen

$$\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0. \tag{1.14}$$

und es existiert eine im Kleinen eindeutige analytische Funktion $f(z)$, so daß

$$(1.15)\qquad \begin{cases} \varpi = \pi + i\,{}^*\pi = p\,dx + q\,dy + i\,(-q\,dx + p\,dy) \\ \quad = (p - i\,q)\,(dx + i\,dy) = f'(z)\,dz = df \end{cases}$$

ist. Es gilt dann und nur dann

$$(1.16)\qquad \pi = \Re\, df = d\psi;$$

ψ ist eine harmonische Funktion.

Es sei nun

$$(1.17)\qquad g = \psi - i\,\varphi$$

eine analytische Funktion auf R und

$$(1.18)\qquad dg = \eta + i\,{}^*\eta, \qquad \eta,\ {}^*\eta \text{ reell},$$

ihr Differential. ${}^*\eta$ ist dann die zu η duale Differentialform, und umgekehrt, wenn dies bei (1.18) gilt, ist wegen $ddg = 0$ die Form η harmonisch und die Funktion g gemäß (1.15) analytisch. B sei ein Gebiet der Riemannschen Fläche R und ∂B dessen Rand. Es gilt mit beliebigem π die Stokessche Integralumwandlungsformel

$$(1.19)\qquad \int_{\partial B} g\,\varpi = \int_B g\,d\varpi + dg \wedge \varpi.$$

Da

$$(1.20)\qquad \eta \wedge \pi = {}^*\eta \wedge {}^*\pi \quad \text{und} \quad \eta \wedge {}^*\pi = \pi \wedge {}^*\eta$$

ist, folgt

$$(1.21)\qquad dg \wedge \varpi = \eta \wedge \pi - {}^*\eta \wedge {}^*\pi + i\,({}^*\eta \wedge \pi + \eta \wedge {}^*\pi) = 0,$$

und man erhält [24] daher als Verallgemeinerung des Cauchyschen Integralsatzes

$$(1.22)\qquad \int_{\partial B} g\,\varpi = \int_B g\,d\varpi.$$

2. Diese Gleichung verwenden wir zur Ableitung einer von uns benötigten Darstellungsformel für eine *geschlossene* Differentialform π. Wir benutzen dabei die längs Γ^ν, Γ'^ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ aufgeschnittene Fläche R, d. h. das Polygon R', aus dem wir außerdem noch eine kleine Kreisscheibe k mit (positiv durchlaufenen) Peripherie c und dem Radius ϱ um einen Pol P_0 von g herausschneiden. Es ergibt sich

$$(2.1)\qquad \int_c g\,\varpi = \int_{\partial R'} g\,\varpi - \int_{R'-k} g\,d\varpi.$$

Für g verwenden wir das Abelsche Integral 2. Gattung

$$(2.2)\qquad \tau_{P_0}(z) = \int_{P_1}^{P} d\tau_{P_0} = \psi_{P_0}(z) - i\,\varphi_{P_0}(z)$$

bzw.

$$(2.2)'\qquad \tau'_{P_0}(z) = \int_{P_1}^{P} d\tau'_{P_0} = \psi'_{P_0}(z) - i\,\varphi'_{P_0}(z)$$

mit dem Argument z und dem Pol P_0 in der Bezeichnung und Normierung von WEYL [15], S. 104; allerdings ist $\tau'_{P_0}(z)$ mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen, wie es in der 1. Auflage S. 108 richtig stand. Dabei sei P_1 ein beliebiger von P_0 verschiedener Punkt von R. $\tau_{P_0}(z)$ bzw. $\tau'_{P_0}(z)$ hat in P_0 einen Pol 1. Ordnung; sie verhalten sich wie $\frac{1}{z}$ bzw. $\frac{1}{iz}$. Die Differentiale

$$d\tau_{P_0} = d\psi_{P_0} - i\,d\varphi_{P_0} \quad \text{und} \quad d\tau'_{P_0} = d\psi'_{P_0} - i\,d\varphi'_{P_0} \tag{2.3}$$

sind Abelsche Elementardifferentiale 2. Gattung. Für jede geschlossene Kurve Γ gilt

$$\Re \int_\Gamma d\tau_{P_0} = 0 \quad \text{sowie} \quad \Re \int_\Gamma d\tau'_{P_0} = 0, \tag{2.4}$$

die Perioden von $d\tau_{P_0}$ und $d\tau'_{P_0}$ sind also rein imaginär. Indem man zuerst

$$g = \tau_{P_0}(z) \tag{2.5}$$

setzt und berücksichtigt, daß π geschlossen sein soll, daß also

$$d\varpi = i\,d^*\pi \tag{2.6}$$

ist, erhält man die Gleichung

$$\int_c \tau_{P_0}(p - iq)\,dz = \int_{\partial K'} \tau_{P_0}\varpi - i \int_{K'-k} (\psi_{P_0} - i\varphi_{P_0})\,d^*\pi. \tag{2.7}$$

Wegen $p - iq = p_0 - iq_0 + \delta$, $\delta \to 0$ mit $\varrho \to 0$, ist

$$\int_c \tau_{P_0}(p - iq)\,dz = (p_0 - iq_0) \int_c \left(\frac{1}{z - z_0} + \mathfrak{P}(z)\right) dz + J \to 2\pi i\,(p_0 - iq_0), \tag{2.8}$$

da

$$J = \int_c \delta \cdot \tau_{P_0} dz \to 0 \quad \text{mit} \quad \varrho \to 0$$

geht. Da außerdem

$$\left\{\begin{aligned} \int_{\partial K'} \left(\int_{P_1}^{P} d\tau_{P_0}\right)\varpi &= \sum_\nu \int_{-\Gamma_\nu} \left(\int_{\Gamma'_\nu} d\tau_{P_0}\right)\varpi - \sum_\nu \int_{-\Gamma'_\nu} \left(\int_{\Gamma_\nu} d\tau_{P_0}\right)\varpi \\ &= i \sum_\nu \left(\Im \int_{\Gamma_\nu} d\tau_{P_0}\right) \int_{\Gamma'_\nu} \varpi - i \sum_\nu \left(\Im \int_{\Gamma'_\nu} d\tau_{P_0}\right) \int_{\Gamma_\nu} \varpi \end{aligned}\right. \tag{2.9}$$

ist, folgt

$$\left\{\begin{aligned} 2\pi i\,(p_0 - iq_0) &= i \sum_\nu \left(\Im \int_{\Gamma_\nu} d\tau_{P_0}\right) \int_{\Gamma'_\nu} \varpi - i \sum_\nu \left(\Im \int_{\Gamma'_\nu} d\tau_{P_0}\right) \int_{\Gamma_\nu} \varpi - \\ &\quad - i \int_{K'-k} (\psi_{P_0} - i\varphi_{P_0})\,d^*\pi. \end{aligned}\right. \tag{2.10}$$

Aus dieser Relation ergibt sich die Gleichung mit (1.7)

$$2\pi p_0 = 2\pi p(P_0) = \sum_\nu \left[\gamma'_\nu \Im \int_{\Gamma_\nu} d\tau_{P_0} - \gamma_\nu \Im \int_{\Gamma'_\nu} d\tau_{P_0}\right] - \int_{K'} \psi_{P_0}\,d^*\pi. \tag{2.11}$$

Wenn man

$$g = \tau'_{P_0} \tag{2.5'}$$

setzt, erhält man auf analoge Weise die Beziehung

$$-2\pi q_0 = \sum_\nu \left[\gamma'_\nu \Im \int_{\Gamma_\nu} d\tau'_{P_0} - \gamma_\nu \Im \int_{\Gamma'_\nu} d\tau'_{P_0}\right] - \int_{K'} \psi'_{P_0}\,d^*\pi. \tag{2.12}$$

(2.11) und (2.12) führen zu

$$(2.13)\quad \begin{cases} 2\pi(p_0 - i q_0) = \sum_\nu \left[\gamma'_\nu \left(\Im \int_{\Gamma_\nu} d\tau_{P_0} + i\,\Im \int_{\Gamma_\nu} d\tau'_{P_0}\right) - \right. \\ \qquad \left. - \gamma_\nu \left(\Im \int_{\Gamma'_\nu} d\tau_{P_0} + i\,\Im \int_{\Gamma'_\nu} d\tau'_{P_0}\right)\right] - \int_R (\psi_{P_0} + i\,\psi'_{P_0})\, d^*\pi. \end{cases}$$

Nach WEYL [15], S. 113 gilt

$$(2.14)\quad \Re \int_{P_1}^{P} d\tau_{P_0}(z) + i\,\Re \int_{P_1}^{P} d\tau'_{P_0}(z) = \psi_{P_0} + i\,\psi'_{P_0} = -2\pi \frac{d\omega_{P_1 P}(z_0)}{dz_0}$$

und für jeden geschlossenen Weg α

$$(2.15)\quad \Im \int_\alpha d\tau_{P_0} + i\,\Im \int_\alpha d\tau'_{P_0} = -2\pi \frac{dw_\alpha(z_0)}{dz_0}$$

Dabei ist $d\omega_{P_1 P}$ das Elementardifferential 3. Gattung, das nur in P_1 und P Pole 1. Ordnung mit den Residuen $-i$ bzw. i besitzt, außerdem rein imaginäre Perioden hat, und dw_α das nach WEYL [15], S. 107 dem Weg α zugeordnete Abelsche Differential 1. Gattung. $d\omega_{P_1 P}$ ist gleich Null, wenn $P_1 = P$ ist. Unter Verwendung der Bezeichnungen

$$(2.16)\quad dw'_\nu = dw_{\Gamma'_\nu} \quad \text{und} \quad dw_\nu = dw_{\Gamma_\nu}$$

folgt aus (2.13) wegen (1.15) die Gleichung

$$(2.17)\quad \pi_0 + i^*\pi_0 = \sum_\nu \left[\gamma_\nu\, dw'_\nu(z_0) - \gamma'_\nu\, dw_\nu(z_0)\right] + \int_R d\omega_{P_1 P}(z_0)\, d^*\pi,$$

d bezieht sich hier auf das Argument z_0, Integrationsgebiet ist wieder R, und aus dieser

$$(2.18)\quad \pi_0 = \sum_\nu \left[\gamma_\nu\, \Re\, dw'_\nu(z_0) - \gamma'_\nu\, \Re\, dw_\nu(z_0)\right] + \Re \int_R d\omega_{P_1 P}(z_0)\, d^*\pi.$$

Durch analoge Betrachtungen ergibt sich, daß (2.18) auch dann gilt, wenn P_0 ein Randpunkt von R' ist.

Aus (2.18) erhält man durch Integration längs Γ^μ die Beziehung

$$(2.19)\quad \int_{\Gamma^\mu} \pi = \sum_\nu \left[\gamma_\nu\, \Re \int_{\Gamma^\mu} dw'_\nu - \gamma'_\nu\, \Re \int_{\Gamma^\mu} dw_\nu\right] + \int_R \left(\Re \int_{\Gamma^\mu} d\omega_{P_1 \underline{P}}\right) \underline{d}^*\underline{\pi}.$$

Da Γ^μ geschlossen ist, folgt nach WEYL [15], S. 105

$$(2.20)\quad \Re \int_{\Gamma^\mu} d\omega_{P_1 \underline{P}}(z) = 0.$$

Der Realteil des Integrales $\int_\beta dw_\alpha$ für zwei geschlossene Wege α und β ergibt nach WEYL, S. 107, die Schnittzahl $ch(\beta, \alpha)$ dieser Wege:

$$(2.21)\quad \Re \int_\beta dw_\alpha = ch(\beta, \alpha).$$

Die Schnittzahl $ch(\beta, \alpha)$ ist die algebraische Summe der Überkreuzungen von β und α, wobei im Falle, daß β die Kurve α von links nach rechts überkreuzt,

diese Überkreuzung mit $+1$ und im entgegengesetzten Fall mit -1 in Anschlag zu bringen ist. Es ist

$$\Re \int_{\Gamma'_\nu} dw_\nu = -1 \quad \text{und} \quad \Re \int_{\Gamma'_\nu} dw'_\nu = +1 \qquad (\nu = 1, \ldots, p) \tag{2.22}$$

und in allen anderen Fällen bei der Integration längs Γ^μ oder Γ'^μ

$$\Re \int dw_\nu = 0 \quad \text{und} \quad \Re \int dw'_\nu = 0 \tag{2.23}$$

Also hat eine Lösung π von (2.17) als Perioden gerade die Parameter γ_ν, γ'_ν.

(2.17) ist eine Darstellungsformel für eine geschlossene Differentialform π, vgl. [19] Formel (*), wo aber das Integral das positive Vorzeichen haben muß, da entgegen dem Zitat die 3. Auflage von WEYL [15] benutzt ist. Da nach [15] $d\omega_{P,\underline{P}}(z)$ sich nur in P_1 und $\underline{P}$ singulär wie $-\frac{dz'}{2\pi z'}$ bzw. $\frac{dz}{2\pi z}$ verhält, ist umgekehrt (2.18) ein geschlossenes Differential π, für welches tatsächlich $d^*\pi$ den auf der rechten Seite im Flächenintegral stehenden Wert hat. Man kann daran denken, (2.17) zur Konstruktion eines „extremalen" geschlossenen Differentials π mit den gegebenen Perioden γ_ν, γ'_ν zu verwenden. Die Konstruktion eines solchen geschlossenen Differentials mit gegebenen Perioden kann zunächst im Kleinen geschehen.

3. Die duale Differentialform $^*\pi$ soll einer nichtlinearen Differentialgleichung (3.8) genügen; diese entspringe aus einem regulären Extremalintegral

$$\int_B F(x, y, P, Q)\, dx\, dy \to \text{Min}. \tag{3.1}$$

Dies ist allerdings nur lokal, in einem genügend kleinen einfach zusammenhängenden Gebiet B zu stellen, bei vorgegebenen z-Werten auf dem Rand ∂B, um die Differentialgleichung zu bekommen. Global würde die Funktion z, von der in (3.1) nur die Ableitungen $P = \partial z/\partial x$, $Q = \partial z/\partial y$ eingehen, nur als mehrwertige Funktion existieren. Wir betrachten nun dieses „Strömungsfeld" P, Q in einer zweidimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit M ohne Rand und suchen, zunächst beim Problem im Kleinen, in der Nachbarschaft eines gegebenen λ-stetigen Lösungsfeldes P^0, Q^0 ein neues

$$P = P^0 + p, \quad Q = Q^0 + q. \tag{3.2}$$

Geschlossen ist dann außer $\pi = p\,dx + q\,dy$ noch die Differentialform

$$\begin{cases} F_P\, dy - F_Q\, dx = F^0_P\, dy - F^0_Q\, dx + (F^0_{PP}\, p + F^0_{PQ}\, q)\, dy - \\ \qquad\qquad - (F^0_{QP}\, p + F^0_{QQ}\, q)\, dx + \Theta. \end{cases} \tag{3.3}$$

Die Differentialform $\Theta = \Theta_1 dx + \Theta_2 dy$ enthält in ihren Koeffizienten p, q in 2. und höherer Ordnung.

Zur geschlossenen Differentialform

$$\pi = p\, dx + q\, dy$$

gehört

$$^*\pi = \frac{F^0_{PP}\, p + F^0_{PQ}\, q}{\sqrt{\Delta^0}}\, dy - \frac{F^0_{QP}\, p + F^0_{QQ}\, q}{\sqrt{\Delta^0}}\, dx = \sqrt{g}\, g^{ik} p_k\, \varepsilon_{i\alpha}\, dx^\alpha \tag{3.5}$$

als duale im Sinne von HODGE mit dem regulären Maßtensor

$$(3.6)\quad (g^{ik}) = \begin{pmatrix} F^0_{PP} & F^0_{PQ} \\ F^0_{QP} & F^0_{QQ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^0 & b^0 \\ b^0 & c^0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{g} = \det (g^{ik}) = F^0_{PP} F^0_{QQ} - F^0_{PQ} = \Delta^0.$$

Die Metrik geht in die Definition der dualen Differentialform beim Grade $p = 1$ in einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit nur mit ihren *konformen* Eigenschaften ein. Man kann nach LICHTENSTEIN [28] M mit Umgebungen überdecken, die sich [mit der Metrik (3.6) ausgestattet] *konform* auf Parameter-Kreisscheiben abbilden lassen; so wird M zur Riemannschen Fläche R, auf der die Abelschen Differentiale existieren und die Betrachtungen von Nr. 1 und 2 gelten; vgl. auch A. WINTNER [29].

Es ist jetzt

$$(3.7)\quad 0 = d\left(\frac{{}^*\pi}{\sqrt{g}} + \Theta\right) = \frac{d\,{}^*\pi}{\sqrt{g}} + d\,\frac{1}{\sqrt{g}} \wedge {}^*\pi + d\Theta,$$

also

$$(3.8)\quad d\,{}^*\pi = -\frac{1}{1/\sqrt{g}}\, d\,\frac{1}{\sqrt{g}} \wedge {}^*\pi - \sqrt{g}\, d\Theta = d \ln \sqrt{g} \wedge {}^*\pi + d\sqrt{g} \wedge \Theta - d\left(\sqrt{g}\,\Theta\right).$$

Meine Darstellungsformel (2.17) gibt daher mit einer Produktintegration, vgl. auch [19], und der Bezeichnung $\Theta(P_0) = \Theta_1(P_0)\,dx + \Theta_2(P_0)\,dy$

$$(3.9)\quad \begin{cases} \pi_0 + i\,{}^*\pi_0 = \sum \gamma'_\nu d_0 w_\nu\,(P_0) - \gamma_\nu d_0 w'_\nu\,(P_0) + \int\limits_R d_0 \omega_{P_1 P}(P_0)\, d \ln \sqrt{g} \wedge {}^*\pi + \\ \quad + \int\limits_R d\, d_0 \omega_{P_1 P}(P_0) \wedge \left(\sqrt{g}\,\Theta - \sqrt{g_0}\,\Theta(P_0)\right) + \int\limits_R d_0 \omega_{P_1 P}(P_0)\, d\sqrt{g} \wedge \Theta. \end{cases}$$

Wir schreiben jetzt deutlicher d_0 für das Differential bez. P_0. Also kommt die nichtlineare Integralgleichung

$$(3.10)\quad \begin{cases} \pi_0 + i\,{}^*\pi_0 - \int\limits_R d_0 \omega_{P_1 P}(P_0)\, d \ln \sqrt{g} \wedge {}^*\pi = \sum \gamma'_\nu d_0 w_\nu\,(P_0) - \\ \quad - \gamma_\nu d_0 w'_\nu\,(P_0) + \int\limits_R d\, d_0 \omega_{P_1 P}(P_0) \wedge \left(\sqrt{g}\,\Theta\,(P) - \sqrt{g_0}\,\Theta(P_0)\right) + \\ \quad + \int\limits_R d_0 \omega_{P_1 P}(P_0)\, d\sqrt{g} \wedge \Theta. \end{cases}$$

Die linke Seite, gleich Null oder gleich einer gegebenen Funktion gesetzt, ist eine der Fredholmschen Theorie zugängliche lineare Integralgleichung. Ihr Kern ist nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie vollstetig. Die homogene Gleichung

$$(3.11)\quad \pi_0 + i\,{}^*\pi_0 - \int\limits_R d_0 \omega_{P_1 P}(P_0)\, d \ln \sqrt{g} \wedge {}^*\pi = 0$$

hat keine nichttriviale Lösung.

Sonst hätte ja das lineare System

$$(3.12)\quad \left\{ \begin{array}{l} d\pi = 0 \\ d\,{}^*\pi = d \ln \sqrt{g} \wedge {}^*\pi \end{array} \right\}, \text{ d.h. } \begin{cases} \pi \to 0 \\ \dfrac{{}^*\pi}{\sqrt{g}} \to 0 \end{cases}$$

eine Lösung ohne alle Perioden. Es wäre also nach (1.8)

$$\pi = d\zeta \tag{3.13}$$

exakt mit einer auf ganz R eindeutigen Funktion ζ, die der Gleichung

$$d' \frac{d\zeta}{\sqrt{g}} = 0 \quad \text{mit} \quad d' = -{}_*d^* \quad \text{auf} \quad R \tag{3.14}$$

($_*$ unten ist der Übergang von der Differentialform 2. Grades zur dualen 0. Grades) genügt. Integriert, mit $(\zeta, \zeta) = \int_R \zeta \wedge {}^*\zeta$, ${}^*\zeta = \sqrt{g}\,\zeta\, dt^1 dt^2$, $(\pi, \pi) = \int_R \pi \wedge {}^*\pi$,

$$\left(\zeta, d' \frac{d\zeta}{\sqrt{g}}\right) = \left(d\zeta, \frac{d\zeta}{\sqrt{g}}\right) = 0;$$

das hätte aber wegen der Definitheit der im Integranden stehenden quadratischen Form $d\zeta = 0$ zur Folge, also $\pi = 0$.

Es existiert also der lösende Kern $N(P_0, P)$ zu $d_0 \omega_{P_1 P}(P_0)\, d \ln \sqrt{g}$, und wir bekommen für $(\mathfrak{p}_\alpha) = (\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$

$$\mathfrak{p}_\alpha = \sum_{\nu=1}^{\mathfrak{p}} \gamma'_\nu u_\alpha^{(\nu)} - \gamma_\nu u_\alpha'^{(\nu)} + F\{\mathfrak{p}_\beta\} \tag{3.15}$$

mit gewissen aus N und dw_ν, dw'_ν gebildeten Funktionen $u_\alpha^{(\nu)}$, $u_\alpha'^{(\nu)}$, wo $F\{\mathfrak{p}_\beta\}$ ein Funktional von 2. und höherem Grade in $\mathfrak{p}_\beta$ ist.

Für

$$|\gamma_\nu|, |\gamma'_\nu| \leqq \Omega_1 \tag{3.16}$$

und H-Quotienten $1+\lambda$-ter Ordnung

$$|\pi|_{1+\lambda} \leqq \Omega |dz|; \quad |\dot{\pi}|_{1+\lambda} \leqq \Omega |dz|, \quad |\pi - \dot{\pi}|_{1+\lambda} \leqq V |dz| \tag{3.17}$$

gilt die Abschätzung

$$|F|_{1+\lambda} \leqq A\,\Omega^2, \quad |F - \dot{F}|_{1+\lambda} \leqq B\,\Omega\, V. \tag{3.18}$$

Die Funktionalgleichung (3.10) kann man mit den Methoden von LICHTENSTEIN [4] auflösen. Es gilt für die gegebenen analytischen Differentiale

$$\begin{cases} |dw_\nu|_{1+\lambda}, \quad |dw'_\nu|_{1+\lambda} \leqq C_1 |dz|, \quad \text{ebenso} \quad |u_\alpha^{(\nu)}|_{1+\lambda}, \quad |u_\alpha'^{(\nu)}|_{1+\lambda} \leqq C_2 \\ \qquad\qquad |d \ln \sqrt{g}|_\lambda \leqq C_3 |dz|. \end{cases} \tag{3.19}$$

Es entsteht nun das Problem im Großen, die Lösung schrittweise nach den Parametern γ_ν, γ'_ν fortzusetzen, solange das Problem vom elliptischen Typus ist. Das geht bei Kenntnis von apriori-Schranken; dies ist die Methode von S. BERNSTEIN, SCHAUDER und LERAY, die im II. Abschnitt am Problem der Gasströmung in einem *ebenen* ringförmigen Kanal dargestellt wird. Heute folgen die dabei nötigen apriori-Abschätzungen einfacher als mit den Methoden von S. BERNSTEIN nach NIRENBERG [14] mittels der Ungleichheit

$$P_x^2 + P_y^2 + Q_x^2 + Q_y^2 \leqq k(P_y Q_x - P_x Q_y)$$

der quasikonformen Abbildung von x, y auf P, Q, und nach MORREY [11], [12] mittels der Abschätzung eines modifizierten Dirichletintegrals der Form

$$\int r^{-\lambda}(P_x^2 + P_y^2 + Q_x^2 + Q_y^2)\, dx\, dy \leqq M, \qquad 0 < \lambda < 1,$$

und der daraus folgenden H-Bedingung für P, Q

$$|P' - P|/r^{\lambda} \leqq H, \ldots .$$

Man zeigt so, daß die Normen $|P^0|_\lambda$, $|Q^0|_\lambda$ nur von der ein für allemal vorgegebenen Schranke b_0,

$$|P^0|, |Q^0| \leqq b_0, \tag{3.20}$$

abhängen. Daß dann auch die Ableitungen Ungleichheiten

$$|P_x^0|_\lambda, \ldots, |Q_y^0|_\lambda \leqq C(b_0) \tag{3.21}$$

genügen, folgt nach SCHAUDER [6] bzw. NIRENBERG [14].

Daraus folgen auch apriori-Schranken für $|d \ln \sqrt{g}|_\lambda$.

4. Beim Variationsproblem der ebenen Gasdynamik, für das die Fortsetzungsmethode in einem ebenen Gebiet T mit Rand in der alten Weise im II. Abschnitt ausgeführt wird, ergibt sich die Grundfunktion

$$F(P, Q) = G(P^2 + Q^2) = \mathfrak{p} + \varrho(u^2 + v^2) \quad (= \text{Impulsdichte}) \tag{4.1}$$

nach [10] (4.6) aus dem Mollierdiagramm für den Druck $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\mathfrak{i}, s_0)$, $s_0 = \text{const}$, und der Dichte $\varrho = \mathfrak{p}_\mathfrak{i} \geqq \varrho_0 > 0$, wenn wir den aus der Bernoullischen Gleichung folgenden Ausdruck der Enthalpie $\mathfrak{i} = \mathfrak{i}_0 - \frac{w^2}{2}$, $\mathfrak{i}_0 = \text{const}$, einsetzen und schließlich aus

$$\varrho u = Q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \varrho v = -P = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{p}_\mathfrak{i}^2 w^2 = \varpi^2 \tag{4.2}$$

das Quadrat $w^2 = u^2 + v^2$ der Geschwindigkeit $w > 0$ durch das Quadrat $\varpi^2 = P^2 + Q^2$ der Stromstärke $\varpi > 0$ ausdrücken.

Man setzt ein Gas voraus, bei dem die Impulsdichte $G = \mathfrak{p} + 2(\mathfrak{i}_0 - \mathfrak{i})\mathfrak{p}_\mathfrak{i}$ eine konvexe Funktion der Enthalpie $\mathfrak{i}$ ist, die für $\mathfrak{i}_* = \mathfrak{i}_0 - \frac{1}{2}c_*^2$ ein Maximum besitzt. An der Stelle $w = c_*$ ist

$$\frac{dG}{d\mathfrak{i}} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} \cdot 2(\mathfrak{i}_0 - \mathfrak{i}) - \mathfrak{p}_\mathfrak{i} = 0, \quad \text{d. h.} \quad w^2 = \frac{\mathfrak{p}_\mathfrak{i}}{\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}}} = c^2 \tag{4.3}$$

(Quadrat der Schallgeschwindigkeit),

und wegen unserer Annahme $\frac{d^2G}{d\mathfrak{i}^2} < 0$ gilt: Wenn w die Intervalle $\langle 0, c_* \rangle$ und weiter $(c_*, +\infty)$ durchläuft, so durchläuft G monoton wachsend $\langle 0, b_* \rangle$ wieder und zurück, monoton abnehmend.

Ich betrachte nur den 1. Zweig über $\langle 0, c_* \rangle$ des Variationsproblems (4.1), die Unterschallströmungen mit $w < c$, das für $P^2 + Q^2 < b_*^2$ analytisch und positiv regulär ist. Wir betrachten also das Variationsproblem (3.1), dessen Grundfunktion (4.1) $F(P, Q) = \overline{\varphi} - \xi \overline{\varphi}_\xi - \eta \overline{\varphi}_\eta$ zur negativen Hamiltonfunktion

$$\begin{cases} \zeta = \overline{\varphi}(\xi, \eta) = \mathfrak{p}(\mathfrak{i}_0 - \frac{1}{2} w^2, s_0) \\ \xi = v = -F_P, \quad \eta = -u = -F_Q \end{cases} \tag{4.4}$$

gehört. Dann ist die Matrix

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} F_{PP} & F_{PQ} \\ F_{QP} & F_{QQ} \end{pmatrix} = -\frac{1}{g} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}_{\eta\eta} & -\overline{\varphi}_{\eta\xi} \\ -\overline{\varphi}_{\xi\eta} & \overline{\varphi}_{\xi\xi} \end{pmatrix} = -\frac{1}{g} \begin{pmatrix} \overline{\varphi}_{uu} & \overline{\varphi}_{uv} \\ \overline{\varphi}_{vu} & \overline{\varphi}_{vv} \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_\mathfrak{i} - \mathfrak{p}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} u^2 & -\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} u v \\ -\mathfrak{p}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} u v & \mathfrak{p}_\mathfrak{i} - \mathfrak{p}_{\mathfrak{i}\mathfrak{i}} v^2 \end{pmatrix} = \frac{\mathfrak{p}_\mathfrak{i}}{g} \begin{pmatrix} 1 - \frac{u^2}{c^2} & -\frac{u v}{c^2} \\ -\frac{u v}{c^2} & 1 - \frac{v^2}{c^2} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{4.5}$$

mit

$$g = \overline{\varphi}_{uu} \overline{\varphi}_{vv} - \overline{\varphi}_{uv}^2 = \mathfrak{p}_\mathfrak{i}^2 \left(1 - \frac{u^2 + v^2}{c^2}\right). \tag{4.6}$$

Da

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda - \frac{u^2}{c^2} & -\frac{u v}{c^2} \\ -\frac{u v}{c^2} & 1 - \lambda - \frac{v^2}{c^2} \end{vmatrix} = (1 - \lambda)\left(1 - \lambda - \frac{u^2 + v^2}{c^2}\right) = 0 \tag{4.7}$$

unter der Voraussetzung (4.3) die Wurzeln $0 < \lambda_1 = 1 - \frac{u^2 + v^2}{c^2} < \lambda_2 = 1$ hat, ist wegen $\frac{\mathfrak{p}_\mathfrak{i}}{g} = \frac{1}{\mathfrak{p}_\mathfrak{i}\left(1 - \frac{w^2}{c^2}\right)}$

$$\frac{1}{\varrho}(X^2 + Y^2) \leqq F_{PP} X^2 + 2 F_{PQ} X Y + F_{QQ} Y^2 \leqq \frac{1}{\varrho} \frac{1}{1 - (u^2 + v^2)/c^2} (X^2 + Y^2). \tag{4.8}$$

Ein Strömungsgebiet T mit Rand, wie wir es im nun folgenden Teil II annehmen, könnten wir auch mit den Methoden der Nr. 3 behandeln, indem wir aus T und seinem Doppel eine geschlossene Fläche M machen, vgl. [*16*].

II. Eine umfassende Methode zur Herstellung von Unterschallströmungen mit beliebig großen unterkritischen Geschwindigkeiten

1. Problemstellung. Ebene Strömung in einem ringförmigen Kanal um eine Kontur

Ich betrachte die isentropische drehungsfreie *ebene* Unterschallströmung eines Gases in einem *beschränkten* ringförmigen Kanal mit den Wänden S_0 (außen), S_1, in dem sich ein Profil S_* befindet; S_* bildet zusammen mit den Wänden S_0, S_1 die Gesamtbegrenzung S des Strömungsgebietes T. Die Randkomponenten S_0, S_1, S_* seien sämtlich stetig gekrümmt, auch das Profil *ohne* Ecke, genauer

von der Klasse Bh in der Bezeichnung von LICHTENSTEIN [1]; dies verlangt daß für die Parameterdarstellung $x=x(s)$, $y=y(s)$, $s=$ Bogenlänge, einer Randkomponente die sog. $2+\lambda$-Norm

$$(1)\qquad |x|_{2+\lambda} \overset{\text{def}}{=} \text{ob. Grenze}_{S}\{|x|, |\dot{x}|, |\ddot{x}|, r^{-\lambda}|\ddot{x}'-\ddot{x}|\}, \qquad |y|_{2+\lambda}=\cdots$$

existiert, das soll heißen eine endliche Konstante ist. Dabei gilt für den Exponenten λ die Ungleichheit $0<\lambda<1$. Es ist r die Entfernung zweier Punkte P, P', in denen die Funktionen $x(s)$, ... bzw. ihre Ableitungen $\dot{x}, \ddot{x}, \ldots$ zu nehmen sind.

Für Unterschallströmungen, für die zwischen Geschwindigkeit w, kritischer Geschwindigkeit c_* und lokaler Schallgeschwindigkeit c die Beziehung

$$w<c_*<c$$

gilt, lautet die Differentialgleichung für die Stromfunktion ψ, da die Strömung konstante Entropie s^0 haben soll und daher wirbelfrei ist

$$(2a)\qquad \frac{\partial F_P}{\partial x}+\frac{\partial F_Q}{\partial y}=0$$

mit der in I (4.1) definierten Lagrange-Funktion F oder explizit

$$(2)\qquad \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\psi_{xx}-2\frac{uv}{c^2}\psi_{xy}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\psi_{yy}=0.$$

Für

$$(3)\qquad \varpi=\psi_x^2+\psi_y^2<b_*^2$$

ergeben sich aus (4.2) u, v sowie

$$(3a)\qquad c^2=\mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}_{1i}$$

als reguläre analytische Funktionen von $P=\psi_x$, $Q=\psi_y$; es ist $w<c_*<c$ und die Differentialgleichung (2) ist vom elliptischen Typ.

Die Wände S_0+S_1 und die Kontur S_* müssen Stromlinien $\psi=$ const sein; genauer legen wir die Strömung und auch ihre Zirkulationen um S_1, S_* fest durch die Randbedingung

$$(4)\quad \psi=0 \text{ auf } S_0,\quad \psi=k \text{ auf } S_1,\quad \psi=\gamma k \text{ auf } S_*\quad (k, \gamma=\text{const}, 0<\gamma<1).$$

Es ist dann die Durchflußmenge

$$(5)\qquad \int_{(0)}^{(1)} d\psi=k;$$

das Integral ist zu erstrecken auf einem Querschnitt, der von S_0 zu S_1 führt. Die Gasmengen, die zu beiden Seiten des Profils vorbeiströmen, stehen im *fest* gegebenen Verhältnis $\gamma:1-\gamma$

Wir betrachten zunächst das Problem im Kleinen: In der Nachbarschaft einer irgendwie bekannten zur Durchflußmenge $\mathring{k}$ gehörenden Unterschallströmung $\mathring{\psi}(x, y)$ (etwa der Ruhe $\mathring{\psi}\equiv 0$) als Ausgangslösung, die noch weitere

Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften besitzen muß, vgl. **3**, sind weitere Lösungen $\psi(x, y)$ zu finden, die zu Durchflußmengen $k=\mathring{k}+\alpha$, $\alpha<\delta$ gehören; dabei ist δ eine kleine positive Zahl.

Wir setzen die Stromfunktion

$$\psi=\mathring{\psi}+\zeta \tag{6}$$

und bekommen durch Umrechnen der Lagrange-Funktion F auf ζ

$$F=\mathring{F}+\mathring{F}_P\zeta_x+\mathring{F}_Q\zeta_y+H+\hat{H}. \tag{7}$$

Als neue Lagrange-Funktion für ζ kann daher $H+\hat{H}$ genommen werden, wo

$$H=\tfrac{1}{2}\,(\mathring{a}\,\zeta_x^2+2\mathring{b}\,\zeta_x\zeta_y+\mathring{c}\,\zeta_y^2), \tag{8}$$

$$\mathring{a}=F_{PP}(\mathring{\psi}_x, \mathring{\psi}_y), \ldots, \quad \mathring{c}=F_{QQ}(\mathring{\psi}_x, \mathring{\psi}_y) \tag{9}$$

der quadratische Teil und $\hat{H}$ von höherem als zweiten Grad in den Ableitungen ζ_x, ζ_y ist.

Die elliptische Differentialgleichung für die Zusatzstromfunktion $\zeta(x, y)$ erhält somit die Form

$$\left\{\begin{aligned} &\mathring{\Delta}(\zeta)\equiv\frac{\partial}{\partial x}\,(\mathring{a}\,\zeta_x+\mathring{b}\,\zeta_y)+\frac{\partial}{\partial y}\,(\mathring{b}\,\zeta_x+\mathring{c}\,\zeta_y)\\ &\quad=-\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\hat{H}_{\zeta_x}+\frac{\partial}{\partial y}\,\hat{H}_{\zeta_y}\right)\equiv-\mathring{F}\quad\text{in}\quad T.\end{aligned}\right. \tag{10}$$

Die Randbedingung ist

$$\zeta=0\quad\text{auf}\quad S_0,\qquad \zeta=\alpha\quad\text{auf}\quad S_1,\qquad \zeta=\gamma\alpha\quad\text{auf}\quad S_*. \tag{11}$$

Das Durchflußverhältnis γ wird festgehalten.

Nach Division der Gleichung (10) durch $\sqrt{\mathring{a}\,\mathring{c}-\mathring{b}^2}$ nimmt sie die Form

$$\Delta(\zeta)=-F \tag{10a}$$

an, wo der Differentialausdruck $\Delta(\zeta)$ statt $\mathring{a}, \mathring{b}, \mathring{c}\,|\,a, b, c$ mit $ac-b^2=1$ enthält.

2. Hilfssätze der Potentialtheorie und der Theorie elliptischer Differentialgleichungen

Wir stellen — ohne Beweise — die Sätze zusammen, die wir beim Existenzbeweis für die Lösung unseres gasdynamischen Problems benötigen würden; sie finden sich großenteils in den beiden Enzyklopädieartikeln von L. LICHTENSTEIN [*1*].

1. Im stetig gekrümmten Bereich $T+S$ der Klasse Bh handele es sich zunächst um eine spezielle Lösung der Poissonschen Differentialgleichung

$$\Delta V=-F, \tag{12}$$

wobei Δ der Laplacesche Differentialausdruck ist und für die Dichte F eine Bedingung

$$|F|\leqq\mathfrak{C}_0, \qquad |F(P')-F(P)|\leqq\mathfrak{C}_0 r^\lambda, \qquad 0<\lambda<1, \qquad r=\overline{PP'} \tag{13}$$

besteht, kurz gesagt

$$(13\,a)\qquad |F|_\lambda \equiv \text{ob. Grenze}_{T+S}\,(|F|, r^{-\lambda}|F'-F|) = \mathfrak{C}_0 < +\infty \quad \text{existiert,}$$

nämlich um die Lösung, die durch das logarithmische Potential der ebenen Belegung F gegeben ist

$$(14)\qquad V = \frac{1}{2\pi}\iint_T \log\frac{1}{r}\cdot F'\,dx'\,dy'.$$

Unter der Voraussetzung (13) existieren analog wie bei dem von O. HÖLDER, daraufhin untersuchten Newtonschen Potential auch die zweiten Ableitungen D_2V in $T+S$ und außerdem gilt nach KORN [*1*a, S. 209]

$$(15)\qquad |V|_{2+\lambda} \equiv \text{ob. Grenze}_{T+S}\,\{|V|, |D_1V|, |D_2V|, r^{-\lambda}|D_2V'-D_2V|\} \leqq K_0(\mathfrak{C}_0),$$

wobei irgend eine 1. Ableitung D_1V, irgend eine 2. Ableitung D_2V und irgendein λ-Quotient einer zweiten Ableitung gemeint ist und die Konstante (außer vom Bereich) noch von $\mathfrak{C}_0$ abhängt.

Schon die Ungleichheiten (13), (15) hätten für ein nicht beschränktes Gebiet eine viel kompliziertere Gestalt.

2. Wir betrachten die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie

$$(17)\qquad \Delta W = 0 \quad \text{in} \quad T,$$

$$(16)\qquad W = f(s) \quad \text{auf} \quad S, \quad \text{wobei } |f|_{2+\lambda} \text{ existiert.}$$

Die völlig bestimmte *eindeutige* Lösung W kann als logarthmisches Potential einer auf S ausgebreiteten Doppelbelegung angesehen werden, deren Dichte $\nu(s)$ sich aus einer Fredholmschen Integralgleichung mit der rechten Seite $f(s)$ bestimmt. Daraus folgt die Existenz und Endlichkeit von

$$|\nu|_{2+\lambda} \quad \text{auf } S$$

und sodann von

$$|W|_{2+\lambda} \text{ in } T+S$$

nach Sätzen von KORN ,vgl. [*1*a], S. 243, KELLOGG [*2*].

3. Kombination von 1. und 2. führt zur Auflösung der ersten Randwertaufgabe für die Poissonsche Gleichung

$$(18)\qquad \Delta Z = -F \quad \text{in} \quad T,$$

$$(19)\qquad Z = f \quad \text{auf} \quad S, \qquad \text{wobei} \quad |F|_\lambda + |f|_{2+\lambda} \leqq \mathfrak{C}_1 \quad \text{in} \quad T+S.$$

Man erhält die Endlichkeit von

$$(20)\qquad |Z|_{2+\lambda} \leqq K_1(\mathfrak{C}_1),$$

indem man mit dem in 1. bestimmten logarithmischen Potential V zunächst

$$Z = V + W$$

setzt, für W die Randwertaufgabe

$$\Delta W = 0 \qquad \text{in} \quad T \tag{22}$$

$$W = f - V \quad \text{auf} \quad S \quad \text{mit} \quad |f - V|_{2+\lambda} \quad \text{auf } S, \text{ nach 1.}, \tag{21}$$

erhält und auch 2. anwendet.

4. Statt der Laplaceschen oder Poissonschen Gleichung betrachten wir nun die allgemeine elliptische Differentialgleichung

$$\bar{\Delta}(Z) \equiv a(x, y) Z_{xx} + 2b Z_{xy} + c Z_{yy} + d Z_x + e Z_y = -F \quad \text{in} \quad T \tag{23}$$

$$Z = f \quad \text{auf} \quad S, \tag{24}$$

wobei für die von x, y abhängigen Koeffizienten $a, b, c(x, y)$

$$a c - b^2 = 1 \tag{25}$$

$$|a|_\lambda, \ldots, |c|_\lambda \leqq \mathfrak{C}, \quad |d|_\lambda, \ |e|_\lambda \quad \text{vorhanden in } T + S \tag{26}$$

sei und obendrein

$$|F|_\lambda + |f|_{2+\lambda} \leqq \mathfrak{C} \quad \text{in} \quad T + S \tag{27}$$

existiere. Dann gilt wie in (20) die Abschätzung

$$|Z|_{2+\lambda} \leqq K(\mathfrak{C}) \quad \text{in} \quad T + S \tag{28}$$

mit einer noch von der Schranke $\mathfrak{C}$ in (26), (27) abhängigen Konstanten. Der Beweis der Abschätzung (28) ist von SCHAUDER [3] mit einer Methode von KORN geleistet worden, zunächst unter der Voraussetzung, daß eine Lösung von (23), (24) mit $|Z|_{2+\lambda}$ in $T+S$ existiere. Auf diese Abschätzung gestützt, hat SCHAUDER auch den Existenzbeweis für die Lösung von (23), (24) geführt und zwar, indem er statt

$$\bar{\Delta}[\Delta + t(\bar{\Delta} - \Delta), \quad 0 \leqq t \leqq 1$$

(symbolisch gesprochen) setzte und durch schrittweise Fortsetzung nach t vom Fall 3. der Poissonschen Gleichung (18), $t = 0$, wirklich zum Parameterwert $t = 1$ und damit zu der in Frage stehenden elliptischen Gl. (23) gelangen kann. Hier will ich diese Methode der schrittweisen Fortsetzung nach einem Parameter wenigstens erwähnt haben, da sie nachher bei der Behandlung der nichtlinearen Gl. (10) bis zur kritischen Geschwindigkeit hin unentbehrlich wird.

3. Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung in der Nachbarschaft einer gegebenen Lösung

Ist die zu $k = \mathring{k}$ gehörige Ausgangslösung $\mathring{\psi}$ mit $|D_1 \mathring{\psi}| \leqq b_0 < b_*$ und mit endlichem $|\mathring{\psi}|_{2+\lambda}$, so sind, wie wir sahen, die zu benachbarten Werten $k = \mathring{k} + \alpha$ gehörigen Lösungen $\psi = \mathring{\psi} + \zeta$ bestimmt durch die erste Randwertaufgabe der

nichtlinearen Differentialgleichung (10a), (11)

$$\Lambda(\zeta) = -F\{\zeta\} \quad \text{in} \quad T \tag{29}$$

$$\zeta = f = \begin{cases} 0 \\ \gamma\alpha \\ \alpha \end{cases} \quad \text{auf} \quad S \begin{cases} S_0 \\ S_* \\ S_1 \end{cases} \tag{30}$$

die Gleichung (29) genügt dann den Bedingungen (25), (26), (27) von Nr. 4. Ich setze $\zeta = \chi + Z$, wobei χ die Lösung des in Nr. 4 behandelten linearen Problems

$$\Lambda(\chi) = 0 \quad \text{in} \quad T \tag{31}$$

$$\chi = f \quad \text{auf} \quad S \tag{32}$$

ist. Es ist $\chi = \alpha\,\chi_1$, wobei χ_1 die Lösung des Problems (31), (32), (30) mit $\alpha = 1$ in T.

Die Zusatzfunktion Z muß den Gleichungen

$$\Lambda(Z) = -F\{\zeta\} \quad \text{in} \quad T \tag{33}$$

$$Z = 0 \quad \text{auf} \quad S \tag{34}$$

genügen. Dabei gilt für das Funktional $F\{\zeta\}$ auf der rechten Seite

$$|F|_\lambda \leqq \bar{A}\,\Omega^2 \quad \text{falls} \quad |\zeta|_{2+\lambda} \leqq \Omega < \varepsilon_0 \tag{35}$$

$$|F - \dot{F}|_\lambda \leqq \bar{B}\,\Omega\,V \quad \text{falls} \quad |\zeta - \dot{\zeta}|_{2+\lambda} \leqq V \leqq 2\Omega, \tag{36}$$

$\dot{F} = F\{\dot{\zeta}\}$ für eine zweite wie ζ beschaffene Funktion $\dot{\zeta}$ gesetzt. Bestimmen wir durch die Bedingungen

$$\begin{cases} \Lambda(\mathfrak{G}) = 0 \quad \text{für} \quad P(x, y) \quad \text{in} \quad T \\ \mathfrak{G} = 0 \quad \text{für} \quad P(x, y) \quad \text{auf} \quad S \\ \mathfrak{G} = -\frac{1}{2}\log\left[c(x-x')^2 - 2b(x-x')(y-y') + a(y-y')^2\right] + \\ \qquad + \text{beschr. Fkt. in der Umgebung von } P'(x,' y') \end{cases} \tag{37}$$

die erste Greensche Funktion $\mathfrak{G}(P, P')$ von Λ, so wird bekanntlich

$$Z = \frac{1}{2\pi} \iint_T \mathfrak{G} \cdot F'\{\zeta\}\, dx'\, dy' = \mathfrak{Z}\{\zeta\}, \tag{38}$$

so daß statt (29), (30) endgültig die Integro-Differentialgleichung

$$\zeta = \chi + \mathfrak{Z}\{\zeta\} \tag{39}$$

kommt. Es gilt dann auch

$$|\mathfrak{Z}|_{2+\lambda} \leqq A\,\Omega^2, \quad |\mathfrak{Z}\{\zeta\} - \mathfrak{Z}\{\dot{\zeta}\}|_{2+\lambda} \leqq B\,\Omega\,V. \tag{40}$$

Der erste Term χ genügt der Ungleichheit

$$|\chi|_{2+\lambda} \leqq \beta\,\Omega_1 \quad \text{falls} \quad |\alpha| \leqq \Omega_1 \leqq \delta_1. \tag{41}$$

Diese Bedingungen garantieren für genügend kleines $|\alpha| \leqq \delta_1$ eine eindeutig bestimmte Lösung der Integro-Differentialgleichung (39). Die Koeffizienten $\bar{A}, \bar{B}, A, B, \ldots$ hängen von der Norm $|\mathring{\psi}|_{2+\lambda}$ ab; mit β bezeichnen wir unterschiedslos Konstante.

Die Lösung ist nach LICHTENSTEIN, l. c. [4, S. 101ff., S. 14ff., S. 88ff.] durch sukzessive Approximationen

$$(42) \qquad \begin{cases} {}_0\zeta = \chi \\ {}_1\zeta = \chi + \mathfrak{Z}({}_0\zeta) \\ \vdots \\ {}_\nu\zeta = \chi + \mathfrak{Z}({}_{\nu-1}\zeta), \ldots \end{cases}$$

herstellbar, indem sich die Näherungen ${}_\nu\zeta$ unbeschränkt bilden lassen und ihre Differenzen ${}_\nu\zeta - {}_{\nu-1}\zeta$ dem Betrage nach wie die Glieder einer geometriscen Reihe abnehmen, also $\zeta = \lim_{\nu\to\infty} {}_\nu\zeta$ existiert. Es gilt

$$(43) \qquad |\zeta|_{2+\lambda} \leqq \varepsilon_0.$$

Hinterher zeigt man auch, daß sich die Lösung als Potenzreihe nach α entwickeln läßt:

$$(44) \qquad \zeta = \alpha\chi_1(x, y) + \alpha^2\chi_2(x, y) + \cdots.$$

All das gilt für ein α-Intervall

$$(45) \qquad |\alpha| \leqq \delta(|\mathring{\psi}|_{2+\lambda}),$$

das außer von der Begrenzung S noch von der Ausgangslösung $\mathring{\psi}$ und ihren Ableitungen bis zur 2. Ordnung und deren λ-Quotienten abhängt.

4. Beweis des Existenzsatzes im Großen

Wir können nun die Lösung (immer bei festem γ) in Abhängigkeit von dem in die Randbedingung eingehenden Parameter k schrittweise fortsetzen also die Durchflußmenge solange steigern, bis Unterschallgeschwindigkeiten w in beliebiger Nähe der kritischen Geschwindigkeit c_* im Strömungsfeld auftreten. Genauer besteht folgender Sachverhalt:

Wir nehmen c_0 beliebig wenig unterhalb der kritischen Geschwindigkeit c_* an und werden eine Lösung ψ angeben, bei der Unterschallgeschwindigkeiten $w > c_0$ vorkommen.

Beim Beweise betrachten wir die Menge $\{\psi\}$ von Unterschallströmungen mit Geschwindigkeiten $w \leqq c_0$; für diese sind die Ableitungen

$$(46) \qquad |\psi_x|, \ |\psi_y| \leqq b_0 \quad \left(= \sqrt{2(i_0 - i^0)}\, g_i^0 \quad \text{mit} \quad i^0 = i_0 - \tfrac{1}{2} c_0^2\right)$$

und, wenn l die Länge des kleinsten Querschnittes zwischen S_0 und S_1 ist, die Durchflußmenge

$$(47) \qquad k \leqq b_0 l = k_0.$$

Nun gilt, wie wir nach S. BERNSTEIN [5] und SCHAUDER [6] nachher darlegen werden, für die Menge $\{\psi\}$

$$|\psi|_{2+\lambda} \leqq C(b_0) \tag{48}$$

mit einer nur noch vom Gebiet $T+S$ abhängigen Funktion C von b_0, d. h. für die zweiten Ableitungen der Lösungen $\{\psi\}$ und ihre H-Quotienten lassen sich apriori-Abschätzungen angeben, sobald eine Schranke für die ersten Ableitungen bekannt ist.

Nach dem Ergebnis (45) kann man dann behaupten: Nimmt man aus der Menge $\{\psi\}$ irgendeine zu $\mathring{k}$ gehörige Lösung $\mathring{\psi}$ als Ausgangslösung, so kann man noch für Durchflußmengen $k = \mathring{k} + \alpha$ mit

$$0 < \alpha \leqq \delta\big(C(b_0)\big) = \delta_0 \tag{49}$$

(eindeutig bestimmte) Unterschallströmungen finden, und zwar mit Geschwindigkeiten

$$w \leqq \bar{c}_0, \quad c_0 < \bar{c}_0 < c_*, \quad \bar{c}_0 \text{ fest.} \tag{50}$$

Damit die letzte Bedingung erfüllt ist, muß man δ_0 nur genügend klein wählen.

Mit diesem *festen* α-Schritt der Größe δ_0 gehen wir mit SCHAUDER [6] und SCHAUDER-LERAY [7] folgendermaßen an die Herstellung der Lösungen von (2), (4).

Von der Ruhe, $\mathring{k} = 0$, die der bekannten Lösung $\mathring{\psi} \equiv 0$ entspricht, stellen wir nach (49) die Lösungen ψ mit $0 < k \leqq \alpha$, $\alpha \leqq \delta_0$ her. Die dabei auftretenden Geschwindigkeiten sind sicher $w \leqq \bar{c}_0$; kommt wirklich an einer Stelle schon $w > c_0$ vor, sind wir fertig: Wir haben Lösungen bestimmt, bei denen Unterschallgeschwindigkeiten $w > c_0$ auftreten. Andernfalls ($w \leqq c_0$) gehören alle zu $0 \leqq k \leqq \delta_0$ konstruierten Lösungen zur Menge $\{\psi\}$; nehmen wir die zu $k = \delta_0$ gehörige Lösung $\dot{\psi}$ als neue Ausgangslösung (für sie ist $k \leqq k_0$). Wir können wieder für $k = \delta_0 + \alpha$, $0 < \alpha \leqq \delta_0$ Nachbarlösungen ψ konstruieren, die sicher $w \leqq \bar{c}_0$ haben. Kommt $w > c_0$ vor, sind wir fertig; sonst gehen wir in derselben Weise weiter. Da die α-Schritte alle von der gleichen Größe δ_0 sind, erreichen wir nach *endlich* vielen, N, Schritten Lösungen ψ mit Geschwindigkeiten w, $c_0 < w \leqq \bar{c}_0$, nämlich sicher dann, wenn zum ersten Male $k = N\delta_0 > k_0$ geworden ist. Dann kann nicht mehr $w \leqq c_0$ sein, da ja das $k \leqq k_0$ zur Folge hätte.

5. Die apriori-Abschätzungen der zweiten Ableitungen bei gegebener Schranke für die ersten Ableitungen

Wir wenden uns jetzt zur fundamentalen Ungleichheit (48)

$$|\psi|_{2+\lambda} \leqq C(\mathrm{Max}\,|D_1\psi|). \tag{48a}$$

Zuerst beweist man mit S. BERNSTEIN

$$\text{a)} \quad |D_2\psi| \leqq C_1(\mathrm{Max}\,|D_1\psi|) \leqq C_1(b_0). \tag{51}$$

Erst nachher zeigen wir dann mit SCHAUDER [6]

$$\text{b)} \quad |D_2\psi|_\lambda \leqq C_2(b_0).$$

Der Bereich $T+S$ und damit die kleinste Querschnittslänge l sowie b_0, $k_0 = b_0 l$ werden festgehalten.

Die *Ungleichheit* a) hat man in zwei Schritten zu beweisen:

1. auf der Berandung S des Strömungsgebietes mit der Methode der Hilfsfunktion, nach BERNSTEIN [5], S. 123 in der Fassung von ZWIRNER [8].

2. im Innern T des Strömungsgebietes, nach BERNSTEIN [5], S. 119–123.

Beim 1. Schritt transformiere ich $T+S$ durch eine feste, auch noch auf den Rändern reguläre konforme Abbildung auf ein von den konzentrischen Kreisen Σ_0 und Σ_1 sowie von der Kurve Σ^* begrenztes Ringgebiet $\Theta + \Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_*$ der X, Y-Ebene ab, das ich auch auf Polarkoordinaten ϱ, σ mit dem Mittelpunkt der beiden Kreise als Ursprung beziehe, und überpflanze die Stromfunktion $\psi(x, y) = \psi(X, Y)$. Ich suche Abschätzungen von $D_2\psi$ am Außenkreisrand Σ_0 ($\varrho = 1$). Durch zwei andere feste (d. h. von ψ unabhängige) konforme Abbildungen kann ich auch S_1 oder S_* auf den Außenrand Σ_0 eines Kreisringgebietes abbilden. Die drei Abschätzungen von $|D_2\psi|$ auf Σ_0 geben bei der Umrechnung auf die alten Koordinaten x, y Abschätzungen der ursprünglichen zweiten Ableitungen auf den ursprünglichen Begrenzungslinien S_0 sowie S_1 und S_*. Die Transformationsformeln $x = x(X, Y)$, $y = y(X, Y)$ sind ja mit der Berandung von der Klasse Bh.

Die Differentialgleichung hat *nach* der konformen Abbildung in Polarkoordinaten ϱ, σ die Form (mit Koeffizienten $A, \ldots, D\left(\varrho, \sigma, \frac{\partial\psi}{\partial\varrho}, \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)$

$$A\frac{\partial^2\psi}{\partial\varrho^2} + 2B\frac{\partial^2\psi}{\partial\varrho\,\partial\sigma} + C\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2} = D; \tag{52}$$

sie ist elliptisch.

Durch Differentiation nach σ ergibt sich, wenn im Moment $\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} = \pi$ gesetzt wird, für $\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = \psi_1 = \varkappa$ die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} &A\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\varrho^2} + 2B\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\varrho\,\partial\sigma} + C\frac{\partial^2\psi_1}{\partial\sigma^2} = D_\sigma + D_\pi\frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho} + D_\varkappa\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma} - \\ &\quad - \left(A_\sigma + A_\pi\frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho} + A_\varkappa\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\right)\frac{1}{A}\left(D - 2B\frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho} - C\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\right) - \\ &\quad - 2\left(B_\sigma + B_\pi\frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho} + B_\varkappa\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho} - \left(C_\sigma + C_\pi\frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho} + C_\varkappa\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma} \\ &\qquad\qquad = f\left(\varrho, \sigma, \frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho}, \frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}\right). \end{aligned} \tag{53}$$

Dabei ist f eine in $\frac{\partial\psi_1}{\partial\varrho}$, $\frac{\partial\psi_1}{\partial\sigma}$ quadratische Funktion mit Koeffizienten von der Form:

$$\frac{1}{A}\,2BA_\pi\left(\varrho, \sigma, \frac{\partial\psi}{\partial\varrho}(\varrho, \sigma), \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}(\varrho, \sigma)\right), \ldots, C_\varkappa, D_\pi, \ldots, D_\sigma.$$

Das sind beim Vorhandensein der Schranke (46) für die ersten Ableitungen von ψ *beschränkte* Funktionen von ϱ, σ.

In rechtwinkligen Koordinaten X, Y schreibt sich die Gleichung

$$(54)\quad \Lambda_1(\psi_1) \equiv A_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X^2} + 2B_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X \partial Y} + C_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial Y^2} = f_1\left(X, Y, \frac{\partial \psi_1}{\partial X}, \frac{\partial \psi_1}{\partial Y}\right).$$

Sie ist elliptisch und die linke Seite und die quadratische Funktion f_1 haben wieder beschränkte Koeffizienten im Bildgebiet $\Theta + \Sigma_0 + \Sigma_1 + \Sigma_*$. Auf Σ_0 (und Σ_1) ist $\psi_1 = 0$.

Man führt nun *Hilfsfunktionen*

$$(55)\quad \omega = e^{h\psi_1} + h'(X^2 + Y^2) \quad \text{bzw.} \quad \underline{\omega} = -e^{-h\psi_1} - h'(X^2 + Y^2)$$

ein. ω besitzt die Ableitungen

1. Ordnung $$\frac{\partial \omega}{\partial X} = e^{h\psi_1} h \frac{\partial \psi_1}{\partial X} + 2h'X, \ldots$$

2. Ordnung $$\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} = e^{h\psi_1} h^2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial X}\right)^2 + e^{h\psi_1} h \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X^2} + 2h', \ldots.$$

Für ω bekommen wir so aus (54) die Differentialgleichung

$$(56)\quad \begin{cases} \Lambda_1(\omega) = h\, e^{h\psi_1} \left\{ h\left[A_1\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial X}\right)^2 + 2B_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial X}\frac{\partial \psi_1}{\partial Y} + C_1\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial Y}\right)^2\right] + \right. \\ \qquad \left. + f_1\left(X, Y, \frac{\partial \psi_1}{\partial X}, \frac{\partial \psi_1}{\partial Y}\right)\right\} + 2h'(A_1 + C_1) \equiv P. \end{cases}$$

Da die rechts in der Klammer $\{\cdots\}$ zuerst stehende quadratische Form positiv definit und ebenso $A_1 + C_1 > 0$ ist, gilt für hinreichend große feste Werte $h' > 0$ sicher

$$(57)\quad P \geqq m > 0 \quad \text{für alle Werte} \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial X}, \frac{\partial \psi_1}{\partial Y}.$$

Die Gesamtheit der in $\{\cdots\}$ auftretenden Glieder zweiten Grades in $\frac{\partial \psi_1}{\partial X}, \frac{\partial \psi_1}{\partial Y}$ ist nämlich für genügend große $h > h_1$ positiv definit. Halten wir $h (> h_1)$ fest, so gilt bei genügend großem Q

$$(58)\quad \text{für} \quad \Pi \equiv \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial Y}\right)^2 > Q: \quad \{\cdots\} = h[\cdots] + f_1 > 0,$$

dagegen

$$(59)\quad \text{für} \quad \Pi \leqq Q \qquad\qquad \{\cdots\} > N$$

mit einer gewissen eventuell negativen Konstanten $N(Q(h))$. Machen wir endlich $h' > 0$ genügend groß, so ergibt sich (57), da ja ψ_1 zwischen festen Schranken liegt.

Insgesamt folgt für ω und analog für $\underline{\omega}$

$$(60)\quad \Lambda_1(\omega) > 0 \quad \text{in} \quad \Theta + \Sigma, \quad \text{so daß } \omega \text{ kein Maximum in } \Theta,$$

$$(61)\quad \Lambda_1(\underline{\omega}) < 0 \quad \text{in} \quad \Theta + \Sigma, \quad \text{so daß } \underline{\omega} \text{ kein Minimum in } \Theta$$

besitzt. Denn wenn man die positiv definite Matrix

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & C_1 \end{pmatrix} = (A_{ij}) = (\alpha_{ij})^2, \tag{62}$$

(α_{ij}) symmetrisch, positiv definit, also

$$A_{ij} = \sum_l \alpha_{li}\alpha_{lj} \qquad (i, j, l = 1, 2)$$

setzt, schreibt sich

$$\Delta_1(\omega) = \sum_l \sum_{ij} \alpha_{li} \frac{\partial^2 \omega}{\partial X_i \partial X_j} \alpha_{lj}. \tag{63}$$

Hätte nun ω an einer Stelle X, Y ein Maximum, so wäre die Matrix $\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X_i \partial X_j}\right)$ negativ semidefinit und es ergäbe sich $\Delta_1(\omega) \leqq 0$ in Widerspruch zu (60). Analog schließt man bei $\underline{\omega}$.

Nehmen wir statt $\omega | \omega - (\alpha X + \beta Y + \varkappa) = \omega_*$, so ist auch dies eine solche Funktion, die kein Maximum in Θ besitzt — denn es ist ja auch $\Delta_1(\omega_*) = \Delta_1(\omega) > 0$.

Ich betrachte nun zuerst die Fläche $z = \omega(X, Y)$; sie geht wegen $\psi_1 = 0$ auf Σ_0 durch den über Σ_0 liegenden horizontalen Kreis Γ_0 in der Ebene $z = 1 + h'$. Über Σ_1 und Σ_* geht die Fläche durch gewisse Raumkurven Γ_1 und Γ_*, die sicher zwischen zwei festen Ebenen liegen, da ja ψ_1 eine durch angebbare Schranken begrenzte Funktion ist.

Es sei Δ die Maximalsteigung aller Ebenen ε, die Γ_0 tangieren und einen Punkt von $\Gamma_1 + \Gamma_*$ enthalten. Ist dann P der Berührungspunkt auf Γ_0 und P' ein Punkt im Innern der von $\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_*$ begrenzten Fläche $z = \omega(X, Y)$, so ist der Differenzenquotient

$$\frac{\omega(P') - \omega(P)}{r} \leqq \Delta. \tag{64}$$

Denn wäre er $> \Delta$, so verliefe die Ebene $\varepsilon(g, P')$ (welche die Tangente g an Γ_0 in P und den Punkt P' enthält) ganz oberhalb der Raumkurven $\Gamma_1 + \Gamma_*$. Das gilt auch noch, wenn wir ε durch eine kleine Drehung um g in eine Lage $\underline{\varepsilon}$, $z = \alpha X + \beta Y + \varkappa$ bringen, die etwas unterhalb P' verläuft. Dann wäre die Funktion

$$\omega - (\alpha X + \beta Y + \varkappa) \begin{cases} > 0 & \text{in } P' \\ \gtrless 0 & \text{auf } \Gamma_0 \text{ sowie } \Gamma_1 + \Gamma_* \end{cases} \tag{65}$$

und hätte ein Maximum, was nicht geht. Also gilt (64).

Läßt man $P' \to P$ rücken, so folgt eine Ungleichheit

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varrho} \leqq \Delta \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial \varrho} \leqq \frac{\Delta + 2h'}{h} \tag{66}$$

auf Σ_0. Die Ableitung existiert, da bei der ganzen Betrachtung die Existenz von $D_2\psi$ in $T + S$ vorauszusetzen ist und nur ihre Schranken in Frage stehen.

Indem man auch die Fläche $z=\underline{\omega}(X, Y)$ heranzieht sowie die algebraische kleinste Steigung Δ aller Ebenen $\varepsilon(g, P')$, P' auf $\Gamma_1+\Gamma_*$, findet man noch

$$\underline{\Delta} \leqq \frac{\underline{\omega}(P')-\underline{\omega}(P)}{r}, \quad \underline{\Delta} \leqq \frac{\partial}{\partial \varrho}\underline{\omega}(P), \quad \frac{\underline{\Delta}-2k'}{k} \leqq \frac{\partial \psi_1}{\partial \varrho}, \tag{67}$$

wo nur vom Gebiet $T+S$ abhängige Konstanten stehen.

Mit (66), (67) folgt auch eine Abschätzung des Betrags

$$\left|\frac{\partial \psi_1}{\partial \varrho}\right| = \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho \partial \sigma}\right| \leqq N_1(b_0) \text{ auf } \Sigma_0. \tag{68}$$

Selbstverständlich ist

$$\left|\frac{\partial \psi_1}{\partial \sigma}\right| \doteq \left|\frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2}\right| \leqq N_1 \text{ auf } \Sigma_0, \tag{69}$$

die linke Seite ist sogar Null. Endlich folgt aus der Differentialgleichung (52), $A_1>0$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varrho^2} \leqq N_2(b_0) \text{ auf } \Sigma_0. \tag{70}$$

Alles in allem gibt es eine Schranke C_0, für die

$$|D_2 \psi| \leqq C_0(b_0) \text{ auf } \Sigma_0. \tag{71}$$

Durch Rückgang in die x, y-Ebene wird schließlich die fundamentale Ungleichheit (51) auf S_0 bewiesen und mit Hilfe der beiden anderen konformen Abbildungen mit einem geeignetem C_0 auch auf S_1 und S_*.

Wir kommen nun

2. zur apriori-Abschätzung von $|D_2\psi|$ im Innern T. Dazu bildet man nach S. BERNSTEIN [5], S. 119/123 mit einer im Verlauf der Betrachtung zu bestimmenden Größe α und mit $M=\operatorname{Max}(|\psi|, |P|, |Q|)=\operatorname{Max}(b_0, k_0)$

$$W = \frac{1}{\alpha^2} e^{2\frac{P+M}{\alpha}} e^{2e^{\frac{P+M}{\alpha}}} [A r^2 + 2B r s + C s^2], \tag{72}$$

$$W' = \frac{1}{\alpha^2} e^{2\frac{Q+M}{\alpha}} e^{2e^{\frac{Q+M}{\alpha}}} [A s^2 + 2B s t + C t^2]. \tag{73}$$

Diese *sind* durch (71) schon abgeschätzt auf S. Um sie auch im Innern von T zu beurteilen, zeigt man: Falls $\operatorname{Max} W$ *in* T angenommen wird, gilt

$$W \leqq W_0 \quad \text{und analog} \quad W' \leqq W_0' \tag{74}$$

mit apriori-Schranken W_0, W_0', die nur von b_0 abhängen. Bei dieser Abschätzung die sehr komplizierte, hier nicht wiederzugebende Rechnungen erfordert, werden die Ableitungen vierter Ordnung der Lösung in T benutzt. Sie sind vorhanden, denn vorausgesetzt wird ja, daß $|\psi|_{2+\lambda}$ in $T+S$ existiert, und da die Koeffizienten A, B, C, D der Differentialgleichung (52) in P, Q analytisch oder mindestens zweimal λ-stetig differenzierbar angenommen werden, folgt aus einem Satz von E. HOPF [9], daß in T die Lösung λ-stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung besitzt. Da der Faktor vor der in W bzw. W'

enthaltenen quadratischen Form zwischen positiven Schranken liegt und die quadratischen Formen positiv definit sind, ergibt sich

$$|D_2\psi| < C_1(b_0) \quad \text{in } T \tag{75}$$

und auch auf S, falls $C_1 \geqq C_0$ genommen wird.

Es bleibt jetzt nur noch die *Abschätzung* b) des λ-Quotienten

$$|D_2\psi' - D_2\psi|/r^\lambda \leqq C_2(b_0). \tag{76}$$

Sie ergibt sich aus den Resultaten von SCHAUDER [3] über die Lösungen der linearen elliptischen Differentialgleichung (23) mit $d=e=F=0$, also

$$a\psi_{xx} + 2b\psi_{xy} + c\psi_{yy} = 0, \tag{77}$$

deren Koeffizienten $a, b, c(x, y)$ der Determinantenbedingung (25) $ac - b^2 = 1$ und einer Bedingung (26) genügen — ja sogar einer Lipschitz-Bedingung $|a|_1, \ldots, |c|_1 \leqq L(b_0)$.

Dann gilt nach (28)

$$|\psi|_{2+\lambda} \leqq C_2(b_0). \tag{78}$$

Um diesen Satz auf unser Problem anzuwenden, muß man die Gl. (2) auf die Form (77) bringen mit den Koeffizienten

$$\frac{1 - u^2/c^2}{1 - w^2/c^2} = a(x, y), \quad \frac{-2uv/c^2}{1 - w^2/c^2} = b(x, y), \quad \frac{1 - v^2/c^2}{1 - w^2/c^2} = c(x, y). \tag{79}$$

Auf Grund von $w \leqq c_0$ sind die Voraussetzungen (46) erfüllt und mit der Feststellung (76) die Abschätzung (48) geleistet und damit die Möglichkeit gezeigt, die Lösung schrittweise fortzusetzen bis zu Geschwindigkeiten in beliebiger Nähe der kritischen Geschwindigkeit.

Literatur

[1] Die Sätze der Potentialtheorie und der Theorie elliptischer Differentialgleichungen finden sich großenteils in den beiden Encyklopädieartikeln von L. LICHTENSTEIN: a) Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildungen IIC3; b) Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus IIC12. — [2] KELLOG, O. D.: On the derivates of harmonic functions on the boundary. Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 486—510 (1931). — [3] SCHAUDER, J.: Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. **38**, 257—282 (1934). — [4] LICHTENSTEIN, L.: Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen. Berlin 1931; insbes. S. 14ff., S. 88ff., S. 101ff. — [5] BERNSTEIN, S.: Sur la généralisation du problème de Dirichlet. Math. Ann. **69**, 82—136 (1910). — [6] SCHAUDER, J.: Über das Dirichletsche Problem im Großen für nicht-lineare elliptische Differentialgleichungen. Math. Z. **37**, 623—634 (1933). — [7] LERAY, J., et J. SCHAUDER: Topologie et équations fonctionnelles. Ann. Ec. Norm. (III) **51**, 45—78. — [8] ZWIRNER, G.: Sull'equazione a derivate parziali delle superficie minime. Rend. Sem. Mat. Padova **4**, 140—154 (1933); insbes. S. 141ff. — [9] HOPF, E.: Über den funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Math. Z. **34**, 194—233 (1931); insbes. S. 209f. — [10] HÖLDER, E.: Beiträge zur mathematischen Behandlung des Umströmungsproblems

der Gasdynamik. Lilienthal-Preisarbeit 1943. — [11] MORREY, C. B.: On the solutions of quasilinear elliptic partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **43**, 126—166 (1938). — [12] MORREY, C. B.: Multiple Integral Problems in the Calculus of Variations and Related Topics. Univ. California Publ. in Mathematics, New Series **1** (1943); Chaps. 2 and 3. — [13] SHIFFMAN, MAX: On the existence of subsonic flows of a compressible fluid. J. Rational Mechanics and Analysis **1**, 605—652 (1952). — [14] NIRENBERG, L.: On Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations and Hölder Continuity. Comm. Peur and Appl. Math. **6**, 103—156 (1953). — [15] WEYL, H.: Die Idee der Riemannschen Fläche. 3. Aufl. Stuttgart : B. G. Teubner 1955. — [16] SCHIFFER, M., and D. C. SPENCER: Functionals of finite Riemann surfaces. Princeton Math. Ser. No 16. Princeton Univ. Press 1954. — [17] BOCHNER, S.: Green-Goursat Theorem. Math. Z. **63**, 230 (1955). — [18] NEVANLINNA, R.: Über fast konforme Abbildungen. Ann. Acad. Sci. Fenn. A(I) 251/7. Helsinki 1958. — [19] HÖLDER, E.: Fortsetzung Abelscher Differentiale 1. Gattung ins Nichtlineare. Ann. Acad. Sci. Fenn. A(I) 250/15. Helsinki 1958. — [20] BERGMANN, S.: On multivalued solutions of linear partial differential equations. Contrib. Theory Part. Diff. Equat. Annals of Math. Studies, No. 33. Princeton 1954. — [21] BERS, L.: Function-theoretical properties of solutions of part. diff. equat. of elliptic type, ebenda S. 69. Dort auch weitere Literaturhinweise. — [22] BECKERT, H.: Existenzbeweise mehrdim. regulärer Variationsprobleme. Math. Ann. **133**, 191—218 (1957). — [23] CARLEMAN, T.: Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles a deux variables indépendants. Ark. Mat. Astr. Fys. **26** B, 17 (1939). 9 S. — [24] HÖLDER, E.: Das Eigenwertproblem der Variationsrechnung zweifacher Extremalintegrale. Ber. Math. Tagung Berlin (1953), 291—302. — [25] BERS, L.: Existence and uniqueness of a subsonic compressible flow past a given profile. Comm. Pure and Appl. Math. **7**, 441—514 (1954). — [26] Proceedings of the international colloquium on the theory of functions. Helsinki 1957. — [27] HERGLOTZ, G.: Über die analytische Fortsetzung des Potentials ins Innere der anziehenden Massen. Schriften der Jablonowski-Ges. Leipzig 1914. — [28] LICHTENSTEIN, L.: Zur Theorie der konformen Abbildung. Konforme Abbildung nichtanalytischer singularitätenfreier Flächenstücke auf ebene Gebiete. Bull. Ac. Sci. Cracovie, A **1916**, 192—217. — [29] WINTNER, A.: Remarks on binary Riemannian metrics. Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **5**, 1—14 (1956). — [30] AHLFORS L. V.: On quasiconformal mappings. J. d'analyse Math. **3**, 1—58 (1953/54).

Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 31. März 1959)

WALFISZ, A.
Math. Zeitschr. 72, 259–278 (1960)

Über Gitterpunkte in vierdimensionalen Ellipsoiden

Zum Gedenken an LEON LICHTENSTEIN

Von

ARNOLD WALFISZ

§ 1. Einleitung

Im folgenden bezeichnen die Buchstaben a, b, c, h, l, m, X ganze Zahlen; j, k, n, q, r, M, N positive ganze Zahlen; α nichtnegative ganze Zahlen; s, t, Y positive Zahlen; v, y, V, Z, σ reelle Zahlen; w, z komplexe Zahlen. Ferner sei $x \geqq 3$, $0 < \varepsilon < 1$. Diese Buchstaben werden nötigenfalls mit Indizes oder Strichen versehen.

$Q = Q(y_1, y_2, y_3, y_4)$ sei eine positiv definite quaternäre quadratische Form mit rationalen Koeffizienten; D ihre Determinante; $A_Q(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte (m_1, m_2, m_3, m_4), die dem Ellipsoid $Q \leqq x$ angehören; $\mathsf{P}_Q(x)$ der entsprechende Gitterrest, d. h. $A_Q(x)$ weniger das Volumen $\frac{\pi^2 x^2}{2\sqrt{D}}$ des Ellipsoids.

$\zeta(z) = \zeta(\sigma + iy)$ ist die Riemannsche Zetafunktion; $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen bis x;

$$\Pi(x) = \pi(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y};$$

$\sigma(n)$ die Teilersumme von n [$\zeta(z)$, $\Pi(x)$ und $\sigma(n)$ kommen nur in dieser Einleitung vor].

Mit B werden unterschiedslos Zahlen bezeichnet, deren absolute Beträge unterhalb von Schranken liegen, die nur von N abhängen dürfen. Die Zahl N wird am Schlusse der vorliegenden Arbeit in Abhängigkeit von der quadratischen Form Q gebracht. In § 2 kommt N nicht vor und die B-Schranken sind absolute Konstanten. Dasselbe gilt für diejenigen Formeln der Einleitung, in denen Q nicht vorkommt. In den auf $\mathsf{P}_Q(x)$ bezugnehmenden Formeln hängt die B-Schranke von Q ab, in (9) und (10) von ε. Mit C werden unterschiedslos positive absolute Konstanten bezeichnet (nur in dieser Einleitung).

Falls untere Summationsgrenzen nicht ausdrücklich angegeben werden, sind sie stets Eins. Um komplizierte Exponenten zu vermeiden, setze ich

$$e^{2\pi i y} = e(y), \qquad e^y = \exp(y).$$

Weitere Bezeichnungen werden noch eingeführt.

Die Restfunktion $P_Q(x)$ habe ich schon wiederholt nach oben abgeschätzt ([8, 9, 11]). Das beste Ergebnis, nämlich

$$P_Q(x) = B\,x\log^{\frac{3}{4}}x\,(\log\log x)^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

erhielt ich in [11] mit Hilfe eines Satzes von L. K. HUA ([1], 172; vgl. auch [10], 81, Hilfssatz 5 und die Bemerkung dazu ebenda, 449). Von derselben Schärfe wie (1) sind die Abschätzungen

$$\zeta(1+ix) = B\log^{\frac{1}{4}}x\,(\log\log x)^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

$$\Pi(x) = B\,x\exp\{-C\log^{\frac{1}{3}}x\,(\log\log x)^{-\frac{1}{3}}\}. \tag{3}$$

Auch diese können mit dem Huaschen Satz bewiesen werden; vgl. die Darstellung und Quellenangaben in [11].

Neuerdings hat HUA einen Satz ([3], 155–156) bewiesen, aus dem, wie in [3], 158 angegeben, die Abschätzungen

$$P_Q(x) = B\,x\log^{\frac{3}{4}}x\,(\log\log x)^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

$$\zeta(1+ix) = B\log^{\frac{1}{4}}x\,(\log\log x)^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

$$\Pi(x) = B\,x\exp\{-C\log^{\frac{1}{3}}x\,(\log\log x)^{-\frac{1}{3}}\} \tag{6}$$

folgen. Daß dem so ist, kann man auch aus [11] ersehen. Aus dem in [3] bei HUA bewiesenen Satze ergibt sich nämlich, daß Satz 8 von [11] für

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 2, \quad \delta = 1$$

richtig ist. Setzt man diese Werte in die Formeln (150), (76) und (77) von [11] ein, so ergeben sich die Abschätzungen (4)–(6).

In der Arbeit [4] von HUA-WU FONG wird ein Satz von etwas anderer Bauart, aber derselben Schärfe bewiesen (der dortige Satz 7) und aus ihm werden die Abschätzungen (5), (6) hergeleitet.

In der kürzlich (Mai 1958) erschienen Arbeit [12] von WINOGRADOFF wird, unter gewissen Bedingungen, eine Abschätzung der Summe

$$\sum_{m=M}^{M'} m^{-ix}$$

gegeben, aus der die Abschätzungen

$$\zeta(1+ix) = B\log^{\frac{1}{3}}x, \tag{7}$$

$$\Pi(x) = B\,x\exp(-C\log^{\frac{1}{3}}x) \tag{8}$$

folgen. Der zur Behandlung der obigen Summe benötigte Hilfssatz, von der Art des Huaschen Hilfssatzes 1 der vorliegenden Arbeit, wird in [13] bewiesen.

Etwas später (September 1958) erschien die Arbeit [5] von KOROBOFF. Dort wird, wiederum gestützt auf einen Hilfssatz von der Art des Hilfssatzes 1 weiter unten, aber auf eine von der Winogradoffschen verschiedene Art, ein allgemeiner Satz über trigonometrische Summen bewiesen, aus dem die Abschätzungen (7) und (8) folgen. Wie KOROBOFF mitteilt, ergibt sich aus

seinem Satz für jedes ε auch die Abschätzung

$$\sum_{n \leqq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + B x \log^{\frac{1}{2}+\varepsilon} x. \tag{9}$$

Nach einer bekannten Formel von SIERPINSKI (vgl. [10], 24, (24)) folgt hieraus die Abschätzung

$$\mathsf{P}_K(x) = B x \log^{\frac{1}{2}+\varepsilon} x \tag{10}$$

für die vierdimensionale Kugel ($Q = K = y_1^2 + \cdots + y_4^2$). Es scheint, daß aus dem Koroboffschen Satz, darüber hinaus, die Abschätzung

$$\mathsf{P}_Q(x) = B x \log^{\frac{1}{2}} x \tag{11}$$

für alle unsere Q folgt, die an Schärfe den Winogradoff-Koroboffschen Abschätzungen (7) und (8) entspricht; doch habe ich die Rechnungen nicht durchgeführt. Dagegen werde ich zeigen, daß sich die Abschätzung (11) mit der Winogradoffschen Methode ergibt. Der Haupthilfssatz (Hilfssatz 3 weiter unten) wird im nächsten Paragraphen bewiesen. Aus ihm wird in § 3 die Abschätzung (11) hergeleitet.

Es sei noch bemerkt, daß Hilfssatz 4 weiter unten an Schärfe dem Fall

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 2, \quad \delta = 0$$

des Hilfssatzes 6.2 von [11] entspricht. Man darf aber diese Werte nicht in die dortige Formel (150) einsetzen, was (11) ergäbe, da sie nicht den Bedingungen (34) von Satz 8 genügen.

§ 2. Der Haupthilfssatz

HILFSSATZ 1. *Es sei* $r \geqq 3$, $Z \geqq 3$,

$$c \geqq \tfrac{1}{4} r(r+1) + \alpha r, \tag{12}$$

$$s = (c!)^2 48^{2c} c^r r^{\frac{r(r-1)}{2}}, \tag{13}$$

$$t_\alpha = \frac{r(r+1)}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)^\alpha, \tag{14}$$

$$C_r(Z) = \sum_{n \leqq Z} e(y_r n^r + \cdots + y_1 n). \tag{15}$$

Dann ist

$$\int_0^1 |C_r(Z)|^{2c}\, d y_1 \ldots d y_r \leqq s^\alpha Z^{2c - \frac{r(r+1)}{2} + t_\alpha} \log^\alpha Z. \tag{16}$$

BEMERKUNG. Hilfssatz 1 ist das Lemma 6.9 von TITCHMARSH [7], 109. Dieses Lemma bildet seinerseits eine Bearbeitung von Theorem 1 bei HUA [2], wo statt (13)

$$s = (7c)^{4c}$$

steht und in (16) der Exponent α von $\log z$ zu verdoppeln ist.

Eine andere Bearbeitung des Huaschen Satzes ist Satz 4.1 von PRACHAR [6], 272, wo in (12) das $>$-Zeichen steht und

$$s = (7c)^{5c}$$

ist.

Hilfssatz 1 wird nur zum Beweise von Hilfssatz 3 weiter unten benötigt. Man könnte Hilfssatz 3 ebensogut mit dem Huaschen Theorem 1 oder dem Pracharschen Hilfssatz 4.1 beweisen; es sind nur einige triviale Änderungen anzubringen. Übrigens wird Hilfssatz 1 in der folgenden gleichwertigen Fassung benutzt:

HILFSSATZ 2. *Es seien die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 erfüllt; $h_1, \dots, h_r$ mögen beliebige ganze Zahlen bedeuten. Für die Lösungszahl V des Systems diophantischer Gleichungen*

$$n_1^j + \cdots + n_c^j - n_{c+1}^j - \cdots - n_{2c}^j = h_j \qquad (j = 1, \dots, r), \tag{17}$$

wenn jedes n_k das Intervall

$$1 \leqq n_k \leqq Z \qquad (k = 1, \dots, 2c) \tag{18}$$

durchläuft, gilt dann die Ungleichung

$$V \leqq s^\alpha Z^{2c - \frac{r(r+1)}{2} + \alpha} \log^\alpha Z. \tag{19}$$

BEWEIS. Setzt man

$$n_1^j + \cdots + n_c^j - n_{c+1}^j - \cdots - n_{2c}^j = m_j,$$

so ist nach (15)

$$|C_r(Z)|^{2c} = \sum_{n_1, \dots, n_{2c} \leqq Z} e(y_r m_r + \cdots + y_1 m_1),$$

also

$$\begin{cases} \int_0^1 |C_r(Z)|^{2c} e(-y_r h_r - \cdots - y_1 h_1)\, dy_1 \dots dy_r \\ \qquad = \sum_{n_1, \dots, n_{2c} \leqq Z} \prod_{j=1}^{r} \int_0^1 e\{y_j (m_j - h_j)\}\, dy_j = V, \end{cases} \tag{20}$$

da jedes Integral rechts nur für $m_j = h_j$ von Null verschieden und alsdann gleich Eins ist.

Aus (20) und (16) folgt (19). Umgekehrt, ergibt sich (16) aus (20), mit $h_1 = \cdots = h_r = 0$, und (19).

HILFSSATZ 3. *Es sei*

$$r \geqq 96, \quad 0 < s \leqq 1, \quad M \leqq M' \leqq 2M, \quad \vartheta = (106000000\, r^2)^{-1}, \tag{21}$$

$$t^r \leqq M \leqq t^{6r}, \tag{22}$$

$$S = \sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{t}{m+s}\right). \tag{23}$$

Dann ist

$$S = B M^{1-\phi}. \tag{24}$$

Beweis. Es sei $R = 8r$. Ferner sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$M \geqq 16 R^2; \tag{25}$$

anderenfalls liegt nämlich $M^{-\phi}$ oberhalb einer positiven absoluten Konstanten, und die Abschätzung (24) ist dann klar.

Es sei

$$X = [M^{\frac{1}{2}}], \quad Y = [M^{\frac{1}{2}}], \tag{26}$$

$$g = \left[\frac{r}{6}\right], \tag{27}$$

$$b = 9R^2 + \tfrac{1}{4} R(R+1), \tag{28}$$

$$c = 7R^2 + \tfrac{1}{4} R(R+1), \tag{29}$$

$$f(y) = e\left(\frac{t}{y+s}\right) \quad \text{für} \quad y > 0. \tag{30}$$

Ferner werde gesetzt

$$S_q = \sum_{m=1}^{X} \sum_{n=1}^{Y} f(q + mn). \tag{31}$$

Dann ist, wie jetzt gezeigt werden soll,

$$S = (XY)^{-1} \sum_{q=M}^{M'} S_q + B M^{\frac{3}{4}}. \tag{32}$$

Man schreibe die Summe (23) nochmals mit einem anderen Summationsbuchstaben, unter Berücksichtigung von (30), auf:

$$S = \sum_{k=M}^{M'} f(k).$$

Dann soll gezeigt werden, daß

$$\sum_{k=M}^{M'} f(k) = (XY)^{-1} \sum_{q=M}^{M'} \sum_{m=1}^{X} \sum_{n=1}^{Y} f(q + mn) + B M^{\frac{3}{4}}. \tag{33}$$

Es sei

$$M \leqq k \leqq M'. \tag{34}$$

Dann setze man

$$k = q + mn; \quad m = 1, \ldots, X; \quad n = 1, \ldots, Y. \tag{35}$$

Ist dabei

$$k \geqq M + XY, \tag{36}$$

so gehört für alle XY Darstellungen von k in der Gestalt (35) die Zahl q dem Intervall

$$M \leqq q \leqq M' \tag{37}$$

an. Für jedes k mit (36), falls ein solches vorhanden ist, kommt also $f(k)$ links in (33) einmal vor, rechts $(XY)^{-1}XY$-mal, also auch einmal. Werte von k mit (34), für die (36) nicht gilt, gibt es aber höchstens XY, und die über sie erstreckte Summe von $f(k)$ ist nach (30) und (26) dem Modul nach

$$\leqq XY \leqq M^{\frac{3}{4}}.$$

Rechts in (33) kommen alle XY Zahlen (35) vor, für die (37) gilt. Diese Zahlen k gehören dem Intervall (34) an, wenn

$$q \leqq M' - XY$$

ist. Werte von q mit (37), für die diese Ungleichung nicht gilt, gibt es höchstens XY, und die über sie erstreckte Summe

$$(XY)^{-1} \sum_{q} \sum_{m=1}^{X} \sum_{n=1}^{Y} f(q + mn)$$

ist dem Modul nach

$$\leqq (XY)^{-1} XY \cdot XY = XY \leqq M^{\frac{3}{4}},$$

womit (32) nachgewiesen ist.

Gehört k dem Intervall (34) an und hat die Gestalt (35), so ist

$$\frac{t}{k+s} = \frac{t}{q+s+mn} = \frac{t}{q+s} - \frac{tmn}{(q+s)^2}\left(1 + \frac{mn}{q+s}\right)^{-1}. \tag{38}$$

Gehört dabei q dem Intervall (37) an, so ist wegen (26)

$$0 < \frac{mn}{q+s} \leqq \frac{XY}{M} \leqq \frac{M^{\frac{3}{4}}}{M} = M^{-\frac{1}{4}}, \tag{39}$$

also wegen (25)

$$\frac{mn}{q+s}\left(1 + \frac{mn}{q+s}\right)^{-1} = \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1} \left(\frac{mn}{q+s}\right)^h.$$

Setzt man dies in (38) ein, so ergibt sich

$$\frac{t}{k+s} = g(m, n) + g_1(m, n), \tag{40}$$

wobei

$$g(m, n) = \frac{t}{q+s} + \frac{t}{q+s} \sum_{h=1}^{R} (-1)^h \left(\frac{mn}{q+s}\right)^h,$$

$$g_1(m, n) = \frac{t}{q+s} \sum_{h=R+1}^{\infty} (-1)^h \left(\frac{mn}{q+s}\right)^h, \tag{41}$$

also

$$g(m, n) = A_0 + A_1 mn + \cdots + A_R m^R n^R, \tag{42}$$

$$A_0 = t(q+s)^{-1}; \quad A_h = (-1)^h t(q+s)^{-h-1} \qquad (h = 1, \ldots, R). \tag{43}$$

Weiter ist nach (41), (21), (39), (22), (37) und (25)

$$|g_1(m, n)| \leqq \frac{t}{q}\left(\frac{mn}{q+s}\right)^{R+1} \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{mn}{q+s}\right)^h \leqq \frac{M^r}{M} M^{-\frac{1}{4}(R+1)} (1 - M^{-\frac{1}{4}})^{-1}$$

$$= M^{-1} (M^{\frac{1}{4}} - 1)^{-1} \leqq M^{-1}. \tag{44}$$

Die Summe (31) soll jetzt durch die Summe

$$T_q = \sum_{m=1}^{X} \sum_{n=1}^{Y} e\{g(m,n)\} \tag{45}$$

angenähert werden. Wegen (31), (35), (30), (40), (45), (44) und (26) ist

$$S_q - T_q = \sum_{m=1}^{X} \sum_{n=1}^{Y} \left(e\{g(m,n) + g_1(m,n)\} - e\{g(m,n)\} \right),$$

$$|S_q - T_q| \leqq \sum_{m=1}^{X} \sum_{n=1}^{Y} |1 - e\{g_1(m,n)\}|$$

$$= 2\pi \sum_{m=1}^{X} \sum_{n=1}^{Y} \left| \int_0^{g_1(m,n)} e(y)\, dy \right|$$

$$\leqq 2\pi \sum_{m=1}^{X} \sum_{n=1}^{Y} |g_1(m,n)| \leqq 2\pi XY M^{-1} \leqq 2\pi M^{-\frac{1}{2}},$$

$$S_q = T_q + B M^{-\frac{1}{2}}. \tag{46}$$

Nach (45) ist

$$|T_q| \leqq \sum_{m=1}^{X} \left| \sum_{n=1}^{Y} e\{g(m,n)\} \right|,$$

und hieraus folgt nach der Hölderschen Ungleichung wegen (42) und (43), wenn c die Zahl (29) ist,

$$|T_q|^{2c} \leqq X^{2c-1} \sum_{m=1}^{X} \left| \sum_{n=1}^{Y} e\{g(m,n)\} \right|^{2c}$$

$$= X^{2c-1} \sum_{m=1}^{X} \sum_{n_1,\ldots,n_{2c}=1}^{Y} e\{g(m,n_1) + \cdots + g(m,n_c) -$$

$$- g(m,n_{c+1}) - \cdots - g(m,n_{2c})\},$$

also

$$|T_q|^{2c} \leqq X^{2c-1} \sum_{m=1}^{X} \sum_{n_1,\ldots,n_{2c}=1}^{Y} e\,(A_1 m Z_1 + \cdots + A_R m^R Z_R), \tag{47}$$

wobei

$$Z_j = n_1^j + \cdots + n_c^j - n_{c+1}^j - \cdots - n_{2c}^j \quad (j = 1, \ldots, R). \tag{48}$$

Aus (47) ergibt sich weiter, wenn b die Zahl (28) ist,

$$|T_q|^{4bc} \leqq X^{2b(2c-1)} \left| \sum_{m=1}^{X} \sum_{n_1,\ldots,n_{2c}=1}^{Y} e(A_1 m Z_1 + \cdots + A_R m^R Z_R) \right|^{2b}. \tag{49}$$

Hier ist nach der Hölderschen Ungleichung

$$|\,|^{2b} = \left| \sum_{n_1,\ldots,n_{2c}=1}^{Y} \sum_{m=1}^{X} e(\,) \right| \leqq \left(\sum_{n_1,\ldots,n_{2c}=1}^{Y} 1 \right)^{2b-1} \sum_{n_1,\ldots,n_{2c}=1}^{Y} \left| \sum_{m=1}^{X} e(\,) \right|^{2b}$$

$$= Y^{2c(2b-1)} \sum_{n_1,\ldots,n_{2c}=1}^{Y} \sum_{m_1,\ldots,m_{2b}=1}^{X} e(W), \tag{50}$$

wo

$$W = A_1 m_1 Z_1 + \cdots + A_R m_1^R Z_R + A_1 m_2 Z_1 + \cdots + A_R m_2^R Z_R + \\ + \cdots + A_1 m_b Z_1 + \cdots + A_R m_b^R Z_R - A_1 m_{b+1} Z_1 - \cdots - \\ - A_R m_{b+1}^R Z_R - \cdots - A_1 m_{2b} Z_1 - \cdots - A_R m_{2b}^R Z_R.$$

Setzt man daher

$$X_j = m_1^j + \cdots + m_b^j - m_{b+1}^j - \cdots - m_{2b}^j \qquad (j = 1, \ldots, R), \tag{51}$$

so wird

$$W = A_1 Z_1 X_1 + \cdots + A_R Z_R X_R,$$

folglich nach (49) und (50)

$$|T_q|^{4bc} \leqq X^{2b(2c-1)} Y^{2c(2b-1)} \sum_{m_1, \ldots, m_{2c}=1}^{Y} \sum_{m_1, \ldots, m_{2b}=1}^{X} e(A_1 Z_1 X_1 + \cdots + A_R Z_R X_R). \tag{52}$$

Hierbei durchlaufen nach (51) die ganzen Zahlen X_j gewisse Zahlen h_j des Intervalls

$$-bX^j < h_j \leqq bX^j \qquad (j = 1, \ldots, R). \tag{53}$$

Bedeuten $h_1, \ldots, h_R$ irgendwelche feste Zahlen der Intervalle (53), so betrachte man das Gleichungssystem

$$X_1 = h_1, \ldots, X_R = h_R \tag{54}$$

in $m_1, \ldots, m_{2b}$. Um die Lösungszahl V dieses Systems abzuschätzen, wenn jedes m_k das Intervall

$$1 \leqq m_k \leqq X \qquad (k = 1, \ldots, 2b) \tag{55}$$

durchläuft, werde Hilfssatz 2 mit

$$c = b, \qquad r = R, \qquad \alpha = 9R, \qquad Z = X$$

angewendet. Wegen (28) ist dann die Ungleichung (12) erfüllt und wegen (21,) (25), (26) ist $Z \geqq 3$, wie es sich gehört. Setzt man daher

$$R_1 = (b!)^2 48^{2b} b^R R^{\frac{1}{2}R(R-1)}, \quad R_2 = R_1^{9R}, \tag{56}$$

$$t = \tfrac{1}{2} R(R+1)(1 - R^{-1})^{9R}, \tag{57}$$

$$F = F(X) = X^{2b - \frac{1}{2}R(R+1)+t} \log^{9R} X, \tag{58}$$

so ist, mit Rücksicht auf (14),

$$V \leqq R_2 F. \tag{59}$$

Nach (52) ist

$$|T_q|^{4bc} \leqq X^{2b(2c-1)} Y^{2c(2b-1)} \sum_{m_1, \ldots, m_{2b}=1}^{X} \left| \sum_{m_1, \ldots, m_{2c}=1}^{Y} e(A_1 Z_1 X_1 + \cdots + A_R Z_R X_R) \right|, \tag{60}$$

wobei die Z_j durch (48) und die X_j durch (51) gegeben sind.

Sind die h_j feste Zahlen der Intervalle (53) und durchlaufen die m_k die Intervalle (55), so genügt die Lösungszahl V des Gleichungssystems (54) der Ungleichung (59) mit (56). Aus (60) folgt daher

$$(61)\qquad \begin{cases} |T_q|^{4bc} \leqq X^{2b(2c-1)}\, Y^{2c(2b-1)}\, R_2 F \times \\ \qquad \times \sum_{h_1,\dots,h_R} \sum_{n_1,\dots,n_{2c}=1}^{Y} e(A_1 Z_1 h_1 + \cdots + A_R Z_R h_R)\ , \end{cases}$$

wobei jetzt $h_1, \dots, h_R$ die Intervalle (53) durchlaufen.

Ein Intervall (53) enthält $2bX^j$ Zahlen h_j. Aus (61) ergibt sich mittels der Schwarzschen Ungleichung

$$(62)\qquad \begin{cases} |T_q|^{8bc} \leqq X^{4b(2c-1)}\, Y^{4c(2b-1)}\, R_2^2 F^2 (2b)^R X^{\frac{1}{2}R(R+1)} \times \\ \qquad \times \sum_{h_1,\dots,h_R} \sum_{n_1,\dots,n_{1c}=1}^{Y} e(A_1 Z_1' h_1 + \cdots + A_R Z_R' h_R), \end{cases}$$

wobei wegen (48)

$$(63)\qquad Z_j' = n_1^j + \cdots + n_{2c}^j - n_{2c+1}^j - \cdots - n_{4c}^j \qquad (j = 1, \dots, R).$$

Hier nehmen die Z_j' gewisse Werte l_j an, die den Intervallen

$$(64)\qquad -2c\, Y^j < l_j \leqq 2c\, Y^j \qquad (j = 1, \dots, R)$$

angehören.

Bedeuten $l_1', \dots, l_R'$ irgendwelche feste Zahlen, so betrachte man das Gleichungssystem

$$n_1^j + \cdots + n_c^j - n_{2c+1}^j - \cdots - n_{3c}^j = l_j' \qquad (j = 1, \dots, R).$$

Um die Lösungszahl V' dieses Systems abzuschätzen, wenn jedes n_k das Intervall

$$(65)\qquad 1 \leqq n_k \leqq Y$$

durchläuft, werde Hilfssatz 2 mit

$$c = c, \qquad r = R, \qquad \alpha = 7R, \qquad Z = Y$$

angewendet. Wegen (29) ist dann die Ungleichung (12) erfüllt und wegen (21), (25), (26) ist $Z \geqq 3$, wie es sich gehört. Setzt man daher

$$(66)\qquad R_3 = (c!)^2\, 48^{2c}\, c^R\, R^{\frac{1}{2}R(R-1)}, \qquad R_4 = R_3^{7R},$$

$$(67)\qquad l' = \tfrac{1}{2} R(R+1)\,(1 - R^{-1})^{7R},$$

$$(68)\qquad G = G(Y) = Y^{2c - \frac{1}{2}R(R+1) + l'} \log^{7R} Y,$$

so ist, mit Rücksicht auf (14),

$$(69)\qquad V' \leqq R_4 G.$$

Dies läßt sich auch so ausdrücken: Es seien $l_1, \dots, l_R$ und

$$(70)\qquad n_{c+1}, \dots, n_{2c}, n_{3c+1}, \dots, n_{4c}$$

irgendwelche feste Zahlen; Z_j' durch (63) definiert; V' die Lösungszahl des Gleichungssystems

$$Z_1' = l_1, \ldots, Z_R' = l_R \tag{71}$$

in den Zahlen

$$n_1, \ldots, n_c, n_{2c+1}, \ldots, n_{3c},$$

wenn diese die Intervalle (65) durchlaufen. Dann gilt die Ungleichung (69) mit dem Wert (66).

Läßt man jetzt jede der Zahlen (70) das Intervall (65) durchlaufen, so erhält man Y^{2c} Systeme (70). Sind daher $l_1, \ldots, l_R$ fest gegeben und bezeichnet V'' die Lösungszahl des Systems (71) in $n_1, \ldots, n_{4c}$, wenn diese Zahlen die Intervalle (65) durchlaufen, so ist

$$V'' \leqq R_4 Y^{2c} G. \tag{72}$$

Ist das Gleichungssystem (71) in $n_1, \ldots, n_{4c}$ lösbar, so müssen die l_j, wie schon oben bemerkt wurde, den Intervallen (64) angehören. Läßt man jetzt jedes l_j die $4cY^j$ Zahlen des zugehörigen Intervalls (64) durchlaufen, so folgt aus (62) und (72)

$$|T_q|^{8bc} \leqq X^{4b(2c-1)} Y^{4c(2b-1)} R_2^2 F^2 (2b)^R X^{\frac{1}{2}R(R+1)} R_4 G Y^{2c} C, \tag{73}$$

wobei

$$C = \sum_{h_1, \ldots, h_R} \sum_{l_1, \ldots, l_R} e(A_1 l_1 h_1 + \cdots + A_R l_R h_R). \tag{74}$$

Aus (73), (58) und (68) ergibt sich

$$|T_q|^{8bc} \leqq X^{4b(2c-1)} Y^{4c(2b-1)} R_2^2 X^{4b-R(R+1)+2t} \log^{18R} X \times$$
$$\times (2b)^R X^{\frac{1}{2}R(R+1)} R_4 Y^{4c-\frac{1}{2}R(R+1)+t'} C \log^{7R} Y.$$

Wegen (26) ist also

$$|T_q|^{8bc} \leqq R_2^2 R_4 (2b)^R (XY)^{8bc-\frac{1}{2}R(R+1)} X^{2t} Y^{t'} C \log^{25R} M. \tag{75}$$

Um C abzuschätzen, setze man in (74)

$$C = C_1 + C_2; \tag{76}$$

hierbei bezeichne C_1 denjenigen Teil von (74), worin in der l-Summe die zusätzliche Bedingung gestellt wird: Ist g durch (27) definiert, so mögen unter den Zahlen

$$l_{r+g+1}, \ldots, l_{r+g+2r} \tag{77}$$

mindestens r gleich Null sein; in C_2 mögen dagegen mehr als r Zahlen (77) von Null verschieden sein.

1. ABSCHÄTZUNG VON C_1. Es sei

$$P = \prod_{j=1}^{R} (4c Y^j) = (4c)^R Y^{\frac{1}{2}R(R+1)}. \tag{78}$$

Ferner setze man

$$T' = \sum_{l_1, \ldots, l_R}{}' 1; \tag{79}$$

hierbei möge jedes l_j das zugehörige Intervall (64) durchlaufen, und der Strich am Summenzeichen deute an, daß unter den Zahlen (77) mindestens r gleich Null sein sollen.

Aus (74), (79) und der Definition von C_1 ergibt sich

$$|C_1| \leqq T' \sum_{h_1, \ldots, h_R} 1.$$

Da hierbei jedes h_j die $2bX^j$ Zahlen des zugehörigen Intervalls (53) durchläuft, ist mithin

$$|C_1| \leqq (2b)^R X^{\frac{1}{2}R(R+1)} T'. \tag{80}$$

Durch die der Summe (79) auferlegte Bedingung werden die Zahlen

$$l_1, \ldots, l_{r+g}, l_{3r+g+1}, \ldots, l_R$$

nicht betroffen. Bezeichnet daher P_1 die Anzahl der Systeme (77) mit der angegebenen Beschränkung, so hat man

$$T' = P_1 \prod_{j=1}^{r+g} (4c\,Y^j) \prod_{j=3r+g+1}^{R} (4c\,Y^j). \tag{81}$$

Weiter bezeichne P_2 die Anzahl der Systeme (77), bei denen an r fest gegebenen Stellen Nullen stehen. Da die Länge $4c\,Y^j$ eines Intervalls (64) mit zunehmenden j wächst, so ist

$$P_2 \leqq \prod_{j=r+g+r+1}^{r+g+2r} (4c\,Y^j),$$

$$P_1 \leqq \binom{2r}{r} \prod_{j=2r+g+1}^{3r+g} (4c\,Y^j),$$

und daher nach (81) und (78)

$$T' \leqq \binom{2r}{r} \prod_{j=1}^{r+g} (4c\,Y^j) \prod_{j=2r+g+1}^{R} (4c\,Y^j) = \binom{2r}{r} \prod_{j=1}^{R} (4c\,Y^j) \prod_{j=r+g+1}^{2r+g} (4c\,Y^j)^{-1}$$

$$\leqq (2r)^r P\, Y^{-(r+g+1)r}. \tag{82}$$

Nach (26) und (27) ist

$$Y^{-(r+g+1)r} = \left[M^{\frac{1}{8}}\right]^{-\left(r+\frac{r}{6}+1\right)r} \leqq \left[M^{\frac{1}{8}}\right]^{-\frac{7r^2}{6}}$$

$$\leqq \left(\tfrac{1}{2} M^{\frac{1}{8}}\right)^{-\frac{7r^2}{6}} \leqq 2^{2r^2} M^{-\frac{r^2}{7}}. \tag{83}$$

Aus (80), (82), (78) und (83) ergibt sich

$$|C_1| \leqq (2b)^R X^{\frac{1}{2}R(R+1)} (2r)^r (4c)^R Y^{\frac{1}{2}R(R+1)} 2^{2r^2} M^{-\frac{r^2}{7}}.$$

Setzt man daher

$$R_5 = (8bc)^R (2r)^r 2^{R^2}, \tag{84}$$

so ist

$$|C_1| \leqq R_5 (XY)^{\frac{1}{2}R(R+1)} M^{-\frac{r^2}{7}} \tag{85}$$

2. ABSCHÄTZUNG VON C_2. In C_2 gibt es unter den Zahlen (77) mehr als r von Null verschiedene. Ist l_j eine von ihnen, so gilt nach (27)

$$j \geqq r + g + 1 \geqq \frac{7r}{6}. \tag{86}$$

Ferner ist nach (29)

$$c \leqq 8R^2. \tag{87}$$

Aus (43), (64), (22), (37), (26), (25), (21), (86) und (87) ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 < |A_j l_j| &\leqq t q^{-j-1} 2c Y^j \leqq 16 R^2 M^{r-j-1+\frac{j}{8}} \\ &\leqq M^{r-\frac{7j}{8}} \leqq M^{-\frac{r}{48}} \leqq M^{-2} \leqq \tfrac{1}{2}. \end{aligned} \tag{88}$$

Es werde jetzt

$$W_j = \left| \sum_{h_j} e(A_j l_j h_j) \right| \quad (j = 1, \ldots, R) \tag{89}$$

gesetzt, wobei h_j, wie in (74), das zugehörige Intervall (53) durchläuft. Ist nun wieder l_j eine von Null verschiedene Zahl (77), so ist nach (89) und (88)

$$W_j \leqq |\operatorname{cosec} \pi A_j l_j| \leqq (2 |A_j l_j|)^{-1} \leqq |A_j|^{-1}.$$

Hieraus ergibt sich wegen (43), (21), (26), (22), (37)

$$\begin{aligned} W_j X^{-j} &\leqq |A_j|^{-1} X^{-j} \leqq t^{-1} (q+1)^{j+1} \left(\tfrac{1}{2} M^{\frac{3}{4}}\right)^{-j} \\ &\leqq M^{-\frac{5r}{6}} (2q)^{j+1} 2^j M^{-\frac{3j}{4}} \leqq M^{-\frac{5r}{6}} 2^{2j+2} M^{j+1} 2^j M^{-\frac{3j}{4}} \\ &= 2^{3j+2} M^{\frac{j}{4} - \frac{5r}{6} + 1}. \end{aligned}$$

Nach (77) und (27) ist hier

$$j \leqq 3r + \frac{r}{6} = \frac{19r}{6}.$$

Wegen (21) ist somit

$$W_j X^{-j} \leqq 2^{2R} M^{\frac{19r}{24} - \frac{20r}{24} + \frac{r}{96}} = 2^{2R} M^{-\frac{r}{32}},$$

d. h.

$$\frac{W_j}{2bX^j} \leqq W_j X^{-j} \leqq 2^{2R} M^{-\frac{r}{32}}. \tag{90}$$

Nach Definition ist

$$C_2 = \sum_{l_1, \ldots, l_R}'' \sum_{h_1, \ldots, h_R} e(A_1 l_1 h_1 + \cdots + A_R l_R h_R);$$

dabei durchläuft jedes l_j das zugehörige Intervall (64), jedoch mit der Einschränkung, daß unter den Zahlen (77) mehr als r von Null verschieden sind; jedes h_j durchläuft das zugehörige Intervall (53). Wegen (89) ist daher

$$|C_2| \leqq \sum_{l_1,\ldots,l_R}'' W_1 \ldots W_R. \tag{91}$$

Ein Intervall (53) enthält $2bX^j$ ganze Zahlen. Daher lautet die triviale Abschätzung für die Summe (89)

$$W_j \leqq 2bX^j \qquad (j=1,\ldots,R). \tag{92}$$

Nach Voraussetzung gilt für gewisse r Ausdrücke W_j in (91) die Ungleichung (90); für die übrigen $R-r$ gilt (92). Somit ist

$$|C_2| \leqq 2^{2rR} M^{-\frac{r^2}{32}} \sum_{l_1,\ldots,l_R} 1 \cdot \prod_{j=1}^{R} (2bX^j),$$

wobei jetzt jedes l_j das zugehörige Intervall (64) von $4cY^j$ Zahlen durchläuft. Daher ist

$$|C_2| \leqq 2^{2rR} M^{-\frac{r^2}{32}} (4c)^R Y^{\frac{1}{2}R(R+1)} (2b)^R X^{\frac{1}{2}R(R+1)},$$

d. h.

$$|C_2| \leqq (8bc)^R 2^{R^2} (XY)^{\frac{1}{2}R(R+1)} M^{-\frac{r^2}{32}}. \tag{93}$$

Wegen (76), (85), (84) und (93) ist

$$C \leqq 2R_5 (XY)^{\frac{1}{2}R(R+1)} M^{-\frac{r^2}{32}}.$$

In Verbindung mit (75) ergibt dies

$$|T_q|^{8bc} \leqq 2R_2^2 R_4 R_5 (2b)^R (XY)^{8bc} X^{2t} Y^{tr} M^{-\frac{r^2}{32}} \log^{25} M. \tag{94}$$

Aus (56), (28), (29) und (21) folgt

$$R_1 \leqq b^{2b} b^{2b} b^{2b} b^{2b} = b^{8b}, \qquad R_2 \leqq b^{72bR},$$

$$R_2^{\frac{2}{8bc}} \leqq b^{\frac{18R}{c}} \leqq (10R^2)^{\frac{18R}{7R^2}} = BR^{\frac{6}{R}} = B. \tag{95}$$

Wegen $c \leqq b$ ergibt sich aus (56) und (66), daß $R_4 \leqq R_2$ ist. Wegen (95) ist somit

$$R_4^{\frac{1}{8bc}} = B.$$

Weiter folgt aus (84), daß auch

$$\{2R_5(2b)^R\}^{\frac{1}{8bc}} = B.$$

Wegen (94) ist somit

$$T_q = BXY\left(X^{2t} Y^{tr} M^{-\frac{r^2}{32}} \log^{25} M\right)^{\frac{1}{8bc}}. \tag{96}$$

Weiter ist

$$(1-R^{-1})^{9R} = \exp\{9R\log(1-R^{-1})\} \leqq e^{-9},$$

$$(1-R^{-1})^{7R} \leqq e^{-7}.$$

Wegen (57), (67), (26) und (21) ist daher

$$R(R+1) \leqq R\left(R+\frac{R}{8\cdot 96}\right) = \frac{769\cdot 64}{8\cdot 96}r^2 \leqq 65r^2, \tag{97}$$

$$2t \leqq R(R+1)e^{-9} \leqq 65e^{-9}r^2,$$

$$t' \leqq \tfrac{1}{2}R(R+1)e^{-7} \leqq 33e^{-7}r^2,$$

$$X^{2t}Y^{t'} \leqq M^{\sigma};\quad \sigma = \left(\frac{3}{4}\cdot 65e^{-9} + \frac{1}{8}\cdot 33e^{-7}\right)r^2 \leqq \frac{r^2}{100},$$

$$\log^{25R} M = \log^{200r} M = BM^{r^2(\frac{1}{96}-\frac{1}{100})},$$

$$X^{2t}Y^{t'}M^{-\frac{r^2}{32}}\log^{25R} M = BM^{-\frac{r^2}{48}}.$$

Ferner ist nach (28), (29) und (97)

$$b \leqq (9\cdot 64+17)r^2 = 593r^2,$$

$$c \leqq (7\cdot 64+17)r^2 = 465r^2,$$

$$48\cdot 8bc \leqq 48\cdot 8\cdot 593\cdot 465r^4 \leqq 106\cdot 10^6 r^4.$$

Wegen (96) ist daher

$$T_q = BXYM^{-(106\cdot 10^6 r^4)^{-1}},$$

und somit nach (46)

$$S_q = BXYM^{-(106\cdot 10^6 r^4)^{-1}}.$$

In Verbindung mit (32) und (21) ergibt dies die Behauptung (24) des Hilfssatzes.

§ 3. Beweis der Abschätzung (11)

In diesem Paragraphen sei N eine natürliche Zahl, die später in Abhängigkeit von der quadratischen Form Q der Determinante D gebracht wird. Die B-Schranken dürfen von Q, insbesondere von N abhängen. x liege oberhalb solcher Schranken; a und b seien natürliche Zahlen $\leqq N$. In Summen, die nach m laufen, soll Σ' andeuten, daß m neben anderen Bedingungen die Kongruenz $m \equiv a \pmod N$ zu erfüllen hat. $\psi(y)$ sei die Funktion

$$\psi(y) = y - [y] - \tfrac{1}{2}. \tag{98}$$

Es soll gezeigt werden, daß aus Hilfssatz 3 die Abschätzung (11) folgt. Aus der Richtigkeit von (11) für Formen Q mit ganzzahligen Koeffizienten folgt diese Abschätzung, durch einen trivialen Übergang, auch für Formen mit rationalen Koeffizienten. Daher sollen die Koeffizienten von Q, mit Rücksicht auf die aus [8] heranzuholenden Resultate, als ganzzahlig vorausgesetzt werden. Dem Beweise von (11) sollen zwei Hilfssätze vorausgeschickt werden.

HILFSSATZ 4. *Es sei*

$$96 \leqq r \leqq 10^{-3} \log^{\frac{1}{4}} x, \qquad \varrho = 10^{-8} r^{-3}, \tag{99}$$

$$T_r = \sum_{N x^{\frac{7}{6r}} < m \leqq N x^{\frac{7}{6(r-1)}}}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{n}\right). \tag{100}$$

Dann ist

$$T_r = B r^{-5} x^{-\varrho} \log^2 x. \tag{101}$$

BEWEIS. Wegen

$$T_r = B \sum_{m \leqq N x^{\frac{7}{6(r-1)}}} \frac{1}{m} = B \frac{\log x}{r}$$

ist $T_r = B$ für $x < (3N)^{50r}$. Mithin sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$x \geqq (3N)^{50r}. \tag{102}$$

Für $Y \geqq 3$ ergibt nach (98) eine Fourier-Entwicklung

$$Y \int_0^{\pm 1/Y} \psi(y+v)\, dv = \sum_{c=-\infty}^{\infty} w_c\, e(c\,y), \tag{103}$$

wo

$$w_0 = 0, \quad w_c = -\frac{Y}{2\pi i c} \int_0^{\pm 1/Y} e(c\,v)\, dv \qquad (c \neq 0),$$

also

$$w_0 = 0; \quad |w_c| \leqq \operatorname{Min}\left(\frac{1}{|c|}, \frac{Y}{c^2}\right) \quad (c \neq 0). \tag{104}$$

Es sei

$$x^{\frac{7}{6r}} < M \leqq M' \leqq 2M \leqq 2x^{\frac{7}{6(r-1)}}, \tag{105}$$

$$z = \frac{NM'}{x}. \tag{106}$$

Aus (103) und (104) folgt

$$Y \left| \sum_{m=NM}^{NM'}{}' \int_0^{\pm 1/Y} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N} + v\right) dv \right| \leqq 2 \sum_{c=1}^{\infty} \left| \sum_{m=NM}^{NM'}{}' e\left(\frac{cx}{m}\right) \right| \operatorname{Min}\left(\frac{1}{c}, \frac{Y}{c^2}\right) \tag{107}$$

$$= 2 \sum_{c \leqq z} + 2 \sum_{c > z} = 2 S_1 + 2 S_2, \tag{108}$$

zur Abkürzung. In S_1 nehme man

$$\frac{cx}{N} = t. \tag{109}$$

Dann ist mit $s=\frac{a}{N}$ (also $0<s\leqq 1$)

$$(110)\qquad \sum_{m=NM}^{NM'}{}' e\left(\frac{cx}{m}\right) = \left|\sum_{\substack{m=NM \\ m\equiv a \pmod N}}^{NM'} e\left(\frac{cx}{m}\right)\right| \leqq \left|\sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{cx}{Nm+a}\right)\right| + 2,$$

d. h.

$$(111)\qquad \sum_{m=NM}^{NM'}{}' e\left(\frac{cx}{m}\right) \leqq \left|\sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{t}{m+s}\right)\right| + 2.$$

Weiter ist in S_1 nach (106), (108) und (109)

$$(112)\qquad M' = \frac{zx}{N} \geqq \frac{cx}{N} = t.$$

Nach (99) ist $r\geqq 96$, also

$$(113)\qquad \left(1-\frac{1}{50r}\right)\frac{6}{5r} \geqq \frac{7}{6(r-1)}.$$

Nach (109), (108), (102) und (113) ist in S_1

$$t^{\frac{6}{5r}} = \left(\frac{cx}{N}\right)^{\frac{6}{5r}} \geqq \left(\frac{x}{N}\right)^{\frac{6}{5r}} \geqq x^{\left(1-\frac{1}{50r}\right)\frac{6}{5r}} \geqq x^{\frac{7}{6(r-1)}},$$

also nach (105)

$$(114)\qquad t^{\frac{6}{5r}} \geqq M.$$

Wegen (99), (112), (114) und (105) sind die Voraussetzungen (21) und (22) von Hilfssatz 3 erfüllt. Für die rechts in (111) stehende Summe (23) gilt daher die Abschätzung (24) mit dem t aus (109), dem ϑ aus (21) und $s=\frac{a}{N}$. Es ist somit

$$\sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{cx}{Nm+a}\right) = BM^{1-\vartheta},$$

d. h. nach (110) in S_1

$$\sum_{m=NM}^{NM'}{}' e\left(\frac{cx}{m}\right) = BM^{1-\vartheta}.$$

Ferner ist

$$\sum_{c\leqq z} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{c}, \frac{Y}{c^2}\right) = B\sum_{c\leqq Y}\frac{1}{c} + BY\sum_{c>Y}\frac{1}{c^2} = B\log Y.$$

Wegen (108) ist daher

$$(115)\qquad S_1 = BM^{1-\vartheta}\log Y.$$

In S_2 benutze ich für die m-Summe die triviale Abschätzung BM und erhalte wegen (107), (108) und (106)

$$(116)\qquad S_2 = BMY\sum_{c>z}\frac{1}{c^2} = B\frac{MY}{z} = BM^{1-r}Yx.$$

Aus (107), (108), (115) und (116) folgt wegen $Y \geqq 3$

$$Y \sum_{m=NM}^{NM'}{}' \int_0^{\pm 1/Y} \psi\Big(\frac{x}{m} - \frac{b}{N} + v\Big)\, dv = B(M^{1-\vartheta} + M^{1-\tau} Y x) \log Y.$$

Da für jedes Zahlenpaar y_1 und $y_2 > y_1$ wegen (98) die Ungleichung

$$\psi(y_2) - \psi(y_1) \leqq y_2 - y_1$$

besteht, ist

$$-\frac{M'-M+1}{2Y} + Y \sum_{m=NM}^{NM'}{}' \int_0^{1/Y} \psi\Big(\frac{x}{m} - \frac{b}{N} + v\Big)\, dv \leqq \sum_{m=NM}^{NM'}{}' \psi\Big(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\Big)$$

$$\leqq \frac{M'-M+1}{2Y} + Y \sum_{m=NM}^{NM'}{}' \int_{-1/Y}^{0} \psi\Big(\frac{x}{m} - \frac{b}{N} + v\Big)\, dv.$$

Wegen $0 < M' - M + 1 \leqq 2M$ ist somit

$$\sum_{m=NM}^{NM'}{}' \psi\Big(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\Big) = B(M^{1-\vartheta} + M^{1-\tau} Y x + M Y^{-1}) \log Y.$$

Durch partielle Summation folgt hieraus

$$\sum_{m=NM}^{NM'}{}' \frac{1}{m} \psi\Big(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\Big) = B(M^{-\vartheta} + M^{-\tau} Y x + Y^{-1}) \log Y. \tag{117}$$

Hierin darf wegen (99)

$$Y = x^{\tau^{-1}} \tag{118}$$

angenommen werden, weil dann $Y \geqq 3$ ist. Aus (118), (99) und (21) ergibt sich

$$\log Y = \tau^{-1} \log x, \qquad M^{-\vartheta} = B x^{-\frac{7\vartheta}{6\tau}} = B x^{-\varrho},$$

$$M^{-\tau} Y x = B x^{-\frac{7}{6} + \frac{1}{\tau} + 1} = B x^{-\frac{1}{2}} = B x^{-\varrho},$$

$$Y^{-1} = B x^{-\tau^{-1}} = B x^{-\varrho}.$$

Wegen (117) ist somit

$$\sum_{m=NM}^{NM'}{}' \frac{1}{m} \psi\Big(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\Big) = B \tau^{-1} x^{-\varrho} \log x. \tag{119}$$

Das Summationsintervall von (100) zerfällt in $B\tau^{-2} \log x$ Teilintervalle der Gestalt $NM \leqq m \leqq NM'$ und B lose Glieder, wobei M und M' den Bedingungen (105) genügen. Nach (100), (99) und (119) ist also

$$T_\tau = B \tau^{-2} \log x \cdot \tau^{-1} x^{-\varrho} \log x,$$

d. h. (101) erfüllt.

Hilfssatz 5. *Für*

$$T = \sum_{m \leqq Nx}{}' \frac{1}{m} \psi\Big(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\Big) \tag{120}$$

ist

$$T = B \log^{\frac{3}{4}} x. \tag{121}$$

BEWEIS. Es sei

$$r_0 = [10^{-3} \log^{\frac{1}{4}} x], \qquad r_1 = 7[\tfrac{1}{12} \log\log x] + 8, \tag{122}$$

$$X = 12[\tfrac{1}{12} \log\log x] + 8. \tag{123}$$

Dabei werde von vornherein x so groß angenommen, daß $r_0 > r_1 \geqq 96$ ist. Ferner werde

$$T = S_3 + S_4 + S_5 \tag{124}$$

gesetzt, wobei

$$S_3 = \sum_{m \leqq N x^{\frac{2}{X+4}}}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right), \tag{125}$$

$$S_4 = \sum_{N x^{\frac{2}{X+4}} < m \leqq N x^{\frac{1}{2}}}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right), \tag{126}$$

$$S_5 = \sum_{N x^{\frac{3}{4}} < m \leqq N x}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right). \tag{127}$$

Nach (122) und (123) ist

$$\frac{2}{X+4} = \frac{7}{6(r_1 - 1)}.$$

Wegen (125) und (100) ist somit

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{m \leqq N x^{\frac{7}{6(r_1-1)}}}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right) \\ &= \sum_{m \leqq N x^{\frac{7}{6r_0}}}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right) + \sum_{r=r_1}^{r_0} T_r. \end{aligned} \tag{128}$$

Wegen (122) ist offenbar

$$\sum_{m \leqq N x^{\frac{7}{6r_0}}}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right) = B \sum_{m \leqq N x^{\frac{7}{6r_0}}} \frac{1}{m} = B \frac{\log x}{r_0} = B \log^{\frac{3}{4}} x. \tag{129}$$

Für die Summe (100) gilt die Abschätzung (101). Daher ist wegen (99)

$$T_r = B r^{-5} \exp(-10^{-8} r^{-3} \log x) \log^2 x \qquad (r_1 \leqq r \leqq r_0).$$

Die hier stehende Funktion von r nimmt mit wachsendem r zu. Setzt man nämlich

$$f(y) = y^{-5} \exp(-10^{-8} y^{-3} \log x) \qquad (r_1 \leqq y \leqq r_0),$$

so ist

$$f'(y) = y^{-1} f(y)\,(3 \cdot 10^{-8}\, y^{-3} \log x - 5) > 0,$$

da nach (122)

$$3 \cdot 10^{-8}\, y^{-3} \log x \geqq 3 \cdot 10^{-8}\, r_0^{-3} \log x \geqq 3 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{9} = 30.$$

Man hat daher

$$\sum_{r=r_1}^{r_0} T_r = B\, r_0 \cdot r_0^{-5} \exp\,(-10^{-8}\, r_0^{-3} \log x) \log^2 x$$

$$= B \log^{-\frac{1}{2}} x \exp\,(-10^{-8+9}) \log^2 x = B \log^{\frac{3}{2}} x. \tag{130}$$

Aus (128)—(130) folgt

$$S_3 = B \log^{\frac{3}{2}} x. \tag{131}$$

Nun soll die Summe (126) abgeschätzt werden. Sie wird folgendermaßen in Teilsummen zerlegt:

$$S_4 = \sum_{r=1}^{X} U_r,$$

$$U_r = \sum_{N x^{\frac{2}{r+4}} < m \leqq N x^{\frac{2}{r+3}}}{}' \frac{1}{m}\, \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right). \tag{132}$$

Auf die Summe (132) wende ich den mit der Weylschen Methode bewiesenen Hilfssatz 7 von [8] an, wonach für $r \geqq 1$ und $R = 2^{r-1}$

$$U_r = B\, x^{-\frac{1}{20 R r}} \log^3 x$$

ist. Für $r \leqq X$ ist hierin wegen (123)

$$x^{-\frac{1}{20 R r}} = \exp\left(-\frac{\log x}{20 R r}\right) \leqq \exp\left(-\frac{\log x}{20 \cdot 2^{X-1} X}\right)$$

$$\leqq \exp\left(-\frac{\log x}{10 \cdot 2^{\log\log x + 3} \cdot 2 \log\log x}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{(\log x)^{1-\log 2}}{5120 \log\log x}\right)$$

$$= \frac{B}{\log^3 x \log\log x} = \frac{B}{X \log^3 x}.$$

Somit ist $U_r = B X^{-1}$,

$$S_4 = B. \tag{133}$$

Die Summe (127) ist ebenfalls in [8] abgeschätzt, und zwar ist nach dem dortigen Hilfssatz 4

$$S_5 = B. \tag{134}$$

Aus (124), (131), (133) und (134) ergibt sich die Behauptung (121) von Hilfssatz 5.

BEWEIS DER ABSCHÄTZUNG (11). Man führe die Teilerfunktion

$$S(x; a, b, N) = \sum_{\substack{m n \leq x \\ m \equiv a,\, n \equiv b \,(\mathrm{mod}\, N)}} n$$

ein; T bedeute die Summe (120). Nach den Formeln (9), (10), (14) und (33) von [8] ist dann, mit gewissen reellen Konstanten $f(a, b)$ und einem gewissen $N = N(Q)$,

$$A_Q(x) = \sum_{a,b=1}^{N} f(a, b)\, S(N x; a, b, N) + B x,$$

$$S(N x; a, b, N) = \tfrac{1}{2} N x^2 \sum_{m=1}^{\infty}{}' m^{-2} - N x T + B x,$$

also

$$P_Q(x) = -N x \sum_{a,b=1}^{N} f(a, b)\, T + B x.$$

Wegen (121) folgt hieraus die zu beweisende Abschätzung (11).

Literatur

[1] HUA, L. K.: Additive Primzahlentheorie. [Russisch.] Akad. Nauk SSSR., Trudy mat. Inst. Steklov **22**, 1–179 (1947). — [2] HUA, L. K.: An improvement of Vinogradov's mean-value theorem and several applications. Quart. J. Math., Oxford series **20**, 48–61 (1949). — [3] HUA, L. K.: Additive Primzahltheorie (in chinesischer Sprache). Peking 1957. II. chinesische Auflage des Buches [1]. — [4] HUA, L. K., and WU FONG: An improvement of Winogradoff's mean value theorem and some applications. Acta Mathematica Sinica **7**, 573–588 (1957). Chinesisch mit englischer Zusammenfassung. — [5] KOROBOFF, N. M.: Abschätzungen trigonometrischer Summen und ihre Anwendungen. [Russisch.] Uspechi mat. Nauk **13**, 185–192 (1958). — [6] PRACHAR, K.: Primzahlverteilung. Berlin 1957. — [7] TITCHMARSH, E. C.: The theory of the Riemann Zeta-Function. Oxford 1951. — [8] WALFISZ, A.: Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Vierte Abhandlung. Math. Z. **35**, 212–229 (1932). — [9] WALFISZ, A.: Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Achte Abhandlung. Trudy Tbilisskogo mat. Inst. **5**, 181–196 (1938). — [10] WALFISZ, A.: Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln. Warszawa 1957. — [11] WALFISZ, A.: Über die Wirksamkeit einiger Abschätzungen trigonometrischer Summen. Acta Arithmetica **4**, 108–180 (1958). — [12] WINOGRADOFF, I. M.: Eine neue Abschätzung der Funktion $\zeta(1 + i t)$. [Russisch.] Izvestija Akad. Nauk SSSR., Ser. mat. **22**, 161–164 (1958). — [13] WINOGRADOFF, I. M.: Über ein mehrfaches Integral. [Russisch.] Izvestija Akad. Nauk SSSR., Ser. mat. **22**, 577–584 (1958).

Tiflis (UdSSR), Mathematisches Institut

(Eingegangen am 20. Februar 1959)

SCHMEIDLER, W.
Math. Zeitschr. 72, 279–293 (1960)

Die Navier-Stokesschen Gleichungen der Hydrodynamik als System quadratischer Integralgleichungen

LEON LICHTENSTEIN zum Gedächtnis

Von
WERNER SCHMEIDLER

Einleitung

Es ist bisweilen von Nutzen, den erreichten Stand der Analysis an einem konkreten Problem zu prüfen. So soll im folgenden versucht werden, ein altbekanntes und bisher nur in Spezialfällen gelöstes Problem, nämlich die Berechnung von Geschwindigkeits- und Druckfeld in einer zähen Flüssigkeit im Außenraum eines bewegten Körpers, in einem allgemeineren Sinne als bisher der Lösung näherzubringen. Als Haupthilfsmittel wird dabei der Übergang vom Differentialgleichungs- zum Integralgleichungssystem verwendet, ein Verfahren, das im linearen Gebiete längst bekannt und vielseitig geübt, im nichtlineare Falle jedoch erst in den letzten Jahrzehnten in seiner Bedeutung erkannt wurde. Einer der verdientesten Forscher auf diesem Gebiete war LEON LICHTENSTEIN, der gerade auch in dem hier zu betrachtenden Anwendungsgebiete mit dieser Methode die ersten Schritte getan hat, um zu Existenz- und Eindeutigkeitssätzen zu gelangen[1]). Er benutzte die klassische Theorie der Greenschen Funktionen für den Differentialoperator ΔU, um den Einfluß der Zähigkeit zu berücksichtigen. Aber hiermit erfaßt man noch nicht die zeitliche Veränderlichkeit der Strömung, die erst dann richtig zur Geltung kommt, wenn man an Stelle von ΔU den Differentialoperator $\left(\nu \Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right) U$ und die auf ihn bezüglichen Greenschen Funktionen heranzieht. Dieser Weg wird im folgenden eingeschlagen.

In § 1 wird zunächst einiges über diese Greenschen Funktionen zusammengestellt, wobei die Analogie zur Potentialtheorie möglichst weit vorangetrieben wird. Es folgt eine gewisse Erweiterung dieses Begriffes, die dem hier im Vordergrunde stehenden Problem der geradlinigen Parallelbewegung eines Körpers in einer zähen Flüssigkeit mit beliebig vorgegebenem Geschwindigkeitsgesetz entspricht. Insbesondere handelt es sich um die geradlinige Parallelbewegung einer *Kugel*, für die, ohne auf naheliegende Verallgemeinerungen einzugehen, der Weg zur Berechnung der Greenschen Funktion angegeben wird und einige für das Folgende wichtige Eigenschaften dieser Funktion

[1]) Vgl. insbesondere sein Werk „Grundlagen der Hydromechanik" Berlin 1929 und die dort zitierte Literatur.

abgeleitet werden, die von so allgemeiner Natur sind, daß ihre Gültigkeit für eine ganze Klasse von Körpern angenommen werden darf. Mit diesen Hilfsmitteln wird dann in § 2 das Integralgleichungssystem aufgestellt sowie Existenz und Eindeutigkeit der Lösung nachgewiesen, wobei die Randwerte des Druckes noch vorgegeben werden können.

§ 1. Greensche Funktionen für den Differentialoperator $\nu \Delta - \frac{\partial}{\partial t}$

Wir fassen einen festen Raumbereich $\mathfrak{B}$ mit der Oberfläche Fl als Definitionsgebiet für die Greensche Funktion $\Gamma(P, Q, t-t')$ ins Auge. Diese soll außer für $P=Q$ in $\mathfrak{B}$ der Differentialgleichung $\left(\nu \Delta_Q - \frac{\partial}{\partial t}\right) \Gamma = 0 \quad (\nu > 0)$ genügen. In bezug auf ein im Raume festliegendes Koordinatensystem seien $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{f}$ die den Punkten P und Q entsprechenden Vektoren, und es sei

$$(1) \qquad \Gamma(P, Q, t-t') = \frac{e^{-\frac{|\mathfrak{r}-\mathfrak{f}|^2}{4\nu(t-t')}}}{(4\pi\nu(t-t'))^{\frac{3}{2}}} + \gamma(P, Q, t-t')$$

($0 \leqq t' < t$, $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(x, y, z)$, $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(\xi, \eta, \zeta)$, γ zweimal stetig differentiierbar in $\mathfrak{B}$). Da die Differentialgleichung auch für das Anfangsglied außer für $Q=P$ gilt, wie man sich leicht überzeugt, ist

$$(2) \qquad \nu \Delta_Q \gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{\partial \gamma}{\partial t'}$$

im *ganzen* Bereich $\mathfrak{B}$. Ferner gelte bei Annäherung von Q an den Rand Fl:

$$\Gamma(P, Q, t-t') \to 0 \qquad (P, t, t' < t \text{ beliebig})$$

$$\gamma(P, Q, t-t') \to -\frac{e^{-\frac{|\mathfrak{r}-\mathfrak{q}|^2}{4\nu(t-t')}}}{(4\pi\nu(t-t'))^{\frac{3}{2}}} \qquad (\mathfrak{f} \to \mathfrak{q} \text{ Randpunkt}),$$

und für $t \to t'$ gelte $\Gamma(P, Q, t-t') \to 0$ (P, Q beliebig). Dann ergibt sich für eine beliebige zweimal stetig differentiierbare Funktion $U(P, t)$ die Darstellung[2])

$$(3) \quad \begin{cases} U(P,t) = \nu \int\limits_0^t \iint\limits_{(Fl)} U(Q,t') \frac{\partial \Gamma}{\partial n_Q}(P, Q, t-t')\, do_Q\, dt' & (n_Q \text{ innere Normale}) \\ \quad - \int\limits_0^t \iiint\limits_{(\mathfrak{B})} \Gamma(P, Q, t-t') \left(\nu \Delta_Q - \frac{\partial}{\partial t'}\right) U(Q,t')\, d\tau_Q\, dt' + \\ \quad + \iiint\limits_{(\mathfrak{B})} \Gamma(P, Q, t)\, U(Q, o)\, d\tau_Q. \end{cases}$$

[2]) Man vgl. etwa I. N. SNEDDON: Elements of partial differential equations. London 1957.

Hierin bedeuten im Oberflächenintegral $U(Q,t')$ die inneren Randwerte dieser Funktion. Durch diese sowie durch die Werte von $\left(\nu \Delta_Q - \frac{\partial}{\partial t'}\right) U(Q,t')$ und durch die Anfangswerte $U(Q,o)$ ist somit die Funktion $U(P,t)$ bestimmt, und zwar eindeutig, falls die Existenz und eindeutige Bestimmtheit der Greenschen Funktion Γ für den Bereich $\mathfrak{B}$ feststeht. Dem Zweck dieser Mitteilung entsprechend wollen wir uns im folgenden an ein konkretes Beispiel halten, nämlich an die *Kugel*, und zwar wollen wir den Außenraum der Kugel als Bereich ins Auge fassen. Dann ist natürlich zu verlangen, daß $\Gamma(P,Q,t-t')$ und ebenso $\gamma(P,Q,t-t')$ im Unendlichen stark genug verschwinden, und zur Anwendung der Formel (3) ist die Konvergenz der auftretenden Integrale Vorbedingung.

Um nun zu einer Bestimmung von Γ bzw. γ zu gelangen, beachten wir folgendes: Weil die Randwerte von γ bekannt sind, die Differentialgleichung (2) erfüllt sein soll und die Anfangswerte verschwinden, ergibt sich die Integralgleichung[3]):

$$(4)\quad \begin{cases} \gamma(R,P,t) = \gamma(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t) \\ \qquad = -\nu \int\limits_0^t \iint\limits_{(F\Gamma)} \dfrac{e^{-\frac{|\mathfrak{r}-\mathfrak{q}'|^2}{4\nu t'}}}{(4\pi\nu t')^{\frac{3}{2}}} \dfrac{\partial}{\partial q'} \left[\dfrac{e^{-\frac{|\mathfrak{f}-\mathfrak{q}'|^2}{4\nu(t-t')}}}{(4\pi\nu(t-t'))^{\frac{3}{2}}} + \gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t') \right] do'_Q\, dt' \end{cases}$$

$$(R|\mathfrak{r},\ P|\mathfrak{f},\ Q|\mathfrak{q}';\ q' = |\mathfrak{q}'|;\ \text{später } r = |\mathfrak{r}|,\ s = |\mathfrak{f}|),$$

die zur Berechnung der unbekannten Funktion $\gamma(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)$ herangezogen werden soll. Wir können sie in der Form schreiben:

$$(4)\qquad \gamma(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t) = f(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t) - \nu \int\limits_0^t \iint\limits_{(F\Gamma)} K(\mathfrak{r},\mathfrak{q}',t') \frac{\partial \gamma}{\partial q'}(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\, do'_Q\, dt',$$

wobei

$$(5)\qquad f(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t) = -\nu \int\limits_0^t \iint\limits_{(F\Gamma)} K(\mathfrak{r},\mathfrak{q}',t') \frac{\partial K}{\partial q'}(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\, do'\, dt'$$

und

$$K(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t) = \frac{e^{-\frac{|\mathfrak{r}-\mathfrak{f}|^2}{4\nu t}}}{(4\pi\nu t)^{\frac{3}{2}}}$$

[3]) Wir denken uns die Kugel vorläufig festgehalten (Mittelpunkt Koordinatenanfangspunkt); erst später wird die Bewegung mitberücksichtigt. Die Greensche Funktion Γ bedeutet dann physikalisch die Temperatur im Punkte Q zur Zeit t, die in einem wärmeleitenden Körper hervorgerufen wird durch einen Wärmestoß der Stärke 1 im Punkte P zur Zeit $t' < t$, wenn für $t = t'$ im ganzen Bereich die Temperatur 0 herrscht und diese auch am Rande, d. h. an der Oberfläche der Kugel und im Unendlichen, dauernd aufrechterhalten wird. Versteht man unter Temperatur die absolute Temperatur, so ist $\Gamma \geqq 0$ physikalisch evident. – Auch für gewöhnliche Greensche Funktionen gibt es bekanntlich eine ähnliche Deutung durch einen *stationären* Wärmevorgang; hier handelt es sich aber gerade um die Zeitabhängigkeit

bedeutet. Wenn wir noch in dem Zeitintegral $t-t'=\tau$ setzen, so entsteht

$$(6) \qquad \gamma(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)=f(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)-\nu\int_0^t\iint_{(F\Gamma)}K(\mathfrak{r},\mathfrak{q}',t-\tau)\,\frac{\partial\gamma}{\partial q'}\,(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',\tau)\,do'\,d\tau$$

als Bestimmungsgleichung für γ. Differentiation nach r und s, die unter dem Integralzeichen zulässig ist, liefert alsdann

$$(7) \qquad \frac{\partial^2\gamma}{\partial r\,\partial s}\,(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)=\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial s}\,(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)-\nu\int_0^t\iint_{(F\Gamma)}\frac{\partial K}{\partial r}\,(\mathfrak{r},\mathfrak{q}',t-t')\,\frac{\partial^2\gamma}{\partial r\,\partial s}\,(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t')\,do'\,dt',$$

wobei die Bezeichnung so gemeint ist, daß links wie rechts nach den Beträgen der ersten beiden Variablen differentiiert und dann unter dem Integralzeichen bei $\frac{\partial^2\gamma}{\partial r\,\partial s}$ für die erste Variable $\mathfrak{f}$, für die zweite $\mathfrak{q}'$ einzusetzen ist.

Wir haben in Formel (7) eine Volterrasche Integralgleichung zweiter Art vor uns, die einfach durch Iteration gelöst werden kann. Da die Kerne K und $\frac{\partial K}{\partial r}$ im Bereich $0\leqq t'\leqq t$, $r\geqq a+\delta$ stetig sind[4]), wird die entstehende Neumannsche Reihe

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\gamma}{\partial r\,\partial s}\,(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)=\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial s}\,(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)&-\nu\int_0^t\iint_{(F\Gamma)}\frac{\partial K}{\partial r}\,(\mathfrak{r},\mathfrak{q}',t-t')\,\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial s}\,(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t')\,do'\,dt'+\\&+\nu^2\int_0^t\iint_{(F\Gamma)}\frac{\partial K}{\partial r}\,(\mathfrak{r},\mathfrak{q}',t-t')\int_0^{t'}\iint_{(F\Gamma')}\frac{\partial K}{\partial r}\,(\mathfrak{f},\mathfrak{q}'',t'-t'')\times\\&\times\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial s}\,(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}'',t'')\,do'\,do''\,dt'\,dt''-+\cdots\end{aligned}$$

in dem Bereich $0\leqq t\leqq T$ für jedes T und für r, $s\geqq a+\delta$ gleichmäßig konvergent und die Lösung $\frac{\partial^2\gamma}{\partial r\,\partial s}=g(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)$ stetig. Differentiiert man (6) nach s, so entsteht

$$\frac{\partial\gamma}{\partial s}\,(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)=\frac{\partial f}{\partial s}\,(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)-\nu\int_0^t\iint_{(F\Gamma)}K(\mathfrak{r},\mathfrak{q}',t-t')\,\frac{\partial^2\gamma}{\partial r\,\partial s}\,(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t')\,do'\,dt'.$$

Trägt man nun rechts die Lösung $g(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t')$ ein, so ist $\frac{\partial\gamma}{\partial s}(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)$ damit bestimmt. Einführung dieser Funktion auf der rechten Seite von (6) liefert dann die gesuchte Funktion $\gamma(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t)$ selbst. Die dabei erforderlichen Grenzübergänge sind ohne Schwierigkeiten durchführbar.

Wir haben uns nun davon zu überzeugen, daß die hiermit bestimmte Funktion den Bedingungen für die Greensche Funktion des Außenraumes der Kugel entspricht, vor allem also der Differentialgleichung $\nu\Delta_Q\gamma=\frac{\partial\gamma}{\partial t}$ genügt, wobei die Differentiation Δ bezüglich der Variablen $\mathfrak{f}$ zu verstehen ist, also

[4]) Funktionswert für $t'=t$ gleich Null gesetzt für $\mathfrak{r}-\mathfrak{f}\neq 0$.

mit Δ_1 bezeichnet werden soll. Zunächst gilt wegen (5):

$$\left(\nu\Delta_1-\frac{\partial}{\partial t}\right)f(\tau,\xi,t)=-\nu\int_0^t\iint_{(F\tau)}K(\tau,\mathfrak{q}',t')\,\frac{\partial}{\partial q'}\left[\left(\nu\Delta_1-\frac{\partial}{\partial t}\right)K(\xi,\mathfrak{q}',t-t')\right]do'\,dt'$$

und hierin ist die eckige Klammer Null für *alle* Vektoren $\mathfrak{q}'\neq\xi$, also

$$\left(\nu\Delta_1-\frac{\partial}{\partial t}\right)f(\tau;\xi,t)=0.$$

Setzt man nun

$$\left(\nu\Delta_1-\frac{\partial}{\partial t}\right)\gamma(\tau,\xi,t)=F(\tau,\xi,t),$$

so wird nach (4) bzw. (6)

$$F(\tau,\xi,t)=-\nu\int_0^t\iint_{(F\tau)}K(\tau,\mathfrak{q}',t-\tau)\,\frac{\partial F}{\partial q'}(\xi,\mathfrak{q}',\tau)\,do'\,d\tau.$$

Aus dieser Integralgleichung folgt dann auf demselben Wege wie oben erst $\frac{\partial^2F}{\partial\tau\,\partial s}=0$, darauf $\frac{\partial F}{\partial s}=0$ und schließlich $F(\tau,\xi,t)=0$ womit die erste Behauptung bewiesen ist.

Zur Bestimmung der Randwerte unserer der Integralgleichung (6) genügenden Funktion $\gamma(\tau,\xi,t)$ können wir aussagen, daß analog zu unserer Ausgangsgleichung (4) mit Hilfe der Randwerte $\gamma(\tau,\mathfrak{q}',t')$ auch die Darstellung gilt:

$$\gamma(\tau,\xi,t)=\nu\int_0^t\iint_{(F\tau)}\gamma(\tau,\mathfrak{q}',t')\,\frac{\partial}{\partial q'}\left[\gamma(\xi,\mathfrak{q}',t-t')+K(\xi,\mathfrak{q}',t-t')\right]do'\,dt'.$$

und daraus folgt

$$0=\int_0^t\iint_{(F\tau)}\left[\gamma(\tau,\mathfrak{q}',t')+K(\tau,\mathfrak{q}',t')\right]\frac{\partial}{\partial q'}\left[\gamma(\xi,\mathfrak{q}',t-t')+K(\xi,\mathfrak{q}',t-t')\right]do'\,dt'.$$

Setzen wir nun

$$\gamma(\tau,\xi,t)+K(\tau,\xi,t)=\Gamma(\tau,\xi,t),$$

so besagt dies

$$\int_0^t\iint_{(F\tau)}\Gamma(\tau,\mathfrak{q}',t')\,\frac{\partial\Gamma}{\partial q'}(\xi,\mathfrak{q}',t-t')\,do'\,dt'=0.$$

Unser Ziel ist, hieraus die Folgerung $\Gamma(\tau,\mathfrak{q},t)=0$ ($\mathfrak{q}$ auf Fl) zu ziehen. Wir wenden zu diesem Zwecke den Gaußschen Satz

$$\iint\varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial n}\,do=-\iiint(\varphi\,\Delta\psi+\operatorname{grad}\varphi\operatorname{grad}\psi)\,d\tau$$

auf den Außenraum $\mathfrak{A}_\delta$ je einer kleinen Kugel vom Radius δ um τ und um ξ sowie unserer gegebenen Kugel an und erhalten, da die Oberflächenintegrale über die kleinen Kugeln mit $\delta\to0$ gegen Null gehen:

$$\lim_{\delta\to0}\int_0^t\iiint_{\mathfrak{A}_\delta}\left[\Gamma(\tau,\mathfrak{q}',t')\,\Delta_{\mathfrak{q}'}\,\Gamma(\xi,\mathfrak{q}',t-t')+\operatorname{grad}_{\mathfrak{q}'}\Gamma(\tau,\mathfrak{q}',t')\times\right.$$
$$\left.\times\operatorname{grad}_{\mathfrak{q}'}\Gamma(\xi,\mathfrak{q}',t-t')\right]d\tau_{\mathfrak{q}'}\,dt'=0.$$

Da in $\mathfrak{A}_\delta$ für Γ, wie wir bewiesen haben, die Differentialgleichung erfüllt ist, entsteht:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^t\iiint_{(\mathfrak{A}_\delta)}\Big[\Gamma(\tau,\mathfrak{q}',t')\,\frac{\partial\Gamma}{\partial t'}(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')-\operatorname{grad}_{\mathfrak{q}'}\Gamma(\tau,\mathfrak{q}',t')\times \\ \times\operatorname{grad}_{\mathfrak{q}'}\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\Big]\,d\tau_{\mathfrak{q}'}\,dt'=0,$$

und hierin ergibt die Ersetzung von $t-t'$ durch t' und die Vertauschung von τ und $\mathfrak{f}$:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^t\iiint_{(\mathfrak{A}_\delta)}\Big[\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\,\frac{\partial\Gamma}{\partial t'}(\tau,\mathfrak{q}',t')+\operatorname{grad}_{\mathfrak{q}'}\Gamma(\tau,\mathfrak{q}',t')\times \\ \times\operatorname{grad}_{\mathfrak{q}'}\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\Big]\,d\tau_{\mathfrak{q}'}\,dt=0.$$

Addition beider Gleichungen liefert:

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^t\iiint_{(\mathfrak{A}_\delta)}\frac{\partial}{\partial t'}\left[\Gamma(\tau,\mathfrak{q}',t')\,\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\right]d\tau_{\mathfrak{q}'}\,dt' \\ =\lim_{\delta\to 0}\iiint_{\mathfrak{A}_\delta}\left[\Gamma(\tau,\mathfrak{q}',t')\,\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')_{t'\to t}-\Gamma(\tau,\mathfrak{q}',t')\,\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')_{t'\to 0}\right]d\tau_{\mathfrak{q}'} \\ =\Gamma(\tau,\mathfrak{f},t)-\Gamma(\mathfrak{f},\tau,t)=0,$$

also die *Symmetrie unserer Funktion* $\Gamma(\tau,\mathfrak{f},t)$. Andererseits untersuchen wir den Ausdruck

$$\gamma(\tau,\mathfrak{f},t)=-\nu\int_0^t\iint_{(F\Gamma)}\Big[K(\tau,\mathfrak{q}',t')\,\frac{\partial\Gamma}{\partial q'}(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')-\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\,\frac{\partial K}{\partial q'}(\tau,\mathfrak{q}',t')\Big]\,do'\,dt'- \\ -\nu\int_0^t\iint_{(F\Gamma)}\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\,\frac{\partial K}{\partial q'}(\tau,\mathfrak{q}',t')\,do'\,dt'$$

und formen die erste Zeile auf dieselbe Weise um, wodurch wir erhalten:

$$\gamma(\tau,\mathfrak{f},r)=\Gamma(\mathfrak{f},\tau,t)-K(\tau,\mathfrak{f},t)-\nu\int_0^t\iint_{(F\Gamma)}\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\,\frac{\partial K}{\partial q'}(\tau,\mathfrak{q}',t')\,do'\,dt'.$$

Hierdurch folgt mit Hilfe der Symmetrie

$$\int_0^t\iint_{(F\Gamma)}\Gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t')\,\frac{\partial K}{\partial q'}(\tau,\mathfrak{q}',t')\,do'\,dt'=0.$$

Wegen

$$\frac{\partial K}{\partial q'}(\tau,\mathfrak{q}',t')=\frac{e^{-\frac{|\tau-\mathfrak{q}'|^2}{4\nu t'}}}{\pi^{\frac{3}{2}}(4\nu t')^{\frac{3}{2}}}\,2\left(r\cos(\tau\,\mathfrak{q}')-a\right)\qquad(r>a)$$

erkennt man das Folgende: Es sei $\Gamma(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}_0', t-t') \neq 0$ für ein bestimmtes $t' < t$, ein $\mathfrak{q}_0'$ auf der Fläche und eine kleine Umgebung davon. Wir können dann die radiale Annäherung von $\mathfrak{r}$ an $\mathfrak{q}_0'$ so weit treiben, daß in dieser Umgebung von $\mathfrak{q}_0'$, t' ein so starker Wert der Kernfunktion bei gleichzeitiger Herabdrückung aller weiter entfernten Funktionswerte des Integranden entsteht, daß der Wert des Integrals unmöglich Null sein kann. Unsere Annahme $\Gamma(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}_0', t-t') \neq 0$ führt daher zu einem Widerspruch und es folgt notwendig

$$\Gamma(\mathfrak{f}, \mathfrak{q}, t) = 0 \qquad \text{für } \mathfrak{q} \text{ auf } Fl.$$

Darüber hinaus haben wir zu zeigen, daß für $s > a$ stets $\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) \geqq 0$ sein soll. Wegen des Verschwindens auf der Oberfläche und wegen $\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}, t) > 0$ für genügend kleines t muß, falls für $0 < s \leqq r$ einmal $\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t)$ negativ ist, ein kleinstes Minimum $\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) < 0$ existieren. Für eine kleine Kugel um diesen Punkt gilt dann

$$\begin{aligned} 0 &> \nu \iint \Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t)\, \frac{\partial \Gamma}{\partial n_Q}(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t)\, do \\ &= \nu \iiint_{(K)} [\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t)\, \Delta_{\mathfrak{q}} \Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t) + \operatorname{grad}_{\mathfrak{q}}^2 \Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t)]\, d\tau \\ &\geqq \nu \iiint_{(K)} \Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t)\, \Delta_{\mathfrak{q}} \Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t)\, d\tau = \iiint_{K} \Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t)\, \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t)\, d\tau \end{aligned}$$

und dies liefert durch Integration über t von $t_0 < t$ bis t:

$$0 > \iiint_{(K)} \left(\Gamma^2(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t) - \Gamma^2(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t_0)\right) d\tau, \qquad \Gamma^2(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t_0) > \Gamma^2(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t),$$

das ist aber ein Widerspruch, wenn $\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t)$ das kleinste negative Minimum für alle t zwischen o und t ist. Also ist in dem genannten Zeitbereich stets $\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t) \geqq 0$ und zwar im ganzen Raum. Dieselbe Schlußweise läßt sich schrittweise für größeres t fortsetzen und gilt somit allgemein.

Indem wir uns den Nachweis des genügend starken Verschwindens von Γ im Unendlichen für später vorbehalten, können wir aussagen, daß abgesehen davon unsere gefundene Funktion tatsächlich sämtlichen geforderten Bedingungen entspricht. Übrigens ist sie eindeutig bestimmt, denn gäbe es noch eine zweite, so müßte die Differenz beider im ganzen Außenraum der Differentialgleichung genügen und außerdem am Rande verschwinden; daraus würde aber folgen, daß sie im ganzen Außenraum Null ist.

Unsere nächste Aufgabe ist nun die *Erweiterung des Begriffes der Greenschen Funktion* auf den Fall, daß der bisher als fest angesehene Grundbereich zeitlich variabel wird. Wir beziehen uns dabei wieder auf den Außenraum einer Kugel, die jetzt mit einer zeitlich veränderlichen Geschwindigkeit $v(t)$ in der x-Richtung ohne Drehung fortbewegt werden soll ($x = x(t)$ Bewegungsgesetz). Wiederum lassen wir die an sich leicht möglichen Verallgemeinerungen hier der Einfachheit wegen beiseite. Es handelt sich jetzt um die Bestimmung

einer Funktion $\Gamma(P, Q, t, t_0)$, die durch folgende Bedingungen festgelegt wird:

$$\text{(1a)} \quad \begin{cases} \Gamma(P, Q, t, t_0) = K(\tau, \xi, t - t_0) + \gamma(P, Q, t, t_0); \ \Gamma \to 0 \quad \text{für} \quad t \to t_0. \\ 0 \leqq t_0 \leqq t \qquad \begin{matrix} P & \tau \\ Q & \xi \end{matrix} \end{cases}$$

(2a) Es gilt für $\Gamma(P, Q, t, t')$:

$$\nu \Delta_Q \Gamma = -\frac{\partial \Gamma}{\partial t'} \quad \text{im Außenraum } \mathfrak{A}_{t'} \text{ von } K_{t'}, \text{ außer für } Q = P,$$

$$\nu \Delta_Q \gamma = -\frac{\partial \gamma}{\partial t'} \quad \text{im ganzen Bereich } \mathfrak{A}_{t'}.$$

Falls Q sich der Oberfläche von $K_{t'}$ (das ist die Kugel in ihrer Lage zur Zeit t', $t_0 \leqq t' \leqq t$) nähert, soll $\Gamma(P, Q, t, t') = 0$ werden.

Physikalisch bedeutet $\Gamma(P, Q, t, t_0)$ die Temperatur in einem Punkte Q des wärmeleitenden Außenbereiches $\mathfrak{A}_t$ zur Zeit t, die durch einen Wärmestoß der Stärke 1 in P zur Zeit t_0 hervorgerufen wird, wenn die Temperatur an der Oberfläche von $K_{t'}$ während der ganzen Zeit $t_0 \leqq t' \leqq t$ auf Null gehalten wird und gleichzeitig auch im Unendlichen die Temperatur Null herrscht, und wenn ferner zu Anfang im ganzen Körper die Temperatur gleich Null ist. Natürlich wird bei dieser „physikalischen" Deutung von Bewegungsvorgängen innerhalb des wärmeleitenden Körpers abgesehen, also kein konvektiver Wärmetransport untersucht.

Wir müssen jetzt den Gedankengang, der unter der Annahme der Existenz der Greenschen Funktion zu der Formel (3) führt, nochmals durchgehen. In der Formel (untere Grenze t_0 statt o):

$$\int_{t_0}^{t-\varepsilon} \iiint_{(\mathfrak{A}_{t'})} \frac{\partial}{\partial t'} \left[U(Q, t') \, \Gamma(P, Q, t, t') \right] d\tau_Q \, dt'$$

$$= \int_{t_0}^{t-\varepsilon} \iiint_{(\mathfrak{A}_{t'})} \left[\nu (\Gamma \Delta_Q U - U \Delta_Q \Gamma) - \Gamma(P, Q, t, t') \left(\nu \Delta_Q - \frac{\partial}{\partial t'} \right) U \right] d\tau_Q \, dt'$$

kann jetzt nicht ohne weiteres auf der linken Seite die Integration über t' mit der räumlichen Integration vertauscht werden. Indessen zeigt eine Hilfsbetrachtung, die wir hier übergehen, die Gültigkeit nachfolgender Hilfsformel: ($H(Q, t')$ beliebig)

$$\iiint_{\mathfrak{A}_{t'}} \frac{\partial H}{\partial t'}(Q, t') \, d\tau_Q = \frac{\partial}{\partial t'} \iiint_{(\mathfrak{A}_{t'})} H(Q, t') \, d\tau_Q - \iint_{(Ft')} H(Q, t') \cos(n_Q, \xi) \, do_Q \cdot v(t').$$

Setzen wir nun für $H(Q, t')$ wie oben $U(Q, t') \, \Gamma(P, Q, t, t')$ ein, so ist an der Oberfläche Ft' jetzt $\Gamma(P, Q, t, t') = 0$, und das letzte Glied ist Null. Daher bleibt in dem für uns maßgebenden Falle die Vertauschbarkeit der zeitlichen Ableitung mit dem räumlichen Integralzeichen wieder erhalten und die Formel

(3) gilt in der Form

$$(3\,a)\quad \begin{cases} U(P,t) = \nu \int\limits_{t_0}^{t} \iint\limits_{(F\Gamma)} U(Q,t')\,\dfrac{\partial \Gamma}{\partial n_Q}(P,Q,t,t')\,do_Q\,dt' - \int\limits_{t_0}^{t} \iiint\limits_{(\mathfrak{K}_{t'})} \Gamma(P,Q,t,t') \times \\ \qquad \times \left(\nu \Delta_Q - \dfrac{\partial}{\partial t'}\right) U(Q,t')\,d\tau_Q\,dt' + \iiint\limits_{(\mathfrak{K}_{t_0})} \Gamma(P,Q,t,t_0)\,U(Q,t_0)\,d\tau_Q, \end{cases}$$

worin das letzte Glied noch wegfällt, wenn $U(Q,t_0)$ verschwindet. Am Beispiel der Kugel können wir dies erläutern. Nach (3a) gilt, angewandt auf das Zeitintervall von t_0 bis t und auf die Funktion $\gamma(R,P,t,t_0)$, welche für $t=t_0$ verschwindet, analog zu (4) jetzt die Darstellung:

$$\gamma(\mathfrak{r},\mathfrak{f},t,t_0) = \nu \int\limits_{t_0}^{t} \iint\limits_{(F\Gamma)} \gamma(\mathfrak{r},\mathfrak{q}',t',t_0)\,\frac{\partial \Gamma}{\partial n_{Q'}}(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t,t')\,do'\,dt' \qquad (t_0 \leqq t' \leqq t)$$

$$= -\nu \int\limits_{t_0}^{t} \iint\limits_{(F\Gamma)} K(\mathfrak{r},\mathfrak{q}',t'-t_0)\,\frac{\partial}{\partial q'}\left[K(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t-t') + \gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t,t')\right] do'\,dt'$$

als Bestimmungsgleichung für γ. Dabei bedeutet q' die Entfernung des Randpunktes Q' vom Mittelpunkte der Kugel $K_{t'}$, in dieser Richtung muß unter dem Integralzeichen differentiiert werden.

Die rechts auftretende Funktion γ können wir nun ebenfalls in der Form schreiben:

$$\gamma(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t,t') = -\nu \int\limits_{t'}^{t} \iint\limits_{Ft''} K(\mathfrak{f},\mathfrak{q}'',t''-t') \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial q''}\left[-K(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}'',t-t') + \gamma(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}'',t,t'')\right] do''\,dt'',$$

wobei wir wieder die Randpunkte durch die Vektorbezeichnung $\mathfrak{q}$ mit dem der entsprechenden Zeitvariablen zugehörigen Index versehen. Wir finden weiterhin

$$\gamma(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}'',t,t'') = -\nu \int\limits_{t''}^{t} \iint\limits_{Ft'''} K(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}''',t'''-t'') \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial q'''}\left[K(\mathfrak{q}'',\mathfrak{q}''',t-t''') + \gamma(\mathfrak{q}'',\mathfrak{q}''',t,t''')\right] do'''\,dt''' \quad (t_0 \leqq t' \leqq t'' \leqq t''' \leqq \cdots \leqq t)$$

und so fort. Es gilt weiterhin

$$\frac{\partial \gamma}{\partial q'}(\mathfrak{f},\mathfrak{q}',t,t') = -\nu \int\limits_{t'}^{t} \iint\limits_{Ft''} K(\mathfrak{f},\mathfrak{q}'',t''-t') \times$$

$$\times \frac{\partial^2}{\partial q''\,\partial q'}\left[K(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}'',t-t'') + \gamma(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}'',t,t'')\right] do''\,dt''$$

und wiederum

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial q'\,\partial q''}(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}'',t,t'') = -\nu \int\limits_{t''}^{t} \iint\limits_{Ft'''} \frac{\partial K}{\partial q'}(\mathfrak{q}',\mathfrak{q}''',t'''-t'') \times$$

$$\times \frac{\partial^2}{\partial q''\,\partial q'''}\left[K(\mathfrak{q}'',\mathfrak{q}''',t-t''') + \gamma(\mathfrak{q}'',\mathfrak{q}''',t,t''')\right] do'''\,dt''',$$

wobei jedesmal die Differentiationen in den gekennzeichneten Richtungen zu verstehen sind.

Die zuletzt hingeschriebene Gleichung ist eine lineare Integralgleichung für die Funktion

$$y(t', t, t'') = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial q' \partial q''}(q', q'', t, t'')$$

und hat Volterraschen Typus. Wir können die Gleichung in der Form schreiben:

$$y(t', t, t'') = f(t', t, t'') + \int_{t''}^{t} H(t', t''', t'')\, y(t'', t, t''')\, dt'''.$$

Hierbei bedeutet

$$H(t', t''', t'') = -\nu \iint_{Ft'''} \frac{\partial K}{\partial q'}(q', q''', t''' - t'')\, do'''$$

und

$$f(t', t, t'') = -\nu \int_{t''}^{t} \iint_{Ft'''} \frac{\partial K}{\partial q'}(q', q''', t''' - t'') \frac{\partial^2 K}{\partial q'' \partial q'''}(q'', q''', t - t''')\, do'''\, dt'''.$$

Beide Funktionen, erstere mit $\sqrt{t''' - t''}$ multipliziert, sind stetig im Intervall und daher beschränkt.

Die zugehörige Neumannsche Reihe liefert

$$y(t', t, t''') = f(t', t, t'') + \int_{t''}^{t} H(t', t''', t'')\, f(t'', t, t''')\, dt''' + \int_{t''}^{t} H(t', t''', t'') \int_{t'''}^{t} H(t'', t^{(4)}, t''')\, f(t''', t, t^{(4)})\, dt^{(4)}\, dt''' + \cdots$$

und besitzt eine Majorante der Form

$$F + MF\sqrt{t - t_0} + M^2 F \frac{(\sqrt{t - t_0})^2}{2!} + \cdots,$$

welche im Intervall $t_0 \leqq t \leqq T$ gleichmäßig konvergiert. Einsetzung der entsprechender Lösung $\frac{\partial^2 \gamma}{\partial q' \partial q''}(q', q'', t, t'')$ in die vorangehenden Gleichungen ergibt schließlich die gesuchte Funktion $\gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t, t_0)$, von der wir wie oben zeigen, daß sie der Differentialgleichung im ganzen Außenraum $\mathfrak{A}_{t_0}$ genügt. Auch die übrigen Schlüsse lassen sich entsprechend wiederholen, so daß wir sowohl die Symmetrie

$$\gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t, t_0) = \gamma(\mathfrak{f}, \mathfrak{r}, t, t_0)$$

als auch das Verschwinden am Rande

$$\Gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t, t_0) = -K(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t, t_0) + \gamma(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t, t_0) = 0 \qquad (\mathfrak{q} \text{ auf } Fl_t)$$

behaupten können, ebenso die Eindeutigkeit.

Damit ist die Existenz und eindeutige Bestimmtheit der Greenschen Funktion für das genannte verallgemeinerte Problem bewiesen.

Es fehlt uns nun noch eine *Abschätzung von* $\Gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t, t_0)$ *in Abhängigkeit von* $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{y}$, damit wir sicher sind, daß die Gl. (3a), welche die Grundlage der ganzen Überlegung liefert, auf den vorliegenden Fall anwendbar ist.

Hierzu behaupten wir die Existenz einer Konstanten C, so daß

$$\Gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t, t_0) \leqq \frac{C}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|^3}$$

gilt.

Zum Beweise stellen wir zunächst fest, daß wegen $\Gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t, t_0) \geqq 0$ und $\Gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{q}, t, t_0) = 0$ ($\mathfrak{q}$ auf Fl_{t_0}) notwendig $\frac{\partial \Gamma}{\partial q}(\mathfrak{x}, \mathfrak{q}, t, t_0) \geqq 0$ ist, wonach wegen der Integralgleichung für $\gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t, t_0)$ folgt $\gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t, t_0) \leqq 0$,

$$\Gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t, t_0) \leqq \frac{e^{-\frac{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2}{4\nu(t-t_0)}}}{(4\pi\nu(t-t_0))^{\frac{3}{2}}}.$$

Das Maximum dieser Funktion wird erreicht, wenn bei festem $|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}| \neq 0$ die Bedingung

$$\frac{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|^2}{4\nu(t - t_0)^2} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{t - t_0} = 0$$

erfüllt ist, was $\frac{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|^2}{4\nu(t - t_0)} = \frac{3}{2}$ und damit als Maximalwert für alle $t > t_0$:

$$\Gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t, t_0) \leqq \operatorname{Max} \frac{e^{-\frac{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2}{4\nu(t-t_0)}}}{(4\pi\nu(t-t_0))^{\frac{3}{2}}} \leqq \left(\frac{3}{2\pi e}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|^3} \tag{8}$$

liefert. Hierdurch ist die Behauptung bewiesen.

Entsprechend findet man als Schranke für die Ableitung für alle $t > t_0$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-\frac{|\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2}{4\nu(t-t_0)}}}{(4\pi\nu(t-t_0))^{\frac{3}{2}}}\right)\right| \leqq \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\frac{5}{2e}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{r+s}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{y}|^5} \qquad (r = |\mathfrak{x}|,\ s = |\mathfrak{y}|).$$

Wir haben weiterhin nach der Definition von

$$\gamma(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t, t_0) = -\nu \int_{t_0}^{t} \iint_{Fl'} \frac{e^{-\frac{|\mathfrak{x}-\mathfrak{q}'|^2}{4\nu(t-t')}}}{(4\pi\nu(t-t'))^{\frac{3}{2}}}\,\frac{\partial \Gamma}{\partial q'}(\mathfrak{y}, \mathfrak{q}', t, t')\, do'\, dt'$$

die Ableitung

$$\left|\frac{\partial \gamma}{\partial r}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, t, t_0)\right| \leqq \frac{\nu}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{t_0}^{t} \iint_{Fl'} \left|\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{e^{-\frac{|\mathfrak{x}-\mathfrak{q}'|^2}{4\nu(t-t')}}}{(4\nu(t-t'))^{\frac{3}{2}}}\right| \left|\frac{\partial \Gamma}{\partial q'}(\mathfrak{y}, \mathfrak{q}', t, t')\, do'\, dt'\right|;$$

dies ist wegen des positiven Integranden:

$$\leqq \frac{\nu}{\pi^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{5}{2e}\right)^{\frac{5}{2}} \frac{r+a}{(r-a)^5} \cdot \int_{t_0}^{t} \iint_{Fl'} \frac{\partial \Gamma}{\partial q'}(\mathfrak{y}, \mathfrak{q}', t, t')\, do'\, dt'.$$

Aber wegen (3a) mit $U = 1$ gilt

$$1 = \nu \int_{t_0}^{t} \iint_{(Fl')} \frac{\partial \Gamma}{\partial q'}(\mathfrak{y}, \mathfrak{q}', t, t')\, do'\, dt' + \iiint_{\mathfrak{A}_{t_0}} \Gamma(\mathfrak{y}, \mathfrak{q}, t, t_0)\, d\tau_{\mathfrak{q}},$$

und das letzte Raumintegral konvergiert; die Abschätzung von Γ durch K zeigt, daß sein Wert $\leqq 1$ ist, andererseits ist er positiv. Daher wird

$$\nu \int_{t_0}^{t} \iint_{(F\Gamma)} \frac{\partial \Gamma}{\partial q'} (\mathfrak{f}, \mathfrak{q}', t, t')\, d o'\, dt' \leqq 1,$$

und wir erhalten für $r > s > a$, alle t und t_0 sowie $r \to \infty$:

$$\left| \frac{\partial \Gamma}{\partial r} (\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t, t_0) \right| \leqq \frac{C}{r^4}.$$

Ebenso gilt wegen der Symmetrie

$$\left| \frac{\partial \Gamma}{\partial s} (\mathfrak{r}, \mathfrak{f}, t, t_0) \right| \leqq \frac{C}{s^4}$$

für $s > r > a$, alle t und t_0 sowie $s \to \infty$.

§ 2. Das Integralgleichungssystem der Navier-Stokesschen Gleichungen und seine Lösung

Wir schreiben jetzt die Navier-Stokesschen Gleichungen in der Form

$$(9) \qquad \begin{cases} \nu \Delta u - \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{\varrho} \dfrac{\partial p}{\partial x} + u \dfrac{\partial u}{\partial x} + v \dfrac{\partial u}{\partial y} + w \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \nu \Delta v - \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{\varrho} \dfrac{\partial p}{\partial y} + u \dfrac{\partial v}{\partial x} + v \dfrac{\partial v}{\partial y} + w \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \nu \Delta w - \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{1}{\varrho} \dfrac{\partial p}{\partial z} + u \dfrac{\partial w}{\partial x} + v \dfrac{\partial w}{\partial y} + w \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

$$(10) \qquad Z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Aus der Kontinuitätsgleichung ergibt sich vermöge (9):

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\varrho} \Delta p = -\dfrac{\partial}{\partial x} \left(u \dfrac{\partial u}{\partial x} + v \dfrac{\partial u}{\partial y} + w \dfrac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \qquad\quad -\dfrac{\partial}{\partial y} \left(u \dfrac{\partial v}{\partial x} + v \dfrac{\partial v}{\partial y} + w \dfrac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \qquad\quad -\dfrac{\partial}{\partial z} \left(u \dfrac{\partial w}{\partial x} + v \dfrac{\partial w}{\partial y} + w \dfrac{\partial w}{\partial z} \right). \end{cases}$$

u, v, w bedeuten hierbei die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes $P(x, y, z)$ zur Zeit t. Das benutzte Koordinatensystem liege im Raume fest. Zur Zeit $t = 0$ sei der Geschwindigkeitsvektor in der zähen Flüssigkeit überall gleich Null, ebenso in jedem endlichen Punkte für $t \to \infty$. $p = p(x, y, z, t)$ bedeutet den Druck, ϱ die konstante Dichte der Flüssigkeit, ν den Zähigkeitskoeffizienten. In der Flüssigkeit befinde sich eine Kugel vom Radius a, deren Mittelpunkt zur Zeit t die Entfernung $x(t)$ vom Koordinatenanfangspunkte habe und sich in der positiven x-Richtung parallel mit sich mit der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = U(t)$ vorwärtsbewege. Wegen der Haftreibung ist für jeden Punkt der Kugeloberfläche der dort vorgeschriebene Randwert des Geschwindigkeitsvektors $\big(U(t), 0, 0\big)$. Der in Betracht kommende Flüssigkeitsbereich

zur Zeit t ist das gesamte Äußere der Kugel in ihrer Lage zur Zeit t, den wir $\mathfrak{A}_t$ nennen. Es sei $x(0)=0$.

Da für den Druck die Δ-Ableitung, für die Geschwindigkeitskomponenten der Differentialausdruck $\nu\Delta-\frac{\partial}{\partial t}$ durch die unbekannten Funktionen und ihre räumlichen Ableitungen vorgeschrieben ist, verwenden wir zum Übergang in ein Integralgleichungssystem für u, v, w die im vorangehenden Paragraphen beschriebene Greensche Funktion $\Gamma(P, Q, t, t')$, für p die gewöhnliche Greensche Funktion, aber natürlich bezogen auf die jeweils veränderliche Lage der Kugel zur Zeit t. Man erhält letztere Funktion $G(P, Q, t)$ aus $G(P, Q, 0)$ vermöge der Beziehung

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta, t) = G(x - x(t), y, z; \xi - x(t), \eta, \zeta, 0).$$

Schreiben wir noch im Unendlichen dauernd den konstanten Druck 0 vor, auf der Kugeloberfläche den Druck $\overline{p}(Q,t)$ mit $\overline{p}(Q,0)=0$, so erhalten wir jetzt auf Grund der Ergebnisse des vorigen Paragraphen das folgende Integralgleichungssystem:

$$(12)\quad \begin{cases} u(P,t) = \nu \int\limits_0^t \iint\limits_{Fl'} U(t')\,\frac{\partial \Gamma}{\partial n_Q}(P,Q,t,t')\,do_Q\,dt' - \\ \qquad - \int\limits_0^t \iiint\limits_{(\mathfrak{A}_{t'})} \Gamma(P,Q,t,t')\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \xi} + u\frac{\partial u}{\partial \xi} + v\frac{\partial u}{\partial \eta} + w\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right] d\tau_Q\,dt', \\ v(P,t) = -\int\limits_0^t \iiint\limits_{(\mathfrak{A}_{t'})} \Gamma(P,Q,t,t')\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \eta} + u\frac{\partial v}{\partial \xi} + v\frac{\partial v}{\partial \eta} + w\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right] d\tau_Q\,dt', \\ w(P,t) = -\int\limits_0^t \iiint\limits_{(\mathfrak{A}_{t'})} \Gamma(P,Q,t,t')\left[\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial \zeta} + u\frac{\partial w}{\partial \xi} + v\frac{\partial w}{\partial \eta} + w\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right] d\tau_Q\,dt', \\ p(P,t) = \iint\limits_{(Fl_t)} \overline{p}(Q,t)\,\frac{\partial G}{\partial n_Q}(P,Q,t)\,do_Q + \\ \qquad + \varrho \iiint\limits_{(\mathfrak{A}_t)} G(P,Q,t)\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(u\frac{\partial u}{\partial \xi} + v\frac{\partial u}{\partial \eta} + w\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) + \right. \\ \qquad \left. + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(u\frac{\partial v}{\partial \xi} + v\frac{\partial v}{\partial \eta} + w\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(u\frac{\partial w}{\partial \xi} + v\frac{\partial w}{\partial \eta} + w\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)\right] d\tau_Q. \end{cases}$$

Jedes Lösungssystem von (12) genügt den Gln. (9) und (11) und daher auch, wie man unmittelbar sieht, der Gleichung

$$\left(\nu\Delta - \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

im ganzen Außenraum $\mathfrak{A}_t$. Für $t=0$ ist $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ überall, also auch an der Oberfläche der Kugel. Ob aber daraus auch das Verschwinden an der Oberfläche von K_t für alle t und damit die unbeschränkte Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung folgt, muß einstweilen noch offen bleiben.

Zur Gewinnung eines Lösungssystems können wir das Verfahren der Iteration anwenden.

Wir beginnen mit den Anfangswerten

$$u_0(P,t) = \nu \int_0^t \iint_{(F\Gamma)} U(t') \frac{\partial \Gamma}{\partial n_Q}(P,Q,t,t')\, do_Q\, dt', \qquad v_0(P,t) = 0,$$

$$w_0(P,t) = 0, \qquad p_0(P,t) = \iint_{(F_4)} \bar{p}(Q,t) \frac{\partial G}{\partial n_Q}(P,Q,t)\, do_Q, \; Z_0 = 0$$

und setzen dann allgemein

$$\begin{aligned} u_{n+1}(P,t) &= u_0 + \mathfrak{U}(u_n, v_n, w_n, p_n), \\ v_{n+1}(P,t) &= \mathfrak{V}(u_n, v_n, w_n, p_n), \\ w_{n+1}(P,t) &= \mathfrak{W}(u_n, v_n, w_n, p_n), \\ p_{n+1}(P,t) &= p_0 + \mathfrak{P}(u_n, v_n, w_n), \end{aligned}$$

worin $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{P}$ je die räumlichen Integraloperatoren rechter Hand in (12) darstellen.

Setzen wir voraus, daß u_n, v_n, w_n und ihre räumlichen partiellen Ableitungen von der Ordnung $1/r^2$ mit $r \to \infty$ verschwinden, während p_n mit $1/r$, die Ableitungen von p_n mit $1/r^2$ gegen Null gehen, so ist zunächst die Konvergenz der räumlichen Integrale gesichert, so daß u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}, p_{n+1} eindeutig bestimmt sind.

Um die Größenordnung von u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} abzuschätzen, grenzen wir um den Punkt $\mathfrak{r}$ eine Kugel vom Radius δ ab und berechnen für eine stetige Funktion $F(\mathfrak{q}, t')$ das Integral

$$\int_0^t \iiint_{(\delta)} F(\mathfrak{q}, t')\, K(\mathfrak{r}, \mathfrak{q}, t - t')\, d\tau_{\mathfrak{q}}\, dt'.$$

Dies wird, wie eine entsprechende Abschätzung zeigt, bei beliebigem δ für $t \to 0$ beliebig klein. Schlägt man nun um den Punkt $\mathfrak{r}$ eine Kugel vom Radius $r/2$, so kann bei der Berechnung von u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} jeweils der Anteil des räumlichen Integrals innerhalb der Kugel für genügend kleines t kleiner als Ct/r^2 gemacht werden, während der Anteil außerhalb der Kugel von derselben Größenordnung ist. Hiermit ist für u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} dieselbe Größenordnung des Verschwindens bewiesen, wenn sie für u_n, v_n, w_n, p_n gilt. Entsprechend verläuft der Beweis für die partiellen Ableitungen. Für $n = 0$ aber sind die Voraussetzungen erfüllt, also gelten sie allgemein, sobald wir die entsprechenden Aussagen für p_n gezeigt haben.

Zu diesem Zwecke formen wir den Ausdruck für $\mathfrak{P}(u_n, v_n, w_n)$ in (12) vermöge der Kontinuitätsgleichung[5]) um und erhalten ein Raumintegral über $F(u,v,w) = u_x^2 + v_y^2 + w_z^2 + 2v_z w_y + 2w_x u_z + 2u_y v_x$. In dieser Schreibweise kann das Raumintegral $\mathfrak{P}(u_n, v_n, w_n)$ durch Einteilung des Raumes in zwei Halbräume vermöge der Grenzebene $r_{PQ} = s$ abgeschätzt werden. Man findet

$$|\mathfrak{P}(u_n, v_n, w_n)| \leqq \frac{C}{r^2}.$$

[5]) Aus $Z_0 = 0$ folgt durch eine leichte Rechnung $Z_1 = 0$, allgemein $Z_n = 0$.

Da das Oberflächenintegral in dem Ausdruck für p_0 von der Ordnung $1/r$ wird, ist hiermit die Behauptung bezüglich p_{n+1} bewiesen. Entsprechend verfährt man bezüglich der Ableitungen von p_{n+1}, deren Größenordnung im Unendlichen mindestens von der Ordnung $1/r^2$ wird.

Nachdem wir die unbeschränkte Fortsetzbarkeit des Iterationsprozesses gezeigt haben, kommt es nun darauf an, die Konvergenz des Verfahrens nachzuweisen. Hierzu führen wir die Differenzen ein:

$$u_n - u_{n-1} = \Delta u_n$$
$$v_n - v_{n-1} = \Delta v_n$$
$$w_n - w_{n-1} = \Delta w_n$$
$$p_n - p_{n-1} = \Delta p_n$$

und bezeichne die Summe der Maxima der Beträge

$$|\Delta u_n| + |\Delta v_n| + |\Delta w_n| + \left|\Delta \frac{\partial u_n}{\partial x}\right| + \cdots + \left|\Delta \frac{\partial w_n}{\partial z}\right|$$

mit M_n. Die Bauart der Gleichungen läßt erkennen, daß eine Konstante A existiert, so daß

$$M_{n+1} < A\sqrt{t}\, M_n$$

gilt, falls t klein genug gewählt wird. Da man den Faktor $A\sqrt{t} = q < 1$ machen kann, steht hiernach die gleichmäßige Konvergenz im ganzen Außenraum für $0 \leqq t \leqq t_1$, fest und führt zu dem gesuchten Lösungssystem u, v, w. Aus der letzten Gleichung ergibt sich dann die Existenz von $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, und damit Erfüllung der Gln. (9) und (10).

Schreibt man nun das Gleichungssystem (12) mit der unteren Grenze t_1 auf, so hat man jetzt in den ersten drei Gleichungen Raumintegrale hinzuzufügen, die gemäß (3a) die vorher bestimmten Werte $u(Q, t_1)$, $v(Q, t_1)$, $w(Q, t_1)$ enthalten und von der Form sind

$$\iiint\limits_{(\mathfrak{A}_{t_0})} \Gamma(P, Q, t, t_1) \begin{Bmatrix} u(Q, t_1) \\ v(Q, t_1) \\ w(Q, t_1) \end{Bmatrix} d\tau_Q .$$

Diese bekannten Funktionen sind jetzt als erste Näherungswerte für $v(P, t)$ und $w(P, t)$ zu verwenden, während für $u(P, t)$ das Oberflächenintegral hinzukommt. Die Iteration ist dann entsprechend durchzuführen und liefert die Fortsetzung des Lösungssystems in einem Intervall $t_1 \leqq t \leqq t_2$. In dieser Weise fortfahrend erkennt man, daß von jedem beliebigen Zeitpunkte t^* $(0 \leqq t^* \leqq T)$ aus, der in der beschriebenen Weise von $t = 0$ aus mit endlich vielen Schritten erreichbar ist, ein weiteres Intervall rechts von t^* gefunden werden kann, in welches die Lösung fortgesetzt werden kann. Demnach ist die Fortsetzung nach einer bekannten Schlußweise auf ein beliebiges abgeschlossenes Zeitintervall hin ausdehnbar.

Bei vorgegebenen Randwerten von p ist das System u, v, w, p offenbar auch eindeutig bestimmt.

Berlin-Frohnau, Kreuzritterstr. 3

(Eingegangen am 22. Juni 1957)

BERGMAN, S.
Math. Zeitschr. 72, 294–306 (1960)

The number of intersection points of two analytic surfaces in the space of two complex variables*)

To the memory of LEON LICHTENSTEIN

By
STEFAN BERGMAN

§ 1. Domains with a distinguished boundary surface and its role in the theory of functions of several complex variables

One of the problems of modern analysis is to unify methods in various fields of this discipline. In this connection it is important to study methods which generalize results of the theory of functions of one complex variable to the case of n variables [1]).

When we attempt to carry out this generalization we encounter the following difference. While every plane simply connected domain with two (or more) boundary points can be mapped into the interior of the unit circle, and therefore we have in many respects the same situation for all domains indicated above, in the case of two (and n, $n < \infty$) variables we encounter several types of domains. In every type we find a different behaviour of functions of two variables [2]). In the case of two variables the bicylinder is the domain of the simplest type. It has a very interesting characteristic property; on its (three dimensional) boundary lies a two-dimensional manifold

*) Work done under contract with the Office of Naval Research.

[1]) We note that many of these results can then be generalized to the theory of linear partial differential equations, differential geometry (the study of KÄHLER manifolds) and other chapters of analysis and geometry.

[2]) When considering functions of two (and several) complex variables it is useful to classify domains. (See [1].) A manifold lying in $\mathfrak{m}^3$, the boundary of $\mathfrak{B}$, and possessing the property that to every point P of this manifold there exists an analytic function f such that $|f(P)|$ is larger than $|f|$ at every other point of $\mathfrak{B}$ is denoted as the maximum manifold of $\mathfrak{B}$. If the maximum manifold does not coincide with the whole boundary of the domain, in particular, if it is a two dimensional manifold (maximum surface) certain methods of one complex variable (e.g., procedures used in the derivation of the lemma of SCHWARZ) can be generalized to the case of two variables. (In the case of n variables we have, instead of a surface, an n dimensional manifold lying on the $(2n-1)$ dimensional boundary surface of the domain.) If the maximum surface has certain additional properties (in which case it is denoted as the distinguished boundary surface) there exists a generalized Cauchy formula ([2], [4], [6], [7], [26], [28], [29]). Introducing then the functions of an extended class (see [3], [17], [18], [19], [21], [22]) one can generalize NEVANLINNA's theory of value distributions of one and of pairs of analytic functions of two complex variables ([9], [15], [20]). In this case one also obtains various results about the behavior of the functions in the neighborhood of the distinguished boundary surface ([3], [13], [16]), as well as other generalizations of results in the theory of functions of one variable. (Numbers in brackets refer to the bibliography, p. 306.)

which from the function theoretical point of view plays the role of the boundary curve of a plane domain. For instance, in the case of the bicylinder the generalized Cauchy formula

$$(1) \qquad f(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta_1|=1} \int_{|\zeta_2|=1} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\prod_{k=1}^{2} (\zeta_k - z_k)} d\zeta_1 d\zeta_2$$

holds, permitting one to express the value of the function inside the domain in terms of the values on the distinguished boundary surface. (The representation (1) can be, of course, generalized to the case of other product domains.) It can be shown that the bicylinder has a distinguished boundary surface possessing the above mentioned property. One realizes almost immediately that the behavior of functions in the hypersphere $[|z_1|^2 + |z_2|^2 \leqq 1]$ differs completely from that in the bicylinder $[|z_1| \leqq 1, |z_2| \leqq 1]$. It is impossible for the hypersphere to have a distinguished boundary surface. Since to every point P of the boundary $[|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1]$ one can find a function $f_P(z_1, z_2)$ which is larger at P than at any other point of $[|z_1|^2 + |z_2|^2 \leqq 1]$, an analogue of (1) is impossible. Thus we see that, in the case of two variables, among the simplest domains there exist domains of different (function theoretical) structure.

When approaching the question of the generalization of the theory of one variable one immediately realizes that the domains with a distinguished boundary surface represent a class which admits the generalization of many properties of functions of one variable, which generalizations are not valid in domains of other type. Domains which are bounded by finitely many segments of analytic hypersurfaces

$$(2) \qquad \Phi_\nu(z_1, z_2, \lambda_\nu) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

possess a distinguished boundary surface. Here Φ_ν are continuously differentiable functions of the complex variables z_1, z_2, and of the real variable λ_ν; for every fixed value of λ_ν the function Φ_ν is an analytic function of the variables z_1, z_2 which is regular in a sufficiently large domain.

As has been shown by WEIL [28], [29] and by the author [2], [6], [7] in the case of two variables[3]), a generalized Cauchy formula is valid for these domains. See also [26]. Recently it has been shown [12] that one can determine functions which are orthogonal[4]) with respect to the distinguished boundary surface. Since one can use an arbitrary weighting function, one obtains a variety of formulas representing the function inside the domain in terms of the values on the distinguished boundary surface[5]).

[3]) Recently this last formula has been generalized to the case of n variables.

[4]) These functions represent a generalization of functions introduced in the case of one variable in [27].

[5]) In classification of domains, in addition to the totality of analytic functions regular in $\mathfrak{R}$ the class $L^2(\mathfrak{R})$ (i.e., the class of analytic functions $g(z_1, z_2)$ for which $\int_{\mathfrak{R}} |g|^2 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 < \infty$) has been used. Then the maximum surface can be characterized, for instance, by the behavoir of the kernel function when approaching the distinguished boundary surface. See [10], [11], [14], [15] and papers mentioned there.

The residue theorem is a powerful tool in the theory of functions of one complex variable. In particular, writing

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{c}^1}\frac{g'(\zeta)}{[g(\zeta)-a]}\,d\zeta, \tag{3}$$

where $\mathfrak{c}^1$ is the boundary curve of a simply connected domain $\mathfrak{P}^2$, one obtains the number of a-points[6]) in $\mathfrak{P}^2$ of a regular function of one complex variable. In the present paper a formula is derived for the number of points where a pair of functions $\{g(z_1, z_2), f(z_1, z_2)\}$ assumes the value $\{a_1, a_2\}$[7]) in a domain $\mathfrak{W}$. The domain $\mathfrak{W}$ is bounded by two segments of analytic hypersurfaces (2.3)[8]) and (2.4) and has the distinguished boundary surface $\mathfrak{D}^2$; the integration is taken over $\mathfrak{D}^2$. (See Theorem 2.2.)

By writing

$$U(\xi, \eta) = \log|g(\zeta)| \tag{4}$$

one obtains a formula yielding a relation between the number of minima and minimaxes of the harmonic function U and the connectivity of the domain. For details see [24] p. 6.

Using the Morse theory of critical points [25] HEINS and MORSE [24], [25] derived in the case of one complex variable a formula connecting the number of critical points and the connectivity of the domain. In § 3 several remarks are made in connection with the generalization of the Morse-Heins theory to the case of two complex variables.

The author wishes to thank Z. CHARZYNSKI and ALBERT HURD for their help in the preparation of the present paper.

§ 2. An integral formula for the number of (a_1, a_2)-points of a pair of functions in a domain with a distinguished boundary surface

In the present section we shall derive a formula for the number of points $(z_1, z_2) \in \mathfrak{W}$ and satisfying simultaneously two equations,

$$g(z_1, z_2) = 0 \tag{1}$$

and

$$f(z_1, z_2) = 0. \tag{2}$$

$\mathfrak{W}$ is a domain with a distinguished boundary surface $\mathfrak{D}^2$. $g(z_1, z_2)$ and $f(z_1, z_2)$ are analytic functions of two complex variables which are regular in $\mathfrak{W}$. (Hypothesis 1 a.) They have no common factors[8a]) (Hyp. 1 b).

When considering a function $h(z)$ of one variable regular in a simply connected domain $\mathfrak{P}^2$ (bounded by $\mathfrak{p}^1$) the formula $\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{p}^1}\frac{h'(z)}{h(z)}\,dz$ yields the

[6]) I.e., points where $g(z) = a$.

[7]) I.e., points where $g(z_1, z_2) = a_1$, $f(z_1, z_2) = a_2$. Concerning the question of the value distribution of one function of two complex variables see [9], [10], [15].

[8]) (2.3) = formula (3) of § 2.

[8a]) I.e. they hav only finitely many common points in $\mathfrak{W}$.

number of zeros of $h(z)$ in $\mathfrak{P}^2$. In the case of two variables we shall assume (Hyp. 2a) that the domain $\mathfrak{W}$ under consideration is bounded by two segments of analytic hypersurfaces

$$[z_1 - h_1(z_2, \lambda_1) = 0], \qquad 0 \leqq \lambda_1 \leqq 2\pi, \tag{3}$$

$$[z_2 - h_2(z_1, \lambda_2) = 0], \qquad 0 \leqq \lambda_2 \leqq 2\pi. \tag{4}$$

Here $h_k(z_{3-k}, \lambda_k)$ are twice continuously differentiable functions of the complex variable z_{3-k} and of the real variable λ_k; for every fixed value of λ_k, h_k is an analytic function of z_{3-k} regular in the projection of $\mathfrak{W}$ on the z_{3-k}-plane; h_k is periodic in λ_k, $k = 1, 2$.

Let $\overline{\mathfrak{F}}_1^2(\lambda_1)$ $[\overline{\mathfrak{F}}_2^2(\lambda_2)]$ be the part of the analytic surface (3) [respectively of 4)] belonging to the boundary $\mathfrak{m}^3$ of $\mathfrak{W}$ and let

$$\overline{\mathfrak{r}}_k^3 = \sum_{\lambda_k = 0}^{2\pi} \overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k). \tag{5}$$

Here $\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)$ is given by

$$z_k = h_k(z_{3-k}, \lambda_k), \qquad z_{3-k} \in \mathfrak{P}_{3-k}\left(\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)\right), \qquad k = 1, 2.$$

$\mathfrak{P}_{3-k}\left(\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)\right)$, $k = 1, 2$ is the projection[9]) of $\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)$ on the z_{3-k}-plane. We assume that for every $\lambda_k = \text{const}$ (except perhaps for finitely many points of $[0 \leqq \lambda_k \leqq 2\pi]$) $\mathfrak{P}_{3-k}\left(\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)\right)$ is a simply connected schlicht domain bounded by a differentiable curve (Hyp. 2b).

The intersection

$$\mathfrak{D}^2 = \overline{\mathfrak{r}}_1^3 \cap \overline{\mathfrak{r}}_2^3 \tag{6}$$

forms the distinguished boundary surface of $\mathfrak{W}$. The surface $\mathfrak{D}^2$ can be written in the form

$$z_k = \zeta_k(\lambda_1, \lambda_2) \equiv h_k\left(\zeta_{3-k}(\lambda_1, \lambda_2), \lambda_k\right), \qquad k = 1, 2 \tag{7}$$

where $\zeta_k(\lambda_1, \lambda_2)$, $k = 1, 2$, are single valued, differentiable, periodic functions of the real variables λ_1, λ_2 (Hyp. 2c).

Also

$$\mathfrak{D}^2 = \sum_{\lambda_1 \in \mathfrak{s}_1^1} \mathfrak{i}_1^1(\lambda_1) = \sum_{\lambda_2 \in \mathfrak{s}_2^1} \mathfrak{i}_2^1(\lambda_2),$$

where

$$\mathfrak{s}_k^1 = [0 \leqq \lambda_k \leqq 2\pi].$$

Here $\mathfrak{i}_k^1(\lambda_k)$ (the image of the boundary of $\mathfrak{P}_{3-k}(\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k))$) is, except perhaps for finitely many values of λ_k a differentiable closed curve, which is the boundary of $\mathfrak{F}_k^2(\lambda_k)$.

For every $\lambda_1 \in \mathfrak{s}_1^1$ (except perhaps finitely many λ_1) this curve is defined by $\mathfrak{i}_1^1(\lambda_1) = [z_k = \zeta_k(\lambda_1, \lambda_2),\ k = 1, 2,\ 0 \leqq \lambda_2 \leqq 2\pi]$. A similar representation holds

[9]) $\mathfrak{P}_{3-k}[\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)]$ is a one-to-one image of $\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)$ in the z_{3-k}-plane. It should be noted that we could replace Hypothesis 2b by a weaker one, namely, by the assumption that $\overline{\mathfrak{F}}_k^2(\lambda_k)$ is a one-to-one image of a schlicht domain in an auxiliary ζ-plane.

for $\mathfrak{i}_2^1(\lambda_2)$ (Hyp. 2d). The intersection of the surface defined by (1) with $\mathfrak{M}$ is a simply connected segment $\mathfrak{T}^2$ of the surface (1) (Hyp. 3a). The segment $\mathfrak{T}^2$ of (1) can be represented in the form

$$z_k = \varphi_k(\mathbf{Z}), \qquad k = 1, 2, \qquad |\mathbf{Z}| \leqq 1, \tag{8}$$

where $\left|\frac{d\varphi_k(\mathbf{Z})}{d\mathbf{Z}}\right| \neq 0$ for $|\mathbf{Z}| \leqq 1$; (8) is a one-to-one mapping (Hypothesis 3b)[9a]. We assume that there are no intersection points of (1) and (2) which lie on $\mathfrak{m}^3$ (Hyp. 3c). (If this hypothesis is not satisfied then the formulae derived for N in the following have to be slightly modified.)

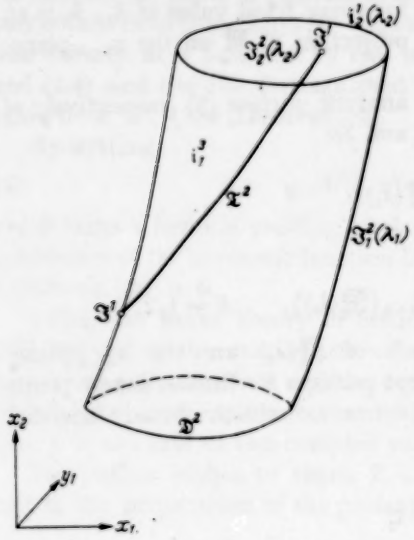


Fig. 1. Intersection of $\mathfrak{M}$ with $y_3 = y_3^0$. (Accordingly $\mathfrak{i}_1^3$, $\mathfrak{i}_2^3$, etc., are the intersections the corresponding manifold with $y_3 = y_3^0$)

LEMMA 2.1.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\tilde{Z}|=1} d \log f[\varphi_1(\tilde{\mathbf{Z}}), \varphi_2(\tilde{\mathbf{Z}})] \tag{9}$$

is the number of intersection points of $g=0$ *and* $f=0$ *in* $\mathfrak{M}$.

PROOF. According to the Hyp. (1b) g and f have no common factors. $f[\varphi_1(\mathbf{Z}), \varphi_2(\mathbf{Z})]$ can vanish in $\mathfrak{M}$ only at points of $g=0$ which lie on $[f=0]\cap\mathfrak{M}$. Therefore (9) yields the number of such points lying in $\mathfrak{T}^2$, the intersection of $g=0$ with $\mathfrak{M}$.

The boundary of the segment $\mathfrak{T}^2$ is a closed curve $\mathfrak{J}^1$ which lies entirely in $\mathfrak{m}^3$, the boundary of $\mathfrak{M}$ (Hyp. 3b*). Since $\mathfrak{m}^3 = \mathfrak{i}_1^3 + \mathfrak{i}_2^3$ every point of $\mathfrak{J}^1$ lies either in $\mathfrak{J}_1^1 = \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{i}_1^3$ or $\mathfrak{J}_2^1 = \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{i}_2^3$. Writing $\mathbf{Z} = \varrho \exp(i\tau)$, $\tilde{\mathbf{Z}} = \exp(i\tau)$ we assume that $\mathfrak{J}^1$ is a continuous image of $\mathfrak{p}^1 = [\tilde{\mathbf{Z}} = \exp(i\tau),\ 0 \leqq \tau \leqq 2\pi]$ under (8) with positive orientation corresponding to increasing values of τ (Hyp. 2e). Since every point of $\mathfrak{J}_k^1$ lies in $\mathfrak{i}_k^3$, to every point $(z_1, z_2) = (\varphi_1(\tilde{\mathbf{Z}}), \varphi_2(\tilde{\mathbf{Z}}))$ of $\mathfrak{J}^1$ there corresponds $\lambda_1 = \lambda_1(\tau)$ or $\lambda_2 = \lambda_2(\tau)$ so that (z_1, z_2) lies either in $\mathfrak{J}_1^2(\lambda_1)$ or in $\mathfrak{J}_2^2(\lambda_2)$. We assume (Hyp. 1c) that the set $\tilde{\mathfrak{e}}^1 = [0 \leqq \tau \leqq 2\pi]$ can be broken up into finitely many sufficiently small intervals $\tilde{\mathfrak{e}}_{k\nu}^1$ (of positive length) and finitely many points so that the arcs $[\tilde{\mathbf{Z}} = \exp(i\tau), \tau \in \tilde{\mathfrak{e}}_{k\nu}^1]$ are mapped into arcs of $\mathfrak{J}_k^1$. We assume simultaneously (Hyp. 1d) that the function $\lambda_k(\tau)$ is continuously differentiable and monotonic in every $\tilde{\mathfrak{e}}_{k\nu}^1$. Consequently for λ_k belonging to a set $\mathfrak{e}_{k\nu}^1$ (the image of $\tilde{\mathfrak{e}}_{k\nu}^1$ under $\lambda_k(\tau)$), τ is a continuously differentiable function of λ_k, say

$$\tau = \tau_{k\nu}(\lambda_k); \qquad \lambda_k \in \mathfrak{e}_{k\nu}^1.$$

[9a] We assume that to values $|\mathbf{Z}| = 1$ correspond points $(\varphi_1(\mathbf{Z}), \varphi_2(\mathbf{Z}))$ lying in $\mathfrak{m}^3$.

Thus for $\mathfrak{F}^1_\nu = [\tilde{\mathbf{Z}} = \exp(i\tau_{1\nu}(\lambda_1)),\ \lambda_1 \in \mathfrak{c}^1_{1\nu}]$ we have the representation $\mathfrak{J}_1$:

$$z_1 = h_1[\varphi_2(\exp(i\tau(\lambda_1))), \lambda_1], \qquad z_2 = \varphi_2[\exp(i\tau_{1\nu}(\lambda_1))], \tag{10}$$

and analogous formulae for

$$\mathfrak{F}^1_{2\nu} = [\tilde{\mathbf{Z}} = \exp(i\tau_{2\nu}(\lambda_2)),\ \lambda_2 \in \mathfrak{c}^1_{2\nu}].$$

We will write $\mathfrak{F}^1_{k\nu} = \mathfrak{J}(\mathfrak{c}^1_{k\nu})$, $\mathfrak{c}^1_k = \bigcup_\nu \mathfrak{c}^1_{k\nu}$, $\mathfrak{F}^1_k = \mathfrak{J}(\mathfrak{c}^1_k)$ in what follows. Let $\mathfrak{P}_{3-k}[\mathfrak{J}(\mathfrak{c}^1_{k\nu})]$ denote the projection of $\mathfrak{J}(\mathfrak{c}^1_{k\nu})$ on the z_{3-k}-plane, and let

$$\begin{cases} \mathfrak{J}(\mathfrak{c}^1_{1\nu}) = [z_1 = \tilde{z}_1(z_2),\ z_2 = z_2,\ z_2 \in \mathfrak{P}_2(\mathfrak{J}_1(\mathfrak{c}^1_{1\nu}))], \\ \mathfrak{J}(\mathfrak{c}^1_{2\nu}) = [z_2 = z_2,\ z_2 = \tilde{z}_2(z_1),\ z_1 \in \mathfrak{P}_1(\mathfrak{J}_2(\mathfrak{c}^1_{2\nu}))] \end{cases} \tag{11}$$

where $\tilde{z}_1(z_2)$ and $\tilde{z}_2(z_1)$ are single-valued functions which we obtain by eliminating λ_1 from (10) and by eliminating λ_2 from an analogous expression, respectively (Hyp. 1e). We assume that

$$\left| \frac{|d\tilde{z}_{3-k}(z_k)|^2 + |dz_k|^2}{|dz_k|^2} \right| \leqq A < \infty \tag{12}$$

(Hyp. 1f).

LEMMA 2.2. *Under the conditions formulated above the relation*

$$\begin{cases} \int\limits_{\mathfrak{p}^1} d\log f[\varphi_1(\tilde{\mathbf{Z}}), \varphi_2(\tilde{\mathbf{Z}})] \\ = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\bigcup_\nu \mathfrak{c}^1_{1\nu}} \left(\frac{\{f_{(s)}[h_1(z_2,\lambda_1), z_2];\ (-1)^s \varphi'_s(\tilde{\mathbf{Z}})\}\ (h_1(z_2,\lambda_1), \varphi'_2(\tilde{\mathbf{Z}}))}{f[h_1(z_2,\lambda_1), z_2]\, \varphi'_1(\tilde{\mathbf{Z}})} \right) d\lambda_1 \\ + \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\bigcup_\nu \mathfrak{c}^1_{1\nu}} \left(\frac{\{f_{(s)}[z_1, h_2(z_1,\lambda_2)];\ (-1)^s \varphi'_s(\tilde{\mathbf{Z}})\}\ (h_2(z_1,\lambda_2), \varphi'_1(\tilde{\mathbf{Z}}))}{f[z_1, h_2(z_2,\lambda_2)]\, \varphi'_2(\tilde{\mathbf{Z}})} \right) d\lambda_2 \end{cases} \tag{13}$$

holds. Here

$$\{f_{(s)}[h_1(z_2,\lambda_1), z_2];\ (-1)^s \varphi'_s(\tilde{\mathbf{Z}})\} = \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial z_1} & -\varphi'_2(\tilde{\mathbf{Z}}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z_2} & \varphi'_1(\tilde{\mathbf{Z}}) \end{matrix} \right|_{z_1 = h_1(z_2,\lambda_1)} \tag{14a}$$

$$\{f_{(s)}[z_1, h_2(z_1,\lambda_2)]\ (-1)^s \varphi'_s(\tilde{\mathbf{Z}})\} = \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial z_1} & -\varphi'_2(\tilde{\mathbf{Z}}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z_2} & \varphi'_1(\tilde{\mathbf{Z}}) \end{matrix} \right|_{z_2 = h_2(z_1,\lambda_2)} \tag{14b}$$

$$(h_s(z_{3-s},\lambda_s), \varphi'_s(\tilde{\mathbf{Z}})) = \left| \begin{matrix} \dfrac{\partial h_s}{\partial z_{3-s}} & -1 \\ \dfrac{\partial h_s}{\partial \lambda_s} & i\varphi'_{3-s}(\tilde{\mathbf{Z}}) \exp(i\tau) \dfrac{d\tau}{d\lambda_s} \end{matrix} \right| \tag{15}$$

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \exp(i\tau), \quad z_k = \varphi_k(\exp(i\tau)), \quad \tau = \tau_{k\nu}(\lambda_k), \quad \lambda_k \in \bigcup_\nu \mathfrak{c}^1_{k\nu}. \tag{16}$$

PROOF. The integrand of the left hand side of (13) can be written in the form

$$\frac{f_{\mathbf{Z}}[\varphi_1(\mathbf{Z}),\varphi_2(\mathbf{Z})]}{f[\varphi_1(\mathbf{Z}),\varphi_2(\mathbf{Z})]}\,d\mathbf{Z}, \qquad (\mathbf{Z}\equiv\tilde{\mathbf{Z}}). \tag{17}$$

In accordance with 1d the integration curve can be divided into two parts, $\mathfrak{p}^1=\mathfrak{p}_1^1+\mathfrak{p}_2^1$, and the integral on the left hand side of (13) can be written as a sum of two integrals. The first integral is given on the left hand side of (18); the second integral is built in an analogous way with $\mathfrak{p}_1^1$ replaced by $\mathfrak{p}_2^1$. Since the integrand on the left hand side of (18) is invariant with respect to a transformation of variable of integration

$$\int_{\mathfrak{p}_1^1}\frac{f_{\mathbf{Z}}[\varphi_1(\mathbf{Z}),\varphi_2(\mathbf{Z})]}{f[\varphi_1(\mathbf{Z}),\varphi_2(\mathbf{Z})]}\,d\mathbf{Z}=\int_{\mathfrak{P}_1[\mathfrak{J}(\mathfrak{c}_1^1)]}\frac{f_{z_1}(z_1,\tilde{z}_2(z_1))}{f(z_1,\tilde{z}_2(z_1))}\,dz_1; \tag{18}$$

here $\{z_1,\tilde{z}_2(z_1)\}$ are the points of $\mathfrak{J}(\mathfrak{c}_1^1)$; $\mathfrak{P}_1[\mathfrak{J}(\mathfrak{c}_1^1)]$ is the projection of $\mathfrak{J}(\mathfrak{c}_1^1)$ on the z_1-plane.

Now we use the fact that $\mathfrak{J}(\mathfrak{c}_1^1)$ lies in $\mathfrak{i}_1^3$ and therefore for every point of $\mathfrak{J}(\mathfrak{c}_1^1)$ for a conveniently chosen value of λ_1

$$\{z_1,\tilde{z}_2(z_1)\}=\{h_1(z_2,\lambda_1),z_2\}, \qquad (z_2\equiv\tilde{z}_2(z_1)) \tag{19}$$

holds. (See Hyp. 1e.)

Consequently we can replace $f(z_1,z_2)\equiv f(z_1,\tilde{z}_2(z_1))$ in the integrand on the right hand side of (18) by $f[h_1(z_2,\lambda_1),z_2]$. Since every point of $\mathfrak{p}_1^1$ lies on $|\mathbf{Z}|=1$, according to (8) $z_2=\varphi_2[\exp(i\tau)]$, where $\tau\in\sum_{\nu}\tilde{\mathfrak{e}}_{1\nu}^1$.

Further

$$\frac{df(z_1,\tilde{z}_2(z_1))}{d\mathbf{Z}}=\left[\frac{\partial f(z_1,z_2)}{\partial z_1}\,\frac{\partial\varphi_1(\mathbf{Z})}{\partial\mathbf{Z}}+\frac{\partial f(z_1,z_2)}{\partial z_2}\,\frac{\partial\varphi_2(\mathbf{Z})}{\partial\mathbf{Z}}\right], \tag{20}$$

$$\begin{cases} d\mathbf{Z}\equiv\left[\dfrac{dz_1}{d\mathbf{Z}}\right]^{-1}dz_1 \\ \quad=\left[\dfrac{d\varphi_1(\mathbf{Z})}{d\mathbf{Z}}\right]^{-1}\left[i\left(\dfrac{\partial h_1(z_2,\lambda_1)}{\partial z_2}\right)\dfrac{\partial\varphi_2(\mathbf{Z})}{\partial\mathbf{Z}}\exp(i\tau)\,\dfrac{d\tau}{d\lambda_1}+\dfrac{\partial h_1(z_2,\lambda_1)}{\partial\lambda_1}\right]d\lambda_1, \\ \lambda_1\in\mathfrak{c}_{1\nu}^1, \quad \mathbf{Z}=\tilde{\mathbf{Z}}. \end{cases} \tag{21}$$

In accordance with (3), (8), (16) in (20) and (21) $z_1=h_1[\varphi_2(\exp(i\tau(\lambda_1)),\lambda_1]$, $z_2=\varphi_2[\exp(i\tau(\lambda_1))]$, $\tilde{\mathbf{Z}}=\exp(i\tau(\lambda_1))$. Combining (20) and (21) and dividing by $f[h_1(z_2,\lambda_1),z_2]$ we obtain the integrand of the first expression on the right hand side of (13). We obtain the second term in an analogous way.

THEOREM 2.1. *The number N of the intersection points of the segments of the surfaces* (1) *and* (2) *which lie in the domain $\mathfrak{R}$ bounded by the segments $\mathfrak{i}_1^3$ and $\mathfrak{i}_2^3$* (*see* (3) and (4)) *equals*

$$N=N_1+N_2 \tag{22}$$

where

$$(23)\quad \left|\begin{aligned} N_1 = &-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\lambda_1\in\bigcup_\nu \mathfrak{S}_{1\nu}}\int\limits_{\lambda_1=0}^{2\pi}\frac{[f_{(s)}(\zeta_1,\zeta_2);(-1)^s\varphi_s'(\tilde{Z})]\,(h_1(\zeta_2,\lambda_1),\varphi_2'(\tilde{Z}))}{f(\zeta_1,\zeta_2)\,\varphi_1'(\tilde{Z})\,(\zeta_2-z_2)}\times\\ &\times\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(\zeta_2-\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}{\prod\limits_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(z_2-\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}\,\frac{d\zeta_2}{d\lambda_2}\,d\lambda_1\,d\lambda_2.\end{aligned}\right.$$

Here $\times$ *denotes the multiplication sign and*

$$(24)\qquad [f_{(s)}(\zeta_1,\zeta_2);(-1)^s\varphi_s'(\tilde{Z})]=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial\zeta_1} & -\varphi_2'(\tilde{Z})\\ \frac{\partial f}{\partial\zeta_2} & \varphi_1'(\tilde{Z})\end{vmatrix}$$

$\zeta_k=\zeta_k(\lambda_1,\lambda_2)$, $0\leqq\lambda_k\leqq 2\pi$ *lies in the distinguished boundary surface;* $\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1)$, $\nu=1,2,\ldots,n_1(\lambda_1)$ *are the zeros of the function* $f(z_1,z_2)$ *in the lamina* $\mathfrak{J}_1^2(\lambda_1)$. *For* N_2 *an analogous formula holds.*

Proof. We consider the integrand of the first integral on the right hand side of (13). For a fixed λ_1 (and $\tilde{Z}=\exp(i\tau(\lambda_1))$) and varying z_2 the integrand is a function of one complex variable defined in the domain $\mathfrak{P}_2[\mathfrak{J}_1^2(\lambda_1)]$ of the z_2-plane. ($\mathfrak{P}_2[\mathfrak{J}_1^2(\lambda_1)]$ is the projection of $\mathfrak{J}_1^2(\lambda_1)$ on the z_2-plane.) By Cauchy's theorem

$$(25)\quad \left|\begin{aligned} &\frac{\{f_{(s)}[h_1(z_2,\lambda_1),z_2];(-1)^s\varphi_s'(\tilde{Z})\}\,(h_1(z_2,\lambda_1),\varphi_2'(\tilde{Z}))}{f[h_1(z_2,\lambda_1),z_2]\,\varphi_1'(\tilde{Z})}\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{P}_2(\mathfrak{J}_1^2(\lambda_1))}\frac{\{f_{(s)}[h_s(\zeta_2,\lambda_1),\zeta_2];(-1)^s\varphi_s'(\tilde{Z})\}\,(h_1(\zeta_2,\lambda_1),\varphi_2'(\tilde{Z}))\prod\limits_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(\zeta_2-\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}{f[h_1(\zeta_2,\lambda_1),\zeta_2]\,\varphi_1'(\tilde{Z})\,(\zeta_2-z_2)\prod\limits_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(z_2-\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}\,d\zeta_2\end{aligned}\right.$$

$$(26)\quad \left|\begin{aligned} &\frac{\{f_{(s)}[z_1,h_2(z_1,\lambda_2)];(-1)^s\varphi_s'(\tilde{Z})\}\,(h_2(z_1,\lambda_2),\varphi_1'(\tilde{Z}))}{f[z_1,h_2(z_1,\lambda_2)]\,\varphi_2'(\tilde{Z})}\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{P}_1(\mathfrak{J}_1^2(\lambda_2))}\frac{\{f_{(s)}(\zeta_1,\zeta_2);(-1)^s\varphi_s'(\tilde{Z})\}\,((h_2(\zeta_1,\lambda_2);\varphi_1'(\tilde{Z}))\prod\limits_{\nu=1}^{n_1(\lambda_2)}(\zeta_1-\zeta_1^{(\nu)}(\lambda_2))}{f[\zeta_1,h_2(\zeta_1,\lambda_2)]\,\varphi_2'(\tilde{Z})\,(\zeta_1-z_1)\prod\limits_{\nu=1}^{n_1(\lambda_2)}(z_1-\zeta_1^{(\nu)}(\lambda_2))}\,d\zeta_1.\end{aligned}\right.$$

Replacing $h_1(\zeta_2,\lambda_1)$ by ζ_1 and $d\zeta_2$ by $\frac{\partial\zeta_2(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial\lambda_2}\,d\lambda_2$ and replacing the integrand of the first term on the right-hand side of (13) by the right-hand side of (25) we obtain (23).

Remark 1. Theorem 1 can be easily generalized to the case where $f(z_1,z_2)$ is a meromorphic function and can be represented in the form

$$(27)\qquad f(z_1,z_2)=\frac{f_1(z_1,z_2)}{f_2(z_1,z_2)},$$

in the domain $\mathfrak{R}$.

In this case instead of the factor $\dfrac{\prod_{\nu=1}^{m_1(\lambda_1)}(\zeta_2-\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}{\prod_{\nu=1}^{m_1(\lambda_1)}(z_2-\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}$ we have to write

$$\frac{\prod_{\nu=1}^{m_1(\lambda_1)}(\zeta_2-\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}{\prod_{\nu=1}^{m_1(\lambda_1)}(z_2-\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}\cdot\frac{\prod_{\nu=1}^{m_1(\lambda_1)}(z_2-\xi_2^{(\nu)}(\lambda_1))}{\prod_{\nu=1}^{m_1(\lambda_1)}(\zeta_2-\xi_2^{(\nu)}(\lambda_1))}$$

where $\xi_2^{(\nu)}(\lambda_1)$, $\nu=1, 2, \ldots, m_1(\lambda_1)$ are the poles of $f(z_1, z_2)$ in the lamina $\mathfrak{J}_1^2(\lambda_1)$.

REMARK 2. By replacing (1), (2) by a pair of equations

$$g(z_1, z_2)-a_1=0, \qquad f(z_1, z_2)-a_2=0 \tag{28}$$

we can obtain a formula yielding the number of (a_1, a_2)-points of the pair $\big(g(z_1, z_2),\ f(z_1, z_2)\big)$ in $\mathfrak{M}$.

When applying the Cauchy formula to the product of two functions $\tilde{f}(z)$ and $\tilde{g}(z)$ regular in the domain $\mathfrak{P}^2$, bounded by $\mathfrak{q}^1$ we can write either

$$\tilde{g}(z)\,\tilde{f}(z)=\frac{1}{2\pi i}\,\tilde{g}(z)\int_{\mathfrak{q}^1}\frac{\tilde{f}(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)}, \qquad z\in\mathfrak{P}^2 \tag{29}$$

or

$$\tilde{g}(z)\,\tilde{f}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{q}^1}\frac{\tilde{g}(\zeta)\,\tilde{f}(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z)}, \qquad z\in\mathfrak{P}^2. \tag{30}$$

The representation (23) corresponds to the first formula. In deed, the values of $f(\zeta_1, \zeta_2)$ and its derivatives are taken at the points of the distinguished boundary surfaces but the values of $g(z_1, z_2)$ are taken at $\{z_1, z_2\}=\{\varphi_1(\tilde{\mathbf{Z}}), \varphi_2(\tilde{\mathbf{Z}})\}$ along the boundary curve of the segment $\overline{\mathfrak{T}^2}$, intersection of $[g(z_1, z_2)=0]$ with the (three-dimensional) boundary $\mathfrak{m}^3$ of $\mathfrak{M}$. This curve lies in $\mathfrak{m}^3$, but, in general, *not* on the distinguished boundary surface $\mathfrak{D}^2$ of $\mathfrak{M}$.

Under certain additional hypotheses (see below) in the following we shall derive a formula corresponding to (30).

In the integrand of the first term of the right-hand side of (13) we shall replace the variable $\tilde{\mathbf{Z}}$, by a function of z_2 and λ_1, and in the second term by a function of z_1 and λ_2, under the following additional hypotheses: According to (8), $z_2=\varphi_2(\mathbf{Z})$. Therefore if $\varphi_2'(\mathbf{Z})\neq 0$, we can write (locally)

$$\mathbf{Z}=\hat{\mathbf{Z}}(z_2). \tag{31}$$

We assume (Hyp. 1g) that $\big(\hat{\mathbf{Z}}_{\lambda_1}(z_2)\big)^{-1}=\vartheta_2(z_2)$ is a regular function in a simply connected domain which includes $\mathsf{S}_{0\leq\lambda_1\leq 2\pi}\mathscr{P}_2[\mathfrak{J}_1^2(\lambda_1)]$.

According to (8) and (31) [9b])

$$\frac{d\varphi_2(\mathbf{Z})}{d\mathbf{Z}}=\frac{dz_2}{d\mathbf{Z}}=[\hat{\mathbf{Z}}_{\lambda_1}(z_2)]^{-1}=\vartheta_2(z_2)\equiv\vartheta_2(z_2, \lambda_1). \tag{32}$$

[9b]) The apparent variable λ_1 is introduced so as to have symmetrical expressions for φ_1' and φ_2'.

Since, according to (3), (10), at every point (z_1, z_2) of the curve $\mathcal{J}(\mathfrak{c}^1_{1\nu})$ we have $z_1 = h_1(z_2, \lambda_1)$

$$\frac{d\varphi_1(Z)}{dZ} = \frac{\partial h_1(z_2,\lambda_1)}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial Z} + \frac{\partial h_1(z_2,\lambda_1)}{\partial \lambda_1}\frac{d\lambda_1}{dZ}$$
$$= \frac{\partial h_1(z_2,\lambda_1)}{\partial z_2}\vartheta_2(z_2) + \frac{\partial h_1(z_2,\lambda_1)}{\partial \lambda_1}\Big/\frac{d\exp(i\tau(\lambda_1))}{d\lambda_1} \equiv \vartheta_1(z_2,\lambda_1).$$

(We note that for $(z_1, z_2) \in \mathcal{J}(\mathfrak{c}^1_{1\nu})$, $Z = \hat{Z} = \exp(\tau_{1\nu}(\lambda_1))$.) According to Hyp. 1g and for a fixed λ_1, $\vartheta_1(z_2, \lambda_1)$ and $\vartheta_2(z_2, \lambda_1)$ are analytic functions of complex variable z_2, regular in $\mathcal{P}_2(\mathfrak{Z}^2_1(\lambda_1))$. Therefore we can write the integrand of the first term on the right-hand side of (13)

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\{f_{(s)}[h_1(z_2,\lambda_1),z_2];(-1)^s\vartheta_s(z_2,\lambda_1)\}(h_1(z_2,\lambda_1),\vartheta_2(z_2,\lambda_1))}{f[h_1(z_2,\lambda_1),z_2]\,\vartheta_1(z_2,\lambda_1)} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{c}^1_1} \frac{\{f_{(s)}[h_1(\zeta_2,\lambda_1),\zeta_2];(-1)^s\vartheta_s(\zeta_2,\lambda_1)\}(h_1(\zeta_2,\lambda_1),\vartheta_2(\zeta_2,\lambda_1))}{f[h_1(\zeta_2,\lambda_1),\zeta_2]\,\vartheta_1(\zeta_2,\lambda_1)\,(\zeta_2-z_2)} \times \\ &\times \frac{\prod_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(\zeta_2-\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))\prod_{\nu=1}^{N_1(\lambda_1)}(\zeta_2-\eta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}{\prod_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(z_2-\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))\prod_{\nu=1}^{N_1(\lambda_1)}(z_2-\eta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}\frac{d\zeta_2}{d\lambda_2}\,d\lambda_2. \end{aligned}\right.$$

Here $\eta_2^{(\nu)}(\lambda_1)$, $\nu = 1, 2, \ldots, N_1(\lambda_1)$ are zeros of $\vartheta_1(z_2, \lambda_1)$ in $\mathcal{P}_2(\mathfrak{Z}^2_1(\lambda_1))$, the projection of $\mathfrak{Z}^2_1(\lambda_1)$ on the z_2-plane.

THEOREM 2.2. *In the case where in addition to the hypotheses mentioned before the Hyp.* 1g *is satisfied, we have*

$$(22)\qquad N = N_1 + N_2$$

where

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} N_1 = &-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\lambda_1\in S\,\mathfrak{c}_{1\nu}}\int_{\lambda_2=0}^{2\pi} \frac{[f_{(s)}(\zeta_1,\zeta_2);(-1)\,\vartheta_s(\zeta_2,\lambda_1)]\,(h_1(z_2,\lambda_1),\vartheta_2(z_2,\lambda_1))}{f(\zeta_1,\zeta_2)\,\vartheta_1(\zeta_2,\lambda_1)\,(\zeta_2-z_2)} \times \\ &\times \frac{\prod_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(\zeta_2-\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))\prod_{\nu=1}^{N_1(\lambda_1)}(\zeta_2-\eta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}{\prod_{\nu=1}^{n_1(\lambda_1)}(z_2-\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1))\prod_{\nu=1}^{N_1(\lambda_1)}(z_2-\eta_2^{(\nu)}(\lambda_1))}\frac{d\zeta_2}{d\lambda_2}\,d\lambda_2\,d\lambda_1. \end{aligned}\right.$$

Here [ ] *and* ( ) *are expressions introduced in* (24) *and* (15), $\zeta_2^{(\nu)}(\lambda_1)$ *are quantities described in the two last lines of the Theorem* 2.1 (p. 300); $\eta_2^{(\nu)}(\lambda_1)$ *are explained above.*

An analogous formula holds for N_2.

§ 3. The number of critical points of a function of two complex variables in a domain $\mathfrak{R}$

In the present section we shall consider an interesting special case of the problem considered in § 2, namely, the case where the functions[10] (2.1) and

[10] (2.n) = Formula (n) of § 2. The function p_{z_1}, the derivative of p with respect to z_2, is now the function f considered in § 2.

(2.2) are derivatives with respect to z_1 and z_2, respectively, of the same function, say of $p(z_1, z_2)$, i.e., we shall determine the number of points where simultanously

$$\frac{\partial p(z_1, z_2)}{\partial z_1} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p(z_1, z_2)}{\partial z_2} = 0 \tag{2}$$

in $\mathfrak{R}$.

The points where (1) and (2) are satisfied are critical points of $P = \log |p(z_1, z_2)|$, so that N is now the number of critical points [10]) of P in $\mathfrak{R}$. $p_{z_1}(z_1, z_2)$ and $p_{z_2}(z_1, z_2)$ play now the role of $g(z_1, z_2)$ and $f(z_1, z_2)$, respectively.

We assume that the hypotheses indicated in § 2 about p_{z_1} and p_{z_2} hold. It follows from (2) that [11])

$$f_{(1)}(z_1, z_2) = p_{z_1 z_1}(z_1, z_2), \tag{3}$$

$$f_{(2)}(z_1, z_2) = p_{z_2 z_2}(z_1, z_2). \tag{4}$$

Therefore in the integrand of (2.35) we have replaced $f_{(s)}(\zeta_1, \zeta_2)$ by the right hand side of (3) and (4).

REMARK 3. In a number of investigations MORSE and HEINS, (see [23], [24], [25] and papers mentioned there) applied topological methods in order to study critical points of a pseudo-harmonic function of two real variables. There arises the interesting problem of investigating how these methods can be generalized to the case of functions of two variables. If a twice continuously differentiable function is given in a closed domain then there exist relations between the number of its critical manifolds. This fact suggests enlarging the domain $\mathfrak{R}$ to a closed domain $\mathfrak{T}$ and continuing in a convenient way the function P into $\mathfrak{T}$. As will be indicated in the following this can be done in such a way that from the relations in $\mathfrak{T}$ corresponding relations for critical points in $\mathfrak{R}$ follow.

Suppose a domain $\mathfrak{R}$ of the kind described in § 2 is given in which a twice continuously differentiable function P is defined. By a one-to-one and twice continuously differentiable mapping $\mathcal{T}$ we transform $\mathfrak{R}$ into the bicylinder

$$\tilde{\mathfrak{R}} \equiv \mathcal{T}(\mathfrak{R}) = [|\zeta_k| < 1, \quad k = 1, 2)]. \tag{5}$$

We form then three additional copies $\tilde{\mathfrak{R}}_2$, $\tilde{\mathfrak{R}}_3$, $\tilde{\mathfrak{R}}_4$ of $\tilde{\mathfrak{R}}$ in wich the functions $\tilde{P}_n(\zeta_1, \zeta_2)$, $n = 2, 3, 4$ are defined such that

$$\tilde{P}_n(\zeta_1, \zeta_2) = \tilde{P}(\zeta_1, \zeta_2), \qquad n = 2, 3, 4. \tag{6}$$

P goes into $\tilde{P}(\zeta_1, \zeta_2)$ under $\mathcal{T}$.

[11]) It should be stressed that N represents the number of critical points where both derivatives vanish. On the other hand on the boundary of the domain lie maxima and minima points where the above derivatives do not vanish.

Let $\tilde{\mathfrak{i}}_k^3 = \mathcal{T}(\mathfrak{i}_k^3)$, $k=1, 2$, and $\tilde{\mathfrak{i}}_{kn}^3$, $k=1, 2$, $n=2, 3, 4$, be the corresponding parts of the boundaries of $\tilde{\mathfrak{M}}_n$, $n=2, 3, 4$. In order to obtain a closed manifold we shall "paste together" $\tilde{\mathfrak{M}}$ and $\tilde{\mathfrak{M}}_k$, $k=2, 3, 4$. Before joining $\tilde{\mathfrak{M}}$ with $\tilde{\mathfrak{M}}_k$, $k=2, 3, 4$ we insert a domain $\tilde{\mathfrak{E}}_{12}$ connecting $\tilde{\mathfrak{i}}_1^3 \equiv \mathcal{T}(\mathfrak{i}_1^3)$ with $\tilde{\mathfrak{i}}_{21}^3$, a domain $\tilde{\mathfrak{E}}_{13}$ connecting $\tilde{\mathfrak{i}}_2^3 \equiv \mathcal{T}(\mathfrak{i}_2^3)$ with $\tilde{\mathfrak{i}}_{32}^3$, $\tilde{\mathfrak{E}}_{23}$ connecting $\tilde{\mathfrak{i}}_{22}^3$ with $\tilde{\mathfrak{i}}_{42}^3$ and $\tilde{\mathfrak{E}}_{34}$ connecting $\tilde{\mathfrak{i}}_{31}^3$ with $\tilde{\mathfrak{i}}_{41}^3$. In $\tilde{\mathfrak{E}}_{MN}$, $M, N = 1, 2; 1, 3; 2, 4; 3, 4$; the continuation $\tilde{P}^*(\zeta_1, \zeta_2)$ of the functions $\tilde{P}(\zeta_1, \zeta_2)$, $\tilde{P}_n(\zeta_1, \zeta_2)$, $n=2, 3, 4$ is defined so that the new function is twice continuously differentiable in the closed manifold $\tilde{\mathfrak{M}} + \sum_{n=2}^{4} \tilde{\mathfrak{M}}_n + \sum \tilde{\mathfrak{E}}_{MN}$[12]). Further it is chosen in such a way that the number of critical points of $\tilde{P}^*(\zeta_1, \zeta_2)$ in the inserted parts $\tilde{\mathfrak{E}}_{MN}$ is known.

If the values of $\tilde{P}(\zeta_1, \zeta_2)$ on the segments $\mathfrak{i}_k^3$, $k=1, 2$, as well as the behavior of $\tilde{P}$ when we approach $\mathfrak{i}_k^3$ are known, the continuation $\tilde{P}^*(\zeta_1, \zeta_2)$ can be determined in the desired way. Since for the critical manifolds of a twice continuously differentiable function MORSE's inequalities hold and the critical manifolds in $\tilde{\mathfrak{E}}_{MN}$ are known, using these inequalities we obtain relations for the critical manifolds of $\tilde{P}(\zeta_1, \zeta_2)$ in the original domain $\tilde{\mathfrak{M}} = \mathcal{T}(\mathfrak{M})$. In a future publication the author expects to discuss the above sketched procedure in more detail.

REMARK 4. We note that the results of this paper can be used as a basis for a generalization of ROUCHÉ's theorem.

Bibliography

[1] BERGMAN, S.: Über die Abbildungen durch Paare von Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Jahresbericht d. deutschen Mathem.-Vereinigung **39**, 24—26 (1930). — [2] BERGMAN, S.: Über Funktionen zweier komplexer Veränderlichen die ebene Pol- und Nullflächen besitzen. Jahresbericht d. deutschen Mathem.-Vereinigung **39**, 266—268 (1930). — [3] BERGMAN, S.: Über die ausgezeichneten Randflächen in der Theorie der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Annalen **104**, 611—636 (1931). — [4] BERGMAN, S.: Über die Veranschaulichung der Kreiskörper und Bereiche mit ausgezeichneter Randfläche. Jahresbericht d. deutschen Mathem.-Vereinigung **42**, 238—252 (1932/33). — [5] BERGMAN, S.: Über den Wertvorrat einer Funktion von zwei komplexen Veränderlichen. Math. Z. **36**, 171—183 (1932). — [6] BERGMAN, S.: Über eine in gewissen Bereichen gültige Integraldarstellung der Funktionen zweier komplexer Variabler. Math. Z. **39**, 76—94, 605—608 (1934). — [7] BERGMAN, S.: Über eine Integraldarstellung von Funktionen zweier komplexer Veränderlicher. Rec. Math. (Mat. Sbornik), N.S. **1** (43), 851—862 (1936). — [8] BERGMAN, S.: Über das Verhalten der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen in Gebieten mit einer ausgezeichneten Randfläche. Mathematica **14**, 107—123 (1938). — [9] BERGMAN, S.: Über meromorphe Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. Compositio Math. **6**, 305—335 (1939). — [10] BERGMAN, S.: Geometric and potential-theoretical methods in the theory of functions of several complex variables. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. II, 1952, pp. 165—173. — [11] BERGMAN, S.: Kernel function and extended classes in the theory of functions of complex variables. Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles, 1953, pp. 135—157. — [12] BERGMAN, S.: Bounds for analytic functions in

[12]) If we connect the boundary part $\tilde{\mathfrak{i}}_k^3$ directly with $\tilde{\mathfrak{i}}_{nk}^3$ the obtained functions do not necessarily have to be continuously differentiable.

domains with a distinguished boundary surface, Math. Z. **63**, 173–194 (1955). – [*13*] BERGMAN, S., and J. MARCINKIEWICZ: Sur les fonctions analytiques de deux variables complexes. Fund. Math. **33**, 75–94 (1939). – [*14*] BERGMAN, S., and M. SCHIFFER: Bounded functions of two complex variables. Amer. J. Math. **64**, 161–169 (1944). – [*15*] BERGMAN, S., and M. SCHIFFER: Potential-theoretic methods in the theory of functions of two complex variables. Compositio Math. **10**, 213–240 (1952). – [*16*] BERS, L.: On bounded analytic functions of two complex variables in certain domains with distinguished boundary surfaces. Amer. J. Math. **64**, 514–529 (1942). – [*17*] BREMERMANN, H.: Analytic continuation of the kernel function and of the invariant metric in several complex variables. Proceedings of the Conference on Complex Variables. Ann Arbor, Michigan 1954. – [*18*] BREMERMANN, H.: Holomorphic continuation of the kernel function, Lectures on functions of a complex variable. Ann Arbor: The University of Michigan Press 1955. – [*19*] BREMERMANN, H.: On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions. Trans. Amer. Math. Soc. **91**, 246–276 (1959). – [*20*] GELBART, A.: On the growth of properties of a function of two complex variables given by its power series expansion. Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 199–210 (1941). – [*21*] LOWDENSLAGER, D.: Potential theory and a generalized Jensen-Nevanlinna formula for functions of several complex variables. J. Math. Mech. **7**, 207–218 (1958). – [*22*] LOWDENSLAGER, D.: Potential theory in bounded symmetric homogeneous complex domains. Annals of Math. **67**, 467–484 (1958). – [*23*] MORSE, M.: The topology of pseudo-harmonic functions. Duke Math. J. **13**, 21–42 (1946). – [*24*] MORSE, M.: Topological methods in the theory of functions of a complex variable. Princeton University Press 1947. – [*25*] MORSE, M., and M. HEINS: Topological methods in the theory of functions of a single complex variable. Annals of Math. **46**, 600–624, 625–666 (1945); **47**, 233–274 (1946). – [*26*] SOMMER, S.: Über die Integralformeln in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen. Math. Annalen **125**, 172–182 (1952). – [*27*] SZEGÖ, G.: Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. Math. Z. **9**, 218–270 (1921). [*28*] WEIL, A.: Sur les series de polynomes de deux variables complexes. C. R. Acad. Sci. Paris **194**, 1304 (1932). – [*29*] WEIL, A.: L'integral de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables. Math. Annalen **111**, 178–182 (1935). – [*30*] WEIL, A.: Varietes Kählériennes. Paris: Hermann 1958.

Stanford University, Stanford, Cal. (USA)

(Eingegangen am 6. September 1959)

CARLITZ, L.
Math. Zeitschr. 72, 307–318 (1960)

Congruences (mod 2^r) for the Coefficients of the Jacobi Elliptic Functions

By

L. CARLITZ

1. INTRODUCTION. Put

$$\operatorname{sn} x = \operatorname{sn}(x, k^2) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}(k^2) \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}; \tag{1.1}$$

where $A_{2m+1}(k^2)$ is a polynomial in k^2 with integral coefficients. Also put

$$\frac{x}{\operatorname{sn} x} = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{2m}(k^2) \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \tag{1.2}$$

where $\beta_{2m}(k^2)$ is a polynomial with rational coefficients. The writer has proved [2] that $A_n(k^2)$ satisfies

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} A_p^{(r-s)w/(p-1)} A_{n+sw} \equiv 0 \left(\operatorname{mod}(p^n, p^{er})\right), \tag{1.3}$$

where p is an *odd* prime,

$$p^{e-1}(p-1) \mid w \qquad (e \geqq 1) \tag{1.4}$$

and $r \geqq 1$. The result is to be interpreted in the following way: after expansion the coefficient of each power of k^2 in the left member $\equiv 0$.

In the next place the polynomial $\beta_{2m}(k^2)$ satisfies the congruence

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} A_p^{(r-s)w/(p-1)} \frac{\beta_{2m+sw}}{2m+sm} \equiv 0 \left(\operatorname{mod}(p^{2m-1}, p^{er})\right), \tag{1.5}$$

provided (1.4) holds and $p-1 \nmid 2m$; also we have

$$p\,\beta_{2m}(k^2) \equiv \begin{cases} -A_p^{2m/(p-1)} \pmod{p} & (p-1 \mid 2m) \\ 0 \pmod{p} & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{1.6}$$

and

$$\beta_{2m}(k^2) \equiv 0 \pmod{p^r} \qquad (p^r \mid 2m,\ p-1 \nmid 2m). \tag{1.7}$$

Results of a similar nature were obtained for the coefficients of the other Jacobi elliptic functions. Moreover the stated results were proved in a different way in [1].

It should be emphasized that in the above p is assumed odd throughout. In the present paper we examine the case $p=2$. The method of [1] does not seem to be applicable. Also the results are no longer quite so uniform. For example if we put

$$\operatorname{cn} x = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m}(k^2)\frac{x^{2m}}{(2m)!}, \tag{1.8}$$

then it was proved that

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}A_p^{(r-s)w/(p-1)}C_{2m+sw} \equiv 0 \pmod{(p^{2m}, p^{er})}, \tag{1.9}$$

where e, w satisfy (1.4). Now, on the other hand, we show that when $2^e \mid 2w$ and $r \geqq 1$, then

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}(1+k^2)^{(r-s)w}A_{n+2sw}(k^2) \equiv 0 \pmod{2^{er}}, \tag{1.10}$$

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}C_{n+2sw}(k^2) \equiv 0 \pmod{2^{er}}, \tag{1.11}$$

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}(1+k^2)^{(r-s)w}\beta_{n+2sw}(k^2) \equiv 0 \pmod{2^{er}}. \tag{1.12}$$

Note that powers of $1+k^2$ do not occur in the left member of (1.11). For the coefficients of $\operatorname{dn} x$, on the other hand, we get

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}k^{2(r-s)w}D_{n+2sw}(k^2) \equiv 0 \pmod{2^{er}}. \tag{1.13}$$

For other variants, see in particular (6.13), (6.14), (6.15), (7.12), (7.13) below.

2. We shall require a number of differentiation formulas. Let $D = d/dx$, so that

$$D \operatorname{sn} x = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

$$D^2 \operatorname{sn} x = -(1+k^2)\operatorname{sn} x - 2k^2 \operatorname{sn}^3 x,$$

so that

$$(D^2 + 1 + k^2)\operatorname{sn} x = -2k^2 \operatorname{sn}^3 x. \tag{2.1}$$

More generally

$$D \operatorname{sn}^n x = n \operatorname{sn}^{n-1} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

$$D^2 \operatorname{sn}^n x = n(n-1)\operatorname{sn}^{n-2} x \operatorname{cn}^2 x \operatorname{dn}^2 x - n \operatorname{sn}^n x (1 + k^2 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 x);$$

it follows that

$$(D^2 + 1 + k^2)\operatorname{sn}^n x$$
$$= n(n-1)\operatorname{sn}^{n-2} x \operatorname{cn}^2 x \operatorname{dn}^2 x - (n-1)(1+k^2)\operatorname{sn}^n x + 2nk^2 \operatorname{sn}^{n+2} x.$$

Thus

$$(2.2)\quad \begin{cases} (D^2+1+k^2)\,\mathrm{sn}^n x \\ \quad = n(n-1)\,\mathrm{sn}^{n-2}x - (n^2-1)(1+k^2)\,\mathrm{sn}^n x + n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^{n+2}x; \end{cases}$$

if n is odd each numerical coefficient on the right side is even.

In the next place

$$D\,\mathrm{cn}\,x = -\,\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{dn}\,x,$$

$$D^2\,\mathrm{cn}\,x = -(1-2k^2)\,\mathrm{cn}\,x - 2k^2\,\mathrm{cn}^3 x,$$

so that

$$(2.3)\quad (D^2+1)\,\mathrm{cn}\,x = 2k^2\,\mathrm{cn}\,x - 2k^2\,\mathrm{cn}^3 x.$$

More generally

$$D\,\mathrm{cn}^n x = -n\,\mathrm{cn}^{n-1}x\,\mathrm{sn}\,\mathrm{dn}\,x$$

$$D^2\,\mathrm{cn}^n x = n(n-1)\,\mathrm{cn}^{n-2}x\,\mathrm{sn}^2 x\,\mathrm{dn}^2 x - n\,\mathrm{cn}^n x(1-2k^2+2k^2\,\mathrm{cn}^2 x),$$

which gives

$$(2.4)\quad \begin{cases} (D^2+1)\,\mathrm{cn}^n x \\ \quad = n(n-1)\,\mathrm{cn}^{n-2}x - (n^2-1)(1-2k^2)\,\mathrm{cn}^n x - n(n+1)k^2\,\mathrm{cn}^{n+2}x; \end{cases}$$

here also if n is odd, each coefficient on the right side is even.

In the same way for $\mathrm{dn}\,x$, we get

$$(2.5)\quad (D^2+k^2)\,\mathrm{dn}\,x = 2\,\mathrm{dn}\,x - 2\,\mathrm{dn}^3 x,$$

$$(2.6)\quad \begin{cases} (D^2+k^2)\,\mathrm{dn}^n x \\ \quad = n(n-1)\,\mathrm{dn}^{n-2}x - (n^2-1)(k^2-2)\,\mathrm{dn}^n x - n(n+1)\,\mathrm{dn}^{n+2}x. \end{cases}$$

3. Now it is clear from repeated application of (2.1) and (2.2) that

$$(3.1)\quad (D^2+1+k^2)^r\,\mathrm{sn}\,x = 2^r \sum_{j=0}^{r} G_j(k^2)\,\mathrm{sn}^{2j+1}x,$$

where $G_j(k^2)$ is a polynomial in k^2 with integral coefficients. Thus, using (1.1), we get

$$(3.2)\quad \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} (1+k^2)^{r-s} A_{2m+2s} \equiv 0 \pmod{2^r}.$$

Similarly, from (2.3) and (2.4),

$$(3.3)\quad (D^2+1)^r\,\mathrm{cn}\,x = 2^r \sum_{j=0}^{r} G_j(k^2)\,\mathrm{cn}^{2j+1}x,$$

where $G_j(k^2)$ is a polynomial in k^2 with integral coefficients (not necessarily the same as the one in (3.1)). Thus, using (1.8), we get

$$(3.4)\quad \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} C_{2m+2s} \equiv 0 \pmod{2^r}.$$

Also, since (2.5) and (2.6) yield

$$(D^2 + k^2)^r \operatorname{dn}^n x = 2^r \sum_{j=0} G_j(k^2) \operatorname{dn}^{2j+1} x, \tag{3.5}$$

it follows that

$$\sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} k^{2(r-s)} D_{2m+2s} \equiv 0 \pmod{2^r}, \tag{3.6}$$

where

$$\operatorname{dn} x = \sum_{m=0}^{\infty} D_{2m}(k^2) \frac{x^{2m}}{(2m)!}. \tag{3.7}$$

We remark that it follows from (2.1) that

$$A_{2n+3} + (1 + k^2) A_{2n+1} \equiv 0 \pmod 4. \tag{3.7}$$

Also since $\operatorname{cn}^2 x \equiv \operatorname{dn}^2 x \equiv 1 \pmod 2$, it follows from (2.3) and (2.5) that

$$C_{2n+2} + C_{2n} \equiv 0 \pmod 4, \tag{3.8}$$

$$D_{2n+2} + k^2 D_{2n} \equiv 0 \pmod 4. \tag{3.9}$$

Thus we get

$$A_{2n+1} \equiv (-1)^n (1 + k^2)^n \pmod 4, \tag{3.10}$$

$$C_{2n} \equiv (-1)^n \pmod 4, \tag{3.11}$$

$$D_{2n} \equiv (-1)^n k^{2n} \pmod 4. \tag{3.12}$$

4. To extend these results we require the following

LEMMA 1. *Let*

$$f(x) = f(x, u) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(u) \frac{x^n}{n!},$$

where the $f_n(u)$ are polynomials in the indeterminate u with rational coefficients that are integral (mod 2). *Also assume that*

$$(D^2 - \lambda)^r f(x) \equiv 0 \pmod{2^r} \tag{4.1}$$

for all $r \geqq 1$, where $\lambda = \lambda(u)$ is a polynomial with coefficients integral (mod 2). *Then we have*

$$(D^{2w} - \lambda^w)^r f(x) \equiv 0 \pmod{2^{er}}, \tag{4.2}$$

where $2^e \mid 2w$.

The statement

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(u) \frac{x^n}{n!} \equiv 0 \pmod{2^r}$$

means

$$g_n(u) \equiv 0 \pmod{2^r} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

To prove the Lemma, we take

$$D^{2w} - \lambda^w = \big((D^2 - \lambda) + \lambda\big)^w - \lambda^w = \sum_{j=1}^{w} \binom{w}{j} \lambda^{w-j} (D^2 - \lambda)^j, \tag{4.3}$$

so that

$$(D^{2w} - \lambda^w) f(x) = \sum_{j=1}^{t} \binom{w}{j} \lambda^{w-j} (D^2 - \lambda)^j f(x). \tag{4.4}$$

Now by (4.1)

$$(D^2 - \lambda)^j f(x) \equiv 0 \pmod{2^j};$$

since $j!$ is divisible by 2^{j-1} at most, it follows that

$$\frac{1}{j!} (D^2 - \lambda)^j f(x) \equiv 0 \pmod 2 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Since by hypothesis $2^{r-1} | w$, it is clear that (4.3) implies

$$(D^{2w} - \lambda^w) f(x) \equiv 0 \pmod{2^r}.$$

This is the case $r = 1$ of (4.2). For the general case we rewrite (4.3) in the form

$$D^{2w} - \lambda^w = w \sum_{j=1}^{w} \frac{1}{j} \binom{w-1}{j-1} \lambda^{w-j} (D^2 - \lambda)^j.$$

Raising both sides to the r-th power, we get

$$(D^{2w} - \lambda^w)^r f(x) = w^r \left\{ \sum_{j=1}^{w} \frac{1}{j} \binom{w-1}{j-1} \lambda^{w-j} (D^2 - \lambda)^j \right\}^r f(x).$$

Expanding the right member it is clear that each term $\equiv 0 \pmod{2^{er}}$. This completes the proof of the Lemma.

Another useful result is

LEMMA 2. *With the hypothesis of Lemma 1, let* $\lambda(u) \equiv \lambda_1(u) \pmod 2$, *where* $\lambda_1(u)$ *is another polynomial with coefficients integral* (mod 2). *Then we have*

$$(D^{2w} - \lambda_1^w)^r f(x) \equiv 0 \pmod{2^{er}}. \tag{4.3}$$

Indeed if $\lambda(u) = \lambda_1(u) + 2\sigma(u)$, where σ has integral coefficients, then

$$(D^2 - \lambda_1)^r = (D^2 - \lambda + 2\sigma)^r = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} (2\sigma)^{r-s} (D^2 - \lambda)^s.$$

Thus if (4.1) holds it also holds when λ is replaced by λ_1. Now, applying Lemma 1, we obtain (4.3).

5. We now apply the Lemma of § 4 separately to (3.1), (3.3), (3.5) with $\lambda = -1 - k^2$, -1, $-k^2$, respectively. We may state

THEOREM 1. *Let* $r \geqq 1$ *and* $2^e | 2w$. *Then the coefficients* $A_n(k^2)$, $C_n(k^2)$, $D_n(k^2)$ *defined by* (1.1), (1.8), (3.7), *respectively, satisfy*

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} (1 + k^2)^{(r-s)w} A_{n+2sw}(k^2) \equiv 0 \pmod{2^{er}}, \tag{5.1}$$

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}C_{n+2sw}(k^2)\equiv 0 \pmod{2^{er}}, \tag{5.2}$$

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}k^{2(r-s)w}D_{n+2sw}(k^2)\equiv 0 \pmod{2^{er}}. \tag{5.3}$$

Indeed these results admit of an immediate generalization. Put

$$(\operatorname{sn} x)^j=\sum_{n=j}^{\infty}A_n^{(j)}(k^2)\frac{x^n}{n!},$$

$$(\operatorname{cn} x)^j=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(j)}(k^2)\frac{x^n}{n!},$$

$$(\operatorname{dn} x)^j=\sum_{n=0}^{\infty}D_n^{(j)}(k^2)\frac{x^n}{n!};$$

then we have

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}(1+k^2)^{(r-s)w}A_{n+2sw}^{(j)}(k^2)\equiv 0 \pmod{2^{er}}, \tag{5.4}$$

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}C_{n+2sw}^{(j)}(k^2)\equiv 0 \pmod{2^{er}}, \tag{5.5}$$

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}D_{n+2sw}^{(j)}(k^2)\equiv 0 \pmod{2^{er}}, \tag{5.6}$$

where in (5.4) j is odd and positive, while in (5.5) and (5.6) it is enough to assume j odd.

For j even we return to the formulas (2.2), (2.4), (2.6). In view of the identities $\operatorname{cn}^2 x=1-\operatorname{sn}^2 x$, $\operatorname{dn}^2 x=1-k^2\operatorname{sn}^2 x$, it will suffice to consider (2.2), which we rewrite as

$$D^2\operatorname{sn}^n x=n(n-1)\operatorname{sn}^{n-2}x-n^2(1+k^2)\operatorname{sn}^n x+n(n+1)k^2\operatorname{sn}^{n+2}x.$$

This implies, for j even

$$A_{2r}^{(j)}\equiv 0 \pmod{2^r}. \tag{5.7}$$

Nothing is now gained by applying Lemma 1. The corresponding results for $C_{2r}^{(j)}$ and $D_{2r}^{(j)}$ are

$$C_{2r}^{(j)}\equiv 0 \pmod{2^r}, \tag{5.8}$$

$$D_{2r}^{(j)}\equiv 0 \pmod{2^r}. \tag{5.9}$$

We state

THEOREM 2. *For j odd, $A_n^{(j)}$, $C_n^{(j)}$, $D_n^{(j)}$ satisfy* (5.4), (5.5), (5.6), *where $2^e \mid 2w$; for j even, they satisfy* (5.7), (5.8), (5.9).

6. There are in all twelve Jacobi functions; it is convenient to separate them into two classes, namely sn, cn, dn, sc, sd, nc, nd, ed, dc in the first

class and ns, cs, ds in the second class — the notation is that of GLAISHER [4, p. 494]. The functions sn, cn, dn are covered by Theorem 1; while nc and nd are covered by the case $j=-1$ of (5.5) and (5.6). The remaining four functions in the first class can be handled by the method used above. It is however simpler to make use of the well-known formulas for the linear transformation of the Jacobi functions [3, p. 475], namely

$$\operatorname{sn}\left(k'x, \frac{k^2}{k^2-1}\right) = k' \operatorname{sd}(x, k^2), \tag{6.1}$$

$$\operatorname{cn}\left(k'x, \frac{k^2}{k^2-1}\right) = \operatorname{cd}(x, k^2), \tag{6.2}$$

$$\operatorname{dn}\left(k'x, \frac{k^2}{k^2-1}\right) = \operatorname{nd}(x, k^2), \tag{6.3}$$

$$\operatorname{sn}(ix, 1-k^2) = i \operatorname{sc}(x, k^2), \tag{6.4}$$

$$\operatorname{cn}(ix, 1-k^2) = \operatorname{nc}(x, k^2), \tag{6.5}$$

$$\operatorname{dn}(ix, 1-k^2) = \operatorname{dc}(x, k^2), \tag{6.6}$$

$$\operatorname{cn}\left(kx, \frac{1}{k^2}\right) = \operatorname{dn}(x, k^2). \tag{6.7}$$

We shall use the notation

$$\operatorname{sd}(x, k^2) = \sum_0^\infty \operatorname{sd}_n(k^2) \frac{x^n}{n!}, \tag{6.8}$$

and so on for the other functions not already introduced above. Now (6.1) implies

$$(1-k^2)^{\frac{1}{2}(n-1)} A_n\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) = \operatorname{sd}_n(k^2). \tag{6.9}$$

In (5.1) replace k^2 by $k^2/(k^2-1)$, so that

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \left(\frac{1-2k^2}{1-k^2}\right)^{(r-s)w} A_{n+2sw}\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) \equiv 0 \pmod{2^{er}}.$$

Thus by Lemma 2 and (6.9) we get

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \operatorname{sd}_{n+2sw} \equiv 0 \pmod{2^{er}}. \tag{6.10}$$

Similarly, since (6.2) yields

$$(1-k^2)^{\frac{1}{2}n} C_n\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) = \operatorname{cd}_n(k^2),$$

while (5.2) implies

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} C_{n+2sw}\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) \equiv 0 \pmod{2^{er}},$$

we find that

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} (1+k^2)^{(r-s)w} \operatorname{cd}_{n+2sw} \equiv 0 \pmod{2^{er}}. \tag{6.11}$$

In the same way we get from (6.3)

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}k^{2(r-s)w}\,\mathrm{nd}_{n+2sw}\equiv 0 \pmod{2^{er}}. \tag{6.12}$$

The formulas (6.4), (6.5), (6.6) give

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s+sw}\binom{r}{s}k^{2(r-s)w}\,\mathrm{sc}_{n+2sw}\equiv 0 \pmod{2^{er}}, \tag{6.13}$$

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s+sw}\binom{r}{s}\,\mathrm{nc}_{n+2sw}\equiv 0 \pmod{2^{er}}, \tag{6.14}$$

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s+sw}\binom{r}{s}(1+k^2)^{2(r-s)w}\,\mathrm{dc}_{n+2sw}\equiv 0 \pmod{2^{er}}. \tag{6.15}$$

Finally (6.7) implies the equivalence of (5.2) and (5.3).

We may state

THEOREM 3. *The coefficients of the functions* sd, cd, nd, sc, nc, dc, *satisfy* (6.10), (6.11), (6.12), (6.13), (6.14), (6.15), *respectively, where* $2^e \mid 2w$ *and* $r \geqq 1$.

7. In addition to the notation defined in (1.2) we put

$$x\,\mathrm{cs}\,x=\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_{2m}(k^2)\frac{x^{2m}}{(2m)!}, \tag{7.1}$$

$$x\,\mathrm{ds}\,x=\sum_{m=0}^{\infty}\delta_{2m}(k^2)\frac{x^{2m}}{(2m)!}. \tag{7.2}$$

To begin with, we note that the relation

$$\frac{d\,\mathrm{sn}\,x}{dx}=\mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x$$

implies

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sn}^{2n+1}x}{2x+1}\sum_{r+s=n}\frac{(\frac{1}{2})_r(\frac{1}{2})_s}{r!\,s!}k^{2r}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sn}^{2n+1}x}{(2n+1)!}\,Q_n(k^2), \tag{7.3}$$

where

$$Q_n(k^2)=(2n)!\sum_{r+s=n}\frac{(\frac{1}{2})_r(\frac{1}{2})_s}{r!\,s!}k^{2r}.$$

The coefficients of $Q_n(k^2)$ are integral. Comparing (7.3) with (1.2) we conclude that the coefficients of $\beta_{2n}(k^2)$ are integral (mod 2). Since

$$\gamma_{2n}(k^2)=\sum_{r=0}^{n}\binom{2n}{2r}C_{n-r}(k^2)\,\beta_{2r}(k^2),$$

$$\delta_{2n}(k^2)=\sum_{r=0}^{n}\binom{2n}{2r}D_{n-r}(k^2)\,\beta_{2r}(k^2),$$

it follows that the coefficients of $\gamma_{2n}(k^2)$ and $\delta_{2n}(k^2)$ are also int. al (mod 2).

In the next place, we recall the duplication formula

$$\operatorname{sn} 2x = \frac{2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 x}.$$

From this we get

$$\frac{x}{\operatorname{sn} x} = \frac{2x}{\operatorname{sn} 2x} \frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 x}. \tag{7.4}$$

If for brevity we put

$$\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn}}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 x} = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m}(k^2) \frac{x^{2m}}{(2m)!}, \tag{7.5}$$

then (7.4) and (1.2) imply

$$\beta_{2n}(k^2) = \sum_{r=0}^{n} \binom{2n}{2r} 2^{2r} \beta_{2r}(k^2) \alpha_{2n-2r}(k^2).$$

Since $\beta_{2r+1}(k^2) = \alpha_{2r+1}(k^2) = 0$, we may also write this in the form

$$\beta_n(k^2) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 2^r \beta_r(k^2) \alpha_{n-r}(k^2), \tag{7.6}$$

or, in symbolic form,

$$\beta^n = (2\beta + \alpha)^n. \tag{7.7}$$

Now consider

$$\begin{aligned}
(\beta^2 + 1 + k^2)^r &= \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} (1 + k^2)^{r-s} \beta^{2s} \\
&= \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} (1 + k^2)^{r-s} (2\beta + \alpha)^{2s} \\
&= \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} (1 + k^2)^{r-s} \left(4(\beta^2 + \alpha\beta) + \alpha^2\right)^s \\
&= \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} (1 + k^2)^{r-s} \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} \alpha^{2(s-j)} 4^j (\beta^2 + \alpha\beta)^j \\
&= \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} 4^j (\beta^2 + \alpha\beta)^j \sum_{s=j}^{r} \binom{r-j}{s-j} (1 + k^2)^{r-s} \alpha^{2(s-j)}.
\end{aligned}$$

Thus

$$(\beta^2 + 1 + k^2)^r = \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} 4^j (\beta^2 + \alpha\beta)^j (\alpha^2 + 1 + k^2)^{r-j}. \tag{7.8}$$

Now the left member of (7.5) is equal to

$$\sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \operatorname{sn}^{4n} x = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} \frac{\operatorname{sn}^{4n+1} x}{4n+1}.$$

Hence, using (5.4), we get

$$(\alpha^2 + 1 + k^2)^r \equiv 0 \pmod{2^r},$$

so that (7.8) yields

$$(\beta^2+1+k^2)^r \equiv 0 \pmod{2^r}. \tag{7.9}$$

In the next place

$$\beta^{2n}(\beta^2+1+k^2)^r = \big(\beta^2+1+k^2-(1+k^2)\big)^n(\beta^2+1+k^2)^r$$
$$= \sum_{s=0}^{n}(-1)^{n-s}(1+k^2)^{n-s}(\beta^2+1+k^2)^{r+s}.$$

In view of (7.9), this implies

$$\beta^{2n}(\beta^2+1+k^2)^r \equiv 0 \pmod{2^r}. \tag{7.10}$$

Now applying Lemma 1 to (7.10), we get

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}(1+k^2)^{(r-s)w}\beta_{2n+2sw}(k^2) \equiv 0 \pmod{2^{e'r}}, \tag{7.11}$$

where $2^e \mid 2w$.

As for the coefficients of cs x and ds x, we apply (6.4) and (6.1). We thus obtain

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s+sw}\binom{r}{s}k^{2(r-s)w}\gamma_{2n+2sw}(k^2) \equiv 0 \pmod{2^{e'r}}, \tag{7.12}$$

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s+sw}\binom{r}{s}\delta_{2n+2sw}(k^2) \equiv 0 \pmod{2^{e'r}}. \tag{7.13}$$

This completes the proof of

THEOREM 4. *The coefficients* $\beta_{2n}(k^2)$, $\gamma_{2n}(k^2)$, $\delta_{2n}(k^2)$ *defined by* (1.2), (7.1), (7.2), *respectively, satisfy* (7.11), (7.12), (7.13), *where* $2^e \mid 2w$ *and* $r \geqq 1$.

We remark that higher powers of ns, cs and ds can be handled without difficulty. If we put

$$\left(\frac{x}{\operatorname{sn} x}\right)^j = \sum_{0}^{\infty}\beta_{2n}^{(j)}(k^2)\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$(x \operatorname{cs} x)^j = \sum_{0}^{\infty}\gamma_{2n}^{(j)}(k^2)\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$(x \operatorname{ds} x)^j = \sum_{0}^{\infty}\delta_{2n}^{(j)}(k^2)\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

then the coefficients in $\beta_{2n}^{(j)}(k^2)$, $\gamma_{2n}^{(j)}(k^2)$, $\delta_{2n}^{(j)}(k^2)$ are integral (mod 2). We find that

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}(1+k^2)^{(r-s)w}\beta_{2n+2sw}^{(j)}(k^2) \equiv 0 \pmod{2^{e'r}} \tag{7.14}$$

for $2^e \mid 2w$ and j odd $\geqq 1$, while

$$\beta_{2r}^{(j)}(k^2) \equiv 0 \pmod{2^r} \tag{7.15}$$

for j even and $\geqq 0$. The results for $\gamma_{2n}^{(j)}(k^2)$ and $\delta_{2n}^{(j)}(k^2)$ are of a similar nature.

8. Since

$$\operatorname{sn}^4 x \equiv 0 \pmod 8,$$

(7.5) reduces to

$$\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m}(k^2) \frac{x^{2m}}{(2m)!} \pmod 8.$$

Comparing with (1.1) we get

$$\alpha_{2m}(k^2) \equiv A_{2m+1}(k^2) \pmod 8. \tag{8.1}$$

In particular it follows from (3.10) that

$$\alpha_{2m}(k^2) \equiv (-1)^m (1+k^2)^m \pmod 4. \tag{8.2}$$

Now from (7.7)

$$\beta^{2n} = \alpha^{2n} + \binom{2n}{2} (2\beta)^2 \alpha^{2n-2} + \cdots.$$

Thus if $2^e \mid 2n$ we get

$$\beta_{2n}(k^2) \equiv \alpha_{2n}(k^2) \pmod{2^{e+1}}; \tag{8.3}$$

indeed, using (8.2),

$$\beta_{2n}(k^2) \equiv \alpha_{2n}(k^2) + 4n(1+k^2)^n \pmod{2^{e+2}}. \tag{8.4}$$

In particular it is evident from (8.2) and (8.3) that

$$\beta_{2n}(k^2) \equiv (-1)^n (1+k^2)^n \pmod 4. \tag{8.5}$$

The corresponding formulas for $\gamma_{2n}(k^2)$ and $\delta_{2n}(k^2)$ may be obtained by applying (6.4) and (6.1). We get

$$(-1)^n \gamma_{2n}(k^2) \equiv \alpha_{2n}(1-k^2) + 4n k^{2n} \pmod{2^{e+2}}, \tag{8.6}$$

$$\delta_{2n}(k^2) \equiv (1+k^2)^n \alpha_{2n}\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) + 4n \pmod{2^{e+2}}, \tag{8.7}$$

$$\gamma_{2n}(k^2) \equiv (2-k^2)^n \pmod 4, \tag{8.8}$$

$$\delta_{2n}(k^2) \equiv (1-2k^2)^n \pmod 4. \tag{8.9}$$

As for higher powers, if we put

$$\left(\frac{\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1-k^2 \operatorname{sn}^4 x}\right)^j \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m}^{(j)}(k^2) \frac{x^{2m}}{(2m)!} \qquad (j \geqq 1), \tag{8.10}$$

then (7.7) becomes

$$(\beta^{(j)})^n \equiv (2\beta^{(j)} + \alpha^{(j)}). \tag{8.11}$$

It follows from (8.10) and (8.2) that

$$\alpha_{2n}^{(j)}(k^2) \equiv \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}n(j+1)} (1+k^2)^n \pmod 4 & (j \text{ odd}) \\ 0 \pmod 4 & (j \equiv 0 \pmod 4) \\ 0 \pmod 4 & (j \equiv 2 \pmod 4,\ n > 1). \end{cases} \tag{8.12}$$

From (8.11) we obtain

$$\beta_{2n}^{(j)}(k^2) \equiv \alpha_{2n}^{(j)}(k^2) \pmod{2^{r+1}}, \tag{8.13}$$

where $2^r \mid 2n$; also using (8.12) a congruence (mod 2^{r+2}) is obtained. We note in particular that (8.12) and (8.13) yield

$$\beta_{2n}^{(j)}(k^2) \equiv \begin{cases} (-1)^{\frac{1}{2}n(j+1)}(1+k^2)^n \bmod 4 & (j \text{ odd}) \\ 0 \pmod 4 & \left(j \equiv 0 \pmod 4\right) \\ 0 \pmod 4 & \left(j \equiv 2 \pmod 4,\ n > 1\right). \end{cases} \tag{8.14}$$

Like results for $\gamma_{2n}^{(j)}(k^2)$ and $\delta_{2n}^{(j)}(k^2)$ are readily obtained.

References

[1] CARLITZ, L.: Arithmetic properties of elliptic functions. Math. Z. **64**, 425–434 (1956). — [2] CARLITZ, L.: Congruences connected with the power series expansions of the Jacobi elliptic functions. Duke Math. J. **20**, 1–12 (1953). — [3] FRICKE, R.: Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, Bd. 1. Leipzig u. Berlin 1916. — [4] WHITTAKER, E. T., and G. N. WATSON: Modern Analysis, 4. edit. Cambridge 1927.

Dept. of Math., Duke University, Durham, N.C. (U.S.A.)

(Eingegangen am 9. Februar 1959)

SPECHT, W.
Math. Zeitschr. 72, 319–331 (1960)

Freie Untergruppen der binären unimodularen Gruppe

Von
WILHELM SPECHT

Die *binäre unimodulare Gruppe* $\mathfrak{U}_2$, d.h. die Gruppe aller zweireihigen komplexen Matrizen

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

mit der Determinante

$$\det M = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

enthält, wie man weiß, freie Gruppen vom Range 2 und deshalb auch freie Gruppen von beliebigem endlichem und von abzählbar unendlichem Range als Untergruppen. Ein bekanntes[1]) Beispiel hierfür ist die von den beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugte freie Gruppe $\mathfrak{F}_2 = \{A, B\}$ vom Range 2, aus der nach bekanntem Verfahren durch die Matrizen

$$C_k = B^{-k} A B^k \qquad (-\infty < k < +\infty)$$

mit beliebigen ganzen Exponenten k eine freie Gruppe $\mathfrak{F}_\omega = \{\bigcup_k C_k\}$ abzählbar unendlichen Ranges gewonnen werden kann. Allerdings lassen sich bei diesem Beispiel die erzeugenden Matrizen C_k der Gruppe $\mathfrak{F}_\omega$ nicht leicht in einfacher geschlossener Gestalt angeben.

Ein in dieser Hinsicht bequemeres Beispiel bietet der

SATZ 1. *Für jede (reelle oder komplexe) transzendente Zahl τ erzeugen die Matrizen*

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad V(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

eine freie Gruppe

$$\mathfrak{H}_2(\tau) = \{U, V(\tau)\} \tag{1.2}$$

vom Range 2, die Matrizen

$$W_k(\tau) = U^{-k} V(\tau)\, U^k = \begin{pmatrix} 1 + k\tau & \tau \\ -k^2\tau & 1 - k\tau \end{pmatrix} \qquad (-\infty < k < +\infty) \tag{1.3}$$

[1]) Vgl. MAGNUS, W.: Untersuchungen über einige unendliche diskontinuierliche Gruppen. Math. Ann. **105**, 52–74 (1931).

mit beliebigen ganzen Exponenten k eine freie Gruppe

$$\mathfrak{H}_\omega(\tau) = \{\bigcup_k W_k(\tau)\} \tag{1.4}$$

abzählbar unendlichen Ranges.

Dieser Sachverhalt, dessen Beweis wir alsbald erbringen werden, legt die Parallelfrage nach der Struktur der durch die beiden Matrizen

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

erzeugten Gruppe $\mathfrak{H}_2(\zeta) = \{U, V(\zeta)\}$ nahe, in der ζ eine beliebige, von Null verschiedene, algebraische Zahl bezeichnet. Da eine vollständige Behandlung dieser Frage recht schwierig zu sein scheint, will ich mich in der vorliegenden Arbeit darauf beschränken, die Bedingungen anzugeben, unter denen die Gruppe $\mathfrak{H}_2(\zeta)$ eine freie Gruppe vom Range 2 ist.

Im Hinblick auf den Inhalt des Satzes 1 wollen wir der einfacheren Ausdrucksweise wegen eine von Null verschiedene komplexe Zahl ζ kurz als *Ausnahmewert* bezeichnen, wenn die durch sie bestimmte Gruppe $\mathfrak{H}_2(\zeta)$ keine freie Gruppe vom Range 2 ist, wenn also zwischen ihren Erzeugenden U und $V = V(\zeta)$ eine nichttriviale Relation besteht. Ohne Einschränkung darf dann angenommen werden, es bestehe eine *normierte Relation*

$$F_n(U, V) \equiv U^{a_0} V^{b_0} U^{a_1} V^{b_1} \dots U^{a_n} V^{b_n} = E \tag{2}$$

positiver *Länge* n mit ganzzahligen, von Null verschiedenen Exponenten $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ und der zweireihigen Einheitsmatrix E. Überdies bezeichnen wir die komplexe Zahl ζ als *Ausnahmewert n-ter Stufe*, falls zwischen den Matrizen $U, V = V(\zeta)$ zwar eine normierte Relation der Länge n, aber keine normierte Relation geringerer Länge besteht.

Für einen beliebigen natürlichen Index $1 \leqq n < \infty$ bezeichnen wir ferner als *(abgeschlossenen) Kreisstreifen* $\overline{\mathfrak{C}}_n$ den kleinsten konvexen Bereich der komplexen Zahlenebene, der die beiden Kreisbereiche

$$|z+2| \leqq 2\cos\frac{\pi}{n+1} \quad \text{und} \quad |z-2| \leqq 2\cos\frac{\pi}{n+1}$$

enthält, also den (abgeschlossenen) Bereich aller komplexen Zahlen, die von der Strecke $\overline{\mathfrak{C}}_1 = \{-2 \leqq x \leqq 2\}$ auf der reellen Zahlengeraden höchstens den Abstand $2\cos\frac{\pi}{n+1}$ haben. Dann ist die Vereinigungsmenge $\mathfrak{C}_\omega = \bigcup_n \overline{\mathfrak{C}}_n$ ein *offener Kreisstreifen*, nämlich das (offene) Gebiet aller komplexen Zahlen, die von der Strecke $\mathfrak{C}_1$ einen kleineren Abstand als 2 besitzen (vgl. Figur).

Unter diesen Bezeichnungen gilt der merkwürdige

SATZ 2. *Jeder Ausnahmewert ζ n-ter Stufe ist eine algebraische Zahl höchstens vom Grade n, die dem abgeschlossenen Kreisstreifen $\overline{\mathfrak{C}}_n$ angehört.*

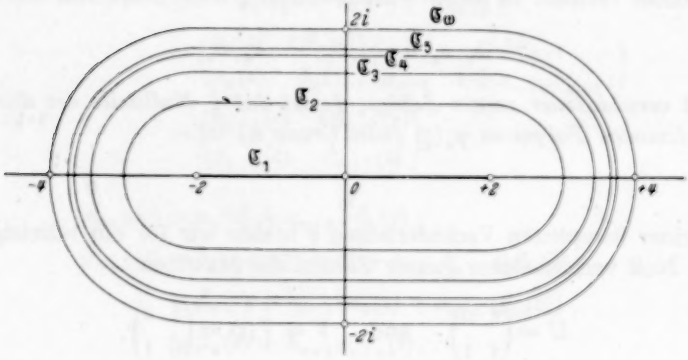
Unmittelbare Folgerung dieses Ergebnisses ist der

SATZ 2*. *Für jede außerhalb des offenen Kreisstreifens* $\mathfrak{C}_\omega$ *liegende algebraische Zahl* ζ *erzeugen die Matrizen*

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad V(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

eine freie Gruppe $\mathfrak{H}_2(\zeta)$ *vom Range 2, die Matrizen*

$$W_k(\zeta) = U^{-k} V(\zeta)\, U^k = \begin{pmatrix} 1 + k\zeta & \zeta \\ -k^2\zeta & 1 - k\zeta \end{pmatrix} \qquad (-\infty < k < \infty) \tag{3.2}$$



mit beliebigen ganzen Exponenten k *eine freie Gruppe*

$$\mathfrak{H}_\omega(\zeta) = \{\bigcup_k W_k(\zeta)\} \tag{3.3}$$

abzählbar unendlichen Ranges.

Als Kennzeichnung der Ausnahmewerte kann die nachstehende Aussage dienen:

SATZ 3. *Zu einer beliebig vorgegebenen Serie*

$$b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n \tag{4.1}$$

von Null verschiedener ganzer Zahlen beliebiger Länge $1 \leqq n < \infty$ *bilde man für* $1 \leqq \nu < n$ *rekursiv die Polynomserie*

$$\psi_{\nu+1}(z) = \left(z + \frac{1}{b_\nu a_{\nu+1}} + \frac{1}{a_{\nu+1} b_{\nu+1}}\right)\psi_\nu(z) - \frac{1}{a_\nu b_\nu^2 a_{\nu+1}}\psi_{\nu-1}(z) \tag{4.2}$$

mit den Anfangsgliedern

$$\psi_0(z) = 1; \quad \psi_1(z) = z + \frac{1}{b_0 a_1} + \frac{1}{a_1 b_1}. \tag{4.3}$$

Dann ist jede von Null verschiedene Nullstelle ζ *des letzten Polynoms* $\psi_n(z)$ *(vom Grade n) ein Ausnahmewert (aus dem abgeschlossenen Kreisstreifen* $\overline{\mathfrak{C}}_n$*).*

Zwischen den Erzeugenden

$$U=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad V=V(\zeta)=\begin{pmatrix}1 & \zeta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

der durch ζ bestimmten Gruppe $\mathfrak{H}_2(\zeta)$ besteht unter der Abkürzung

$$S_n \equiv S_n(U,V) \equiv V^{b_0}U^{a_1}V^{b_1}U^{a_2}V^{b_2}\dots U^{a_n}V^{b_n} \tag{5.1}$$

die normierte Relation

$$F_{4n}(U,V) \equiv U^{-1}S_nUS_n^{-1}US_nU^{-1}S_n^{-1}=E \tag{5.2}$$

der Länge $4n$.

Umgekehrt existiert zu jedem Ausnahmewert ζ n-ter Stufe eine Serie

$$b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$$

von Null verschiedener ganzer Zahlen, derart daß ζ Nullstelle des durch diese Serie bestimmten Polynoms $\psi_n(z)$ (vom Grade n) ist.

1.

Mit einer komplexen Veränderlichen z bilden wir für ein beliebiges Paar a, b von Null verschiedener ganzer Zahlen die Matrizen

$$U=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V=V(z)=\begin{pmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

deren Potenzen

$$U^a=\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad V^b=\begin{pmatrix}1 & bz\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

und aus diesen das Produkt

$$R_0\left(\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\,\middle|\, z\right)=U^aV^b=\begin{pmatrix}1 & bz\\ a & 1+abz\end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Für eine beliebige Folge

$$a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}, \dots$$

von Null verschiedener ganzer Zahlen erklären wir dann die Matrixfolge

$$\begin{cases} R_n(z)=R_n\left(\begin{matrix}a_0 & a_1 & \dots & a_n\\ b_0 & b_1 & \dots & b_n\end{matrix}\,\middle|\, z\right)\\ \quad =R_0\left(\begin{matrix}a_0\\ b_0\end{matrix}\,\middle|\, z\right)R_0\left(\begin{matrix}a_1\\ b_1\end{matrix}\,\middle|\, z\right)\dots R_0\left(\begin{matrix}a_n\\ b_n\end{matrix}\,\middle|\, z\right)\\ \quad =U^{a_0}V^{b_0}U^{a_1}V^{b_1}\dots U^{a_n}V^{b_n} \qquad (\text{für } 0\leqq n<\infty). \end{cases} \tag{6.2}$$

Offensichtlich sind die Koeffizienten der Matrix $R_n(z)$ ganzzahlige Polynome in der Veränderlichen z, weshalb die Matrix $R_n(z)$ in der Gestalt

$$R_n(z)=\begin{pmatrix}\alpha_n(z) & z\beta_n(z)\\ \gamma_n(z) & \delta_n(z)\end{pmatrix} \tag{6.3}$$

angenommen werden kann. In der Tat gilt

$$R_0(z) = \begin{pmatrix} 1 & b_0 z \\ a_0 & 1 + a_0 b_0 z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0(z) & z\beta_0(z) \\ \gamma_0(z) & \delta_0(z) \end{pmatrix},$$

also

$$\alpha_0(z) = 1; \qquad \beta_0(z) = b_0$$
$$\gamma_0(z) = a_0; \qquad \delta_0(z) = 1 + a_0 b_0 z,$$

ferner

$$\begin{aligned} R_{n+1}(z) &= R_{n+1}\left(\begin{matrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & a_{n+1} \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & b_{n+1} \end{matrix} \middle| z\right) \\ &= R_n\left(\begin{matrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n \end{matrix} \middle| z\right) R_0\left(\begin{matrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{matrix} \middle| z\right) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_n(z) & z\beta_n(z) \\ \gamma_n(z) & \delta_n(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z b_{n+1} \\ a_{n+1} & 1 + a_{n+1} b_{n+1} z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_{n+1}(z) & z\beta_{n+1}(z) \\ \gamma_{n+1}(z) & \delta_{n+1}(z) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}(z) &= \alpha_n(z) + a_{n+1} z \beta_n(z), \\ \beta_{n+1}(z) &= b_{n+1}\alpha_n(z) + (1 + a_{n+1} b_{n+1} z)\beta_n(z) \\ &= \beta_n(z) + b_{n+1}\left(\alpha_n(z) + a_{n+1} z \beta_n(z)\right) \\ &= \beta_n(z) + b_{n+1}\alpha_{n+1}(z), \\ \gamma_{n+1}(z) &= \gamma_n(z) + a_{n+1}\delta_n(z), \\ \delta_{n+1}(z) &= b_{n+1} z \gamma_n(z) + (1 + a_{n+1} b_{n+1} z)\,\delta_n(z) \\ &= \delta_n(z) + b_{n+1} z \left(\gamma_n(z) + a_{n+1}\delta_n(z)\right) \\ &= \delta_n(z) + b_{n+1} z \gamma_{n+1}(z). \end{aligned}$$

Für die in den Matrizen $R_n(z)$ auftretenden ganzzahligen Polynome gelten demnach die gekoppelten Rekursionsgleichungen

(7.1) $\alpha_{n+1}(z) = \alpha_n(z) + a_{n+1} z \beta_n(z); \qquad \beta_{n+1}(z) = \beta_n(z) + b_{n+1}\alpha_{n+1}(z);$

(7.2) $\gamma_{n+1}(z) = \gamma_n(z) + a_{n+1}\delta_n(z); \qquad \delta_{n+1}(z) = \delta_n(z) + b_{n+1} z \gamma_{n+1}(z)$

mit den Anfangsgliedern

(8.1) $$\alpha_0(z) = 1; \qquad \beta_0(z) = b_0,$$

(8.2) $$\gamma_0(z) = a_0; \qquad \delta_0(z) = 1 + a_0 b_0 z.$$

Überdies besteht für jede Matrix $R_n(z)$ die Identität

(9) $$\det R_n(z) \equiv \alpha_n(z)\,\delta_n(z) - z\beta_n(z)\,\gamma_n(z) = 1.$$

Die Polynome $\alpha_0(z), \beta_0(z), \gamma_0(z)$ sind vom Grade 0, das Polynom $\delta_0(z)$ ist vom Grade 1. Unter der Induktionsannahme, die Polynome $\alpha_n(z), \beta_n(z), \gamma_n(z)$ seien vom Grade n, das Polynom $\delta_n(z)$ sei vom Grade $n+1$, entnimmt man

den Rekursionsgleichungen unmittelbar die Folgerung, daß jedes der Polynome $\alpha_{n+1}(z), \beta_{n+1}(z), \gamma_{n+1}(z)$ vom Grade $n+1$, das Polynom $\delta_{n+1}(z)$ vom Grade $n+2$ ist. Mithin ist in der Matrix $R_n(z)$ jedes der Polynome $\alpha_n(z)$, $\beta_n(z), \gamma_n(z)$ vom Grade n, das Polynom $\delta_n(z)$ vom Grade $n+1$.

Infolgedessen ist auch für jede (reelle oder komplexe) transzendente Zahl τ und jede Serie $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ von Null verschiedener ganzer Zahlen die Matrix

$$R_n(\tau) = R_n\left(\begin{matrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_n \end{matrix} \middle| \, \tau\right) = \begin{pmatrix} \alpha_n(\tau) & \tau\beta_n(\tau) \\ \gamma_n(\tau) & \delta_n(\tau) \end{pmatrix}$$

von der Einheit E verschieden. Damit ist die erste Aussage des Satzes 1 bewiesen. Die zweite Aussage ergibt sich nun aus den Darstellungen

$$W_k(\tau) = U^{-k} V(\tau)\, U^k = \begin{pmatrix} 1+k\tau & \tau \\ -k^2\tau & 1-k\tau \end{pmatrix} \qquad (-\infty < k < +\infty)$$

in bekannter Weise nach allgemeinen Überlegungen[2]).

2.

Auf Grund des Satzes 1 ist ein Ausnahmewert n-ter Stufe eine algebraische Zahl ζ, für die zwischen den erzeugenden Matrizen

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = V(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

der Gruppe $\mathfrak{H}_2(\zeta)$ eine normierte Relation

$$F_n(U, V) \equiv U^{a_0} V^{b_0} U^{a_1} V^{b_1} \ldots U^{a_n} V^{b_n} = E \tag{10.1}$$

der Länge n besteht. Erklären wir demgemäß für die Serie

$$a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$$

von Null verschiedener ganzer Exponenten entsprechend den Rekursionsgleichungen (7) mit den Anfangsgliedern (8) die Matrix

$$R_n(z) = R_n\left(\begin{matrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_n \end{matrix} \middle| \, z\right) = \begin{pmatrix} \alpha_n(z) & z\beta_n(z) \\ \gamma_n(z) & \delta_n(z) \end{pmatrix},$$

so gilt auf Grund der Voraussetzung die Gleichung

$$R_n(\zeta) = E \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} \alpha_n(\zeta) & \zeta\beta_n(\zeta) \\ \gamma_n(\zeta) & \delta_n(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10.2}$$

insbesondere also die Gleichung

$$\beta_n(\zeta) = 0. \tag{11}$$

Da $\beta_n(z)$ ein ganzzahliges Polynom vom Grade n ist, ist der Ausnahmewert ζ n-ter Stufe in der Tat eine algebraische Zahl höchstens vom Grade n. Zum

[2]) Vgl. etwa SPECHT, W.: Gruppentheorie, Abschnitt 1.2.4, Beispiel 3. Berlin: Springer 1956.

Beweise des Satzes 2 bleibt noch nachzuweisen, daß die Nullstellen des Polynoms $\beta_n(z)$ dem abgeschlossenen Kreisstreifen $\overline{\mathfrak{C}}_n$ der komplexen Zahlenebene angehören.

Aus den Rekursionsgleichungen (7) und (8) entnehmen wir zunächst die Darstellungen

$$\alpha_1(z) = \alpha_0(z) + a_1 z \beta_0(z) = 1 + b_0 a_1 z,$$
$$\beta_1(z) = \beta_0(z) + b_1 \alpha_1(z) = b_0 + b_1 + b_0 a_1 b_1 z.$$

Aus den Gln. (7.1) erhalten wir weiter

$$\alpha_{\nu+1}(z) = \frac{\beta_{\nu+1}(z) - \beta_\nu(z)}{b_{\nu+1}}; \quad \alpha_\nu(z) = \frac{\beta_\nu(z) - \beta_{\nu-1}(z)}{b_\nu} \quad \text{für } 1 \leqq \nu < n$$

und

$$\frac{\beta_{\nu+1}(z) - \beta_\nu(z)}{b_{\nu+1}} = \frac{\beta_\nu(z) - \beta_{\nu-1}(z)}{b_\nu} + a_{\nu+1} z \beta_\nu(z) \quad \text{für } 1 \leqq \nu < n.$$

Mithin genügt die Polynomserie

$$\beta_0(z),\ \beta_1(z),\ \beta_2(z),\ \ldots,\ \beta_n(z)$$

der zweigliedrigen Rekursionsgleichung

$$\frac{\beta_{\nu+1}(z)}{a_{\nu+1} b_{\nu+1}} = \left(z + \frac{1}{b_\nu a_{\nu+1}} + \frac{1}{a_{\nu+1} b_{\nu+1}}\right)\beta_\nu(z) - \frac{\beta_{\nu-1}(z)}{b_\nu a_{\nu+1}} \tag{12.1}$$

mit den Anfangsgliedern

$$\beta_0(z) = b_0; \quad \beta_1(z) = b_0 a_1 b_1 z + b_1 + b_0. \tag{12.2}$$

Jedes Polynom $\beta_\nu(z)$ dieser Serie besitzt die gleichen Nullstellen wie das zugehörige normierte Polynom

$$\psi_\nu(z) = \frac{\beta_\nu(z)}{b_0 a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_\nu b_\nu} \quad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n. \tag{13.1}$$

Aus den Gln. (12) erhält man für die Polynomserie

$$\psi_0(z),\ \psi_1(z),\ \psi_2(z),\ \ldots,\ \psi_n(z)$$

die Rekursionsgleichung

$$\psi_{\nu+1}(z) = \left(z + \frac{1}{b_\nu a_{\nu+1}} + \frac{1}{a_{\nu+1} b_{\nu+1}}\right)\psi_\nu(z) - \frac{1}{a_\nu b_\nu^2 a_{\nu+1}}\psi_{\nu-1}(z) \text{ für } 1 \leqq \nu < n \tag{13.2}$$

mit den Anfangsgliedern

$$\psi_0(z) = 1; \quad \psi_1(z) = z + \frac{1}{b_0 a_1} + \frac{1}{a_1 b_1}, \tag{13.3}$$

in Übereinstimmung mit der letzten Aussage des Satzes 3, da die Polynome $\psi_\nu(z)$ unabhängig vom ersten Exponenten a_0 sind.

Setzen wir nun noch zur Abkürzung

$$c_\nu = \frac{1}{a_\nu b_\nu} \quad \text{und} \quad d_\nu = \frac{1}{b_{\nu-1} a_\nu} \quad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n, \tag{14.1}$$

sowie

$$(14.2)\qquad c_\nu^* = c_\nu \frac{\sin\frac{(\nu+1)\pi}{n+1}}{\sin\frac{\nu\pi}{n+1}} \quad \text{und} \quad d_\nu^* = d_\nu \frac{\sin\frac{(\nu-1)\pi}{n+1}}{\sin\frac{\nu\pi}{n+1}} \qquad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n,$$

so gilt

$$(14.3)\qquad c_\nu d_{\nu+1} = c_\nu^* d_{\nu+1}^* \qquad \text{für } 1 \leqq \nu < n;$$

überdies bestehen die Beschränkungen

$$(14.4)\qquad -2 \leqq c_\nu + d_\nu \leqq +2,$$

$$(14.5)\qquad 0 < |c_\nu^*| + |d_\nu^*| \leqq \frac{\sin\frac{(\nu+1)\pi}{n+1}}{\sin\frac{\nu\pi}{n+1}} + \frac{\sin\frac{(\nu-1)\pi}{n+1}}{\sin\frac{\nu\pi}{n+1}} = 2\cos\frac{\pi}{n+1}$$

für $1 \leqq \nu \leqq n$.

Da die Rekursionsgleichung der Polynomserie $\{\psi_\nu(z)\}$ hiernach auch in die Gestalt

$$(15.1)\qquad \psi_{\nu+1}(z) = (z + c_{\nu+1} + d_{\nu+1})\,\psi_\nu(z) - c_\nu^* d_{\nu+1}^* \psi_{\nu-1}(z) \qquad \text{für } 1 \leqq \nu < n,$$

$$(15.2)\qquad \psi_0(z) = 1; \qquad \psi_1(z) = z + c_1 + d_1$$

gebracht werden kann, ist das letzte Polynom $\psi_n(z)$ dieser Serie das charakteristische Polynom[3])

$$(15.3)\qquad \psi_n(z) = \det(zE - M_n)$$

der n-reihigen Matrix

$$(15.4)\quad M_n = \begin{pmatrix} -(c_1+d_1) & c_1^* & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_2^* & -(c_2+d_2) & c_2^* & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_3^* & -(c_3+d_3) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(c_{n-1}+d_{n-1}) & c_{n-1}^* \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_n^* & -(c_n+d_n) \end{pmatrix}.$$

Die gewünschte Aussage über die Lage der Nullstellen des Polynoms $\beta_n(z)$ (oder des Polynoms $\psi_n(z)$) gewinnt man nun fast unmittelbar aus dem folgenden bekannten[4])

LEMMA. *Bildet man aus den Elementen einer n-reihigen komplexen Matrix*

$$A = (a_{\varkappa\lambda}) \qquad (1 \leqq \varkappa, \lambda \leqq n)$$

die Werte

$$s_\varkappa = -|a_{\varkappa\varkappa}| + \sum_\lambda |a_{\varkappa\lambda}| \qquad \textit{für } 1 \leqq \varkappa \leqq n,$$

[3]) SPECHT, W.: Die Lage der Nullstellen eines Polynoms. III. Math. Nachr. **16**, 369–389 (1957).

[4]) Vgl. BRAUER, A.: Limits for the characteristic roots of a matrix. Duke Math. J. **13**, 387–395 (1946).

so gehört jeder Eigenwert ω der Matrix A (wenigstens) einem der n Kreisbereiche

$$|z - a_{\varkappa\varkappa}| \leqq s_\varkappa \qquad \text{für } 1 \leqq \varkappa \leqq n$$

der komplexen Zahlenebene an.

Nach diesem Lemma gehört jeder Eigenwert der Matrix M_n, also jede Nullstelle ζ des Polynoms $\psi_n(z)$ (oder des Polynoms $\beta_n(z)$) wenigstens einem der Kreisbereiche

$$|z + c_\nu + d_\nu| \leqq |c_\nu^*| + |d_\nu^*| \qquad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n,$$

also auf Grund der Beschränkungen (14.4) und (14.5) auch wenigstens einem der Kreisbereiche

$$|z - t| \leqq 2\cos\frac{\pi}{n+1} \qquad \text{mit } -2 \leqq t \leqq +2$$

an. Die Vereinigung dieser Kreisbereiche ist aber, wie man sofort erkennt, der in der Einleitung erklärte abgeschlossene Kreisstreifen $\overline{\mathfrak{C}}_n$ der komplexen Zahlenebene.

Damit ist der Satz 2 vollständig bewiesen. Liegt eine algebraische Zahl ζ außerhalb des offenen Kreisstreifens $\mathfrak{C}_\infty$, also außerhalb jedes abgeschlossenen Kreisstreifens $\overline{\mathfrak{C}}_n$, so ist sie gewiß kein Ausnahmewert; folglich gilt auch der Satz 2*.

3.

Nun sei zur Vervollständigung des Beweises des Satzes 3 umgekehrt eine beliebige Serie

$$b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$$

von Null verschiedener ganzer Zahlen vorgegeben und den Gln. (4.1), (4.2) des Satzes 3 entsprechend die Serie

$$\psi_0(z),\ \psi_1(z),\ \psi_2(z),\ \ldots,\ \psi_n(z)$$

rationalzahliger Polynome durch die Rekursionsgleichung

$$\psi_{\nu+1}(z) = \left(z + \frac{1}{b_\nu a_{\nu+1}} + \frac{1}{a_{\nu+1} b_{\nu+1}}\right)\psi_\nu(z) - \frac{1}{a_\nu b_\nu^2 a_{\nu+1}}\psi_{\nu-1}(z) \qquad \text{für } 1 \leqq \nu < n$$

mit den Anfangsgliedern

$$\psi_0(z) = 1; \quad \psi_1(z) = z + \frac{1}{b_0 a_1} + \frac{1}{a_1 b_1}$$

erklärt. Bildet man dann mit einer beliebig ergänzten Exponentenserie

$$a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$$

aus den Matrizen

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V(z) = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das Matrixprodukt

$$\begin{aligned} R_n(z) &= R_n\left(\begin{matrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_n \end{matrix} \,\middle|\, z\right) \\ &= U^{a_0} V^{b_0}(z)\, U^{a_1} V^{b_1}(z) \ldots U^{a_n} V^{b_n}(z) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_n(z) & z\beta_n(z) \\ \gamma_n(z) & \delta_n(z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit der Determinante

$$\det R_n(z) \equiv \alpha_n(z)\,\delta_n(z) - z\,\beta_n(z)\,\gamma_n(z) \equiv 1,$$

so stehen die Polynome $\psi_n(z)$ und $\beta_n(z)$ in dem durch die Gl. (13.1) gegebenen Zusammenhang:

$$\psi_n(z) = \frac{\beta_n(z)}{b_0 a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n}.$$

Für eine beliebig ausgewählte, von Null verschiedene Nullstelle ζ des Polynoms $\psi_n(z)$ (aus dem abgeschlossenen Kreisstreifen $\overline{\mathfrak{C}}_n$) erhalten wir dann

$$R_n(\zeta) = \begin{pmatrix} \alpha_n(\zeta) & 0 \\ \gamma_n(\zeta) & \delta_n(\zeta) \end{pmatrix}$$

mit der Determinante

$$\det R_n(\zeta) = \alpha_n(\zeta)\,\delta_n(\zeta) = 1.$$

Daß hierbei die normierte Relation

$$R_n(\zeta) = E$$

erfüllt ist, kann natürlich allgemein nicht erwartet werden. Setzen wir indes

$$S_n = S_n(\zeta) = V^{b_0} U^{a_1} V^{b_1} \dots U^{a_n} V^{b_n} = U^{-a_0} R_n(\zeta)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n(\zeta) & 0 \\ \gamma_n(\zeta) & \delta_n(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n(\zeta) & 0 \\ \sigma_n(\zeta) & \delta_n(\zeta) \end{pmatrix}$$

mit

$$\sigma_n(\zeta) = \gamma_n(\zeta) - a_0 \alpha_n(\zeta),$$

so findet man durch eine einfache Rechnung

$$U^{-1} S_n U S_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n(\zeta) & 0 \\ \sigma_n(\zeta) & \delta_n(\zeta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_n(\zeta) & 0 \\ -\sigma_n(\zeta) & \alpha_n(\zeta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta_n^2(\zeta) - 1 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$U^{-1} S_n U S_n^{-1} \cdot U = U \cdot U^{-1} S_n U S_n^{-1}$$

und damit die normierte Relation

$$F_{4n}(U, V) = U^{-1} S_n U S_n^{-1} U S_n U^{-1} S_n^{-1} = E.$$

Mithin ist die Nullstelle ζ des Polynoms $\psi_n(z)$ ein Ausnahmewert höchstens $4n$-ter Stufe. Damit ist auch der Satz 3 vollständig bewiesen.

4.

Nach Satz 1 erzeugen die beiden Matrizen

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V = V(4) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine freie Gruppe $\mathfrak{H}_2(4)$ vom Range 2; das gleiche gilt infolgedessen für die beiden Matrizen

$$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix};\qquad Y=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Mithin besteht auch der

SATZ 4. *Die beiden unimodularen Matrizen*

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\quad \textit{und}\quad Y=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

erzeugen eine freie Gruppe

$$\mathfrak{G}_2=\{X, Y\}$$

vom Range 2, die Matrizen

$$Z_k=\begin{pmatrix}1+4k & -4k^2\\ 4 & 1-4k\end{pmatrix}$$

mit beliebigem ganzzahligem Index k eine freie Gruppe

$$\mathfrak{G}_\infty=\{\bigcup_k Z_k\}$$

von abzählbar unendlichem Rang.

Die angegebenen Matrizen Z_k sind nämlich die Transformierten

$$Z_k=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2k\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4k & -4k^2\\ 4 & 1-4k\end{pmatrix};$$

daher folgt die zweite Behauptung des Satzes aus einem allgemeingültigen Sachverhalt.

Erklären wir zu den beiden besonderen Serien

$$b_0=b_1=b_2=\cdots=b_n=1;\qquad a_1=a_2=\cdots=a_n=\varepsilon=\pm 1$$

ganzer Zahlen die Polynomserien

$$\psi_0^\varepsilon(z),\ \psi_1^\varepsilon(z),\ \ldots,\ \psi_n^\varepsilon(z)$$

entsprechend den Gln. (13.1) und (13.2) durch die Rekursionsgleichungen

$$\psi_{\nu+1}^\varepsilon(z)=(z+2\varepsilon)\,\psi_\nu^\varepsilon(z)-\psi_{\nu-1}^\varepsilon(z)\qquad \text{für } 1\leqq\nu<n$$

mit den Anfangsgliedern

$$\psi_0^\varepsilon(z)=1;\qquad \psi_1^\varepsilon(z)=z+2\varepsilon,$$

so lassen sich die Nullstellen des letzten Polynoms $\psi_n^\varepsilon(z)$ leicht angeben. Setzen wir nämlich

$$y=z+2\varepsilon\quad\text{und}\quad \psi_\nu^\varepsilon(z)=\varphi_\nu(y)\qquad \text{für } 1\leqq\nu\leqq n,$$

so genügen die Polynome $\varphi_\nu(y)$ (in beiden Fällen) der Rekursionsgleichung

$$\varphi_{\nu+1}(y) = y\,\varphi_\nu(y) - \varphi_{\nu-1}(y) \qquad \text{für } 1 \leqq \nu < n$$

mit den Anfangsgliedern

$$\varphi_0(y) = 1; \quad \varphi_1(y) = y.$$

Nun besteht die goniometrische Identität

$$\sin(\nu+2)\,\vartheta + \sin\nu\,\vartheta = 2\cos\vartheta\sin(\nu+1)\,\vartheta \qquad \text{für } 1 \leqq \nu < n;$$

setzen wir demgemäß

$$y = 2\cos\vartheta \quad \text{und} \quad \frac{\sin(\nu+1)\,\vartheta}{\sin\vartheta} = u_\nu(2\cos\vartheta) = u_\nu(y) \qquad \text{für } 1 \leqq \nu < n,$$

so genügen die Polynome $u_\nu(y)$ der Rekursionsgleichung

$$u_{\nu+1}(y) = y\,u_\nu(y) - u_{\nu-1}(y) \qquad \text{für } 1 \leqq \nu < n$$

mit den Anfangsgliedern

$$u_0(y) = 1; \quad u_1(y) = y.$$

Mithin besteht die Identität

$$u_\nu(y) = \varphi_\nu(y) \qquad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n.$$

Infolgedessen gewinnt man die Nullstellen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ des Polynoms $\varphi_n(y)$ durch die von Null verschiedenen Lösungen der Gleichung

$$\sin(n+1)\,\vartheta = 0.$$

Man findet

$$\eta_\nu = 2\cos\frac{\nu\pi}{n+1} \qquad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n.$$

Daher besitzen die Ausgangspolynome $\psi_n^\varepsilon(z)$ die Nullstellen

$$\zeta_\nu^\varepsilon = 2\left(\cos\frac{\nu\pi}{n+1} - \varepsilon\right) \qquad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n,$$

also den beiden Werten $\varepsilon = \pm 1$ entsprechend die Nullstellen

$$\zeta_\nu^+ = 2\left(\cos\frac{\nu\pi}{n+1} - 1\right) = -4\sin^2\frac{\nu}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n,$$

$$\zeta_\nu^- = 2\left(\cos\frac{\nu\pi}{n+1} + 1\right) = 4\sin^2\frac{n+1-\nu}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n.$$

In gleicher Weise erhalten wir zu der besonderen Serie

$$b_\nu = a_\nu = (-1)^\nu \qquad \text{für } 0 \leqq \nu \leqq n$$

ganzer Zahlen die Polynomserie

$$\psi_{\nu+1}(z) = z\,\psi_\nu(z) + \psi_{\nu-1}(z) \qquad \text{für } 1 \leqq \nu < n$$

mit den Anfangsgliedern

$$\psi_0(z) = 1; \quad \psi_1(z) = z.$$

Durch Übergang zu den Polynomen

$$\varphi_\nu(y) = (-i)^\nu \psi_\nu(iy) \qquad \text{für } 0 \leqq \nu \leqq n$$

erhalten wir leicht die Rekursionsgleichung

$$\varphi_{\nu+1}(y) = y\,\varphi_\nu(y) - \varphi_{\nu-1}(y) \qquad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n$$

mit den Anfangsgliedern

$$\varphi_0(y) = 1; \quad \varphi_1(y) = y.$$

Da die Nullstellen des letzten Polynoms $\varphi_n(y)$ nach dem soeben Gezeigten die algebraischen Zahlen

$$\eta_\nu = 2\cos\frac{\nu\pi}{n+1} \qquad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n$$

sind, erhalten wir für das Ausgangspolynom $\psi_n(z)$ die Nullstellen

$$\zeta_\nu = -2i\cos\frac{\nu\pi}{n+1} \qquad \text{für } 1 \leqq \nu \leqq n.$$

Zusammenfassend haben wir hiernach festgestellt:

SATZ 5. *Für jede rationale Zahl r des Intervalls $0<r<1$ sind die algebraischen Zahlen*

$$\pm 4\sin^2 r\frac{\pi}{2} \quad \textit{und} \quad \pm 2i\cos r\frac{\pi}{2}$$

sämtlich Ausnahmewerte.

Dem offenen Kreisstreifen $\mathfrak{C}_\infty$ gehören insbesondere die offene Strecke $(-4, +4)$ der reellen Zahlengeraden und die offene Strecke $(-2i, +2i)$ der imaginären Zahlengeraden an; nach Satz 5 liegen auf diesen beiden Strecken des Kreisstreifens $\mathfrak{C}_\infty$ die Ausnahmewerte überall dicht.

Erlangen, Math. Institut

(Eingegangen am 10. Februar 1959)

THOMPSON, J. G.
Math. Zeitschr. 72, 332–354 (1960)

Normal p-complements for Finite Groups*

By
JOHN G. THOMPSON

I. Introduction

The object of this paper is to prove a theorem dealing with the p-Sylow subgroups of finite groups, for p an odd prime.

THEOREM A. *Let G be a finite group with a p-Sylow subgroup P, p an odd prime, and let $\mathfrak{A}$ be a group of automorphisms of G which leaves P invariant. Suppose for every $\mathfrak{A}$-invariant normal subgroup Q of P, elements of order prime to p which normalize Q also centralize Q. Then G possesses a normal p-complement.*

Two consequences of Theorem A are contained in [6]. No attempt will be made here to indicate the scope of Theorem A. However, Theorem A is false for the prime 2.

I would like to acknowledge my indebtedness to my thesis advisor, Professor SAUNDERS MACLANE, who gave encouragement and criticism at many points. Professor MARSHALL HALL suggested the topic and stimulated my interest in finite group theory. Professor REINHOLD BAER gave helpful advice during the summer of 1958 at the University of Frankfurt, where a large portion of the thesis was written. Special thanks are due Dr. BERTRAM HUPPERT, whose careful reading of the thesis led to a number of improvements.

The idea of the proof derives largely from HALL and HIGMAN [5] and WIELANDT [7].

II. Notation, Definitions, and Summary of Known Results

2.1. NOTATION. The notations in this paper, most of them familiar, will either be explained in context or in the list which follows.

G, H, X, Y	groups. Other letters will be used for groups, too.
$o(X)$	order of X.
$[X:Y]$	index of Y in X.
$N_X(Y)$	normalizer of Y in X.
$C_X(Y)$	centralizer of Y in X.
$Z(X)$	center of X.
$\{\ldots\|\ldots\}$	group generated by all ... such that ....
$[x, y]$	$x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y$.
$[x, y, z]$	$[[x, y], z]$.

*) This paper was written in partial fulfillment of the requirements of a PhD at the University of Chicago.

$[X, Y]$	$\{[x, y] \mid x \in X, y \in Y\}$.
X'	$[X, X]$.
$[\ldots\|\ldots]$	the set of all ... such that ....
$\alpha_p(Y)$	the exponent of the highest power of p dividing $o(Y)$.
π	a set of primes, determined from context.
π'	the complementary set of primes to π.
π-element	an element x such that $o(x)$ involves only primes in π.
π-group	a group X such that x is a π-element for all x in X.
X_p	the smallest normal subgroup of X such that X/X_p is a p-group.
$\varphi(X)$	the intersection of all maximal subgroups of X, called the Frattini subgroup of X.
$A < X$	A is a proper subgroup of X.
$A \lhd X$	A is a normal subgroup of X. $A = X$ is permitted.
$c_q(X)$	the class of nilpotency of a q-Sylow subgroup of X.
$ccl_X(M)$	$[M^x \mid x \in X]$, M any subset of X. In case there is no danger of confusion, we put $ccl_X(M) = ccl(M)$.
$\mathrm{Aut}(X)$	the group of all automorphisms of X.
$I(X)$	the group of all inner automorphisms of X.

All groups considered are finite.

REMARK. If W is an elementary abelian q-subgroup of X and $a \in X$ normalizes W, then we will consider W as a vector space over integers modulo q and the map $w \to w^a$ as a linear transformation of W. When there is no danger of confusion we will pass back and forth from the additive notation of linear transformation theory to the multiplicative notation of inner automorphisms and commutators in X.

2.2. DEFINITIONS.

Hall subgroup	H is a Hall subgroup of the group X if $(o(H), [X:H]) = 1$.
weak closure, weakly closed	If A and H are subgroups of X, then $V(ccl_X(A), H) = \{A^x \mid A^x \leqq H, x \in X\}$ is called the weak closure of $ccl_X(A)$ in H. If $A \leqq H$, and $V(ccl_X(A), H) = A$, we say that A is weakly closed in H. In case there is no danger of confusion, we put $V(H) = V(ccl_X(A), H)$ [3, p. 205].
p-normal	X is p-normal means that for any p-Sylow subgroup P of X, $Z(P)$ is weakly closed in P [3, p. 205].
π-solvable	X is π-solvable means every composition factor of X is either a π-group or a π'-group.
π-closed	X is π-closed means X possesses a normal π-subgroup K such that X/K is a π'-group. In the special case that $\pi' = [p]$, we will say that X has a normal p-complement.
$A_X(H)$	The mapping $\alpha : N_X(H) \to \mathrm{Aut}(H)$ defined by $(\alpha(x))(h) = x^{-1}hx$ has $C_X(H)$ for its kernel. We define $A_X(H)$ to be the image of $N_X(H)$ under α. $I(H) \leqq A_X(H)$ and the group $A_X(H)/I(H)$ gives one measure of the extent to which H is non-trivially imbedded in X. Note that $A_X(H) \cong N_X(H)/C_X(H)$.

2.3. SUMMARY OF KNOWN RESULTS.

a. Theorem of GRÜN-HALL. If X is p-normal, then the greatest factor group of X which is a p-group is isomorphic to that for the normalizer of the center of a p-Sylow subgroup of X. In notation, $X/X_p \cong N/N_p$, $N = N_X(Z(P))$, P a p-Sylow subgroup of X [3, p. 216].

b. If X is a p-group, then $X/\varphi(X)$ is elementary abelian [3, p. 176].

c. If σ is an automorphism of the p-group X such that σ induces the identity on $X/\varphi(X)$ and σ has order prime to p, then $\sigma = 1$ [3, p. 178].

d. If X is a p-group, then $\varphi(X)$ is generated by X' and the p-th powers of elements of X [4, p. 35].

e. First Sylow theorem. If X is of order $p^m s$, $p \nmid s$, $m \geqq 1$, p a prime, then X contains subgroups of order p^i, $i = 1, \ldots, m-1$, and each subgroup of order p^i is contained as a normal subgroup of at least one subgroup of order p^{i+1} [3, p. 44].

f. The Frattini argument. If $H \lhd X$, P a p-Sylow subgroup of H, and $N = N_X(P)$, then $X = HN$ [1, p. 117].

g. If H is a normal Hall subgroup of X, then X possesses a subgroup K such that $H \cap K = 1$, $HK = X$ [3, p. 224].

h. If X is a π-solvable group with no non-trivial normal π'-subgroups, and H is the maximal normal π-subgroup of X, then $C_X(H) = Z(H)$ [5, p. 5].

j. If A is a maximal abelian normal subgroup of the p-group X, then $A = C_X(A)$ [8, p. 145].

k. If A is a normal subgroup of order p contained in the p-group X, then A is contained in the center of X [3, p. 49].

l. Let P_1 be a p-Sylow subgroup of X, and Q_1 a characteristic subgroup of P_1. If Q_1 is not weakly closed in P_1, then there is another p-Sylow subgroup P_2 of X which contains Q_1 but in which Q_1 is not normal [3, p. 213].

m. Let P_1 be a p-Sylow subgroup of X, and H any normal subgroup of P_1 which is contained in some other p-Sylow subgroup P_2 of X as a non-normal subgroup. Then P_1 possesses a subgroup $K \geqq H$ such that $A_X(K)$ is not a p-group [3, p. 46].

THEOREM B. Let H be a p-soluble linear group over a field of characteristic p, with no normal p-subgroup greater than 1. If g is an element of order p^m in H, then the minimal equation of g is $(x-1)^r = 0$, where $r = p^m$, unless there is an integer m_0, not greater than m, such that $p^{m_0} - 1$ is a power of a prime q for which $c_q(H) > 1$, in which case, if m_0 is the least such integer,

$$p^{m-m_0}(p^{m_0} - 1) \leqq r \leqq p^m.$$

The above Theorem B of HALL and HIGMAN [5, p. 3] has been stated in full since it is so important for this paper. However, Theorem B will be applied only to groups H all of whose q-Sylow subgroups for $q \neq p$ are abelian, so the proviso of Theorem B will not be operative. Otherwise the prime $p = 3$ would cause difficulty.

III. Preliminary Lemmas

This section presents several lemmas necessary in the proof which are still of a rather general nature and make no specific reference to Theorem A.

LEMMA 3.1. *Subgroups and quotient groups of π-closed groups are π-closed.*

PROOF. Let X be π-closed and K a normal π-subgroup of X such that X/K is a π'-group. K is characterized as the set of all π-elements of X, so that π-closed groups are characterized by the property that the set of all π-elements forms a subgroup. This characterization is obviously inherited by subgroups. As for quotient groups, if X/N is any quotient group of X, then $KN/N \cong K/K \cap N$ is a normal π-subgroup of K/N, and $X/N/KN/N \cong X/KN$ is a π'-group, since X/KN is a quotient group of the π'-group X/K.

LEMMA 3.2. *If X has a normal p-complement, then X is p-normal. If P is a p-Sylow subgroup of X and $H \lhd P$, then H is normal in every p-Sylow subgroup of X which contains it.*

PROOF. Let L be the normal p-complement for P, so that $X = PL$, $P \cap L = 1$ and let K be any subgroup of P. Suppose $g \in N_X(K)$ is of order prime to p, so that $g \in L$. Then $[k, g] \in K \cap L = 1$ for all $k \in K$, so that g centralizes K. That is, $A'_X(K)$ is a p-group. It follows now from 2.3. m that if $H \lhd P$, then H is normal in every p-Sylow subgroup of X which contains it. Taking $H = Z(P)$, it follows from 2.3. l that X is p-normal.

LEMMA 3.3. *If $H \lhd X$, and P is a p-Sylow subgroup of H, then $N_X(P)$ contains a p-Sylow subgroup of X.*

PROOF. Since H is normal in X, and any two p-Sylow subgroups of H are conjugate in H, we see that $[X : N_X(P)] = [H : N_H(P)]$. Since $[H : N_H(P)]$ is prime to p, so is $[X : N_X(P)]$. In other words, $N_X(P)$ contains a p-Sylow subgroup of X.

LEMMA 3.4. *If X is a p-group and $A \neq 1$ is a normal subgroup of X, then*

i. A possesses a subgroup B of index p in A, with $B \lhd X$.

ii. $A \cap Z(X) \neq 1$.

iii. $[X, A]$ is a proper subgroup of A.

PROOF. The total number of subgroups of index p contained in A is $\equiv 1 \pmod{p}$ by a result of FROBENIUS [2, p. 152]. X induces automorphisms of A by conjugation. The subgroups of index p in A are split up into sets of transitivity under X and the number of elements in each set is a power of p. Since the total number of subgroups of index p in A is $\equiv 1 \pmod{p}$, at least one set of transitivity must contain precisely one element, that is, at least one subgroup B of index p in A must be normal in A. This proves i).

Iterating i), we find a subgroup of A of order p which is normal in X. By 2.3.k, this subgroup is in the center of X, which proves ii).

If B is a subgroup of index p in A which is normal in X, then again by 2.3.k, A/B is in the center of X/B, so that $[X, A] \leq B$, which proves iii).

LEMMA 3.5. *Let V be a finite-dimensional vector space over a field of characteristic p, $p \neq 0$, and let X be a p-group of linear transformations of V for*

the same prime p. Let V_1 and V_2 be two X-invariant subspaces, $V_1 \supseteq V_2$ such that $V_1(I-A) \subseteq V_2$ for every element A of X. Let W_1 be the subspace of V_2 spanned by all vectors w_1 of the form $w_1 = v(I-C)$, where v is an arbitrary vector in V_1 and C is an arbitrary element of the commutator group of X. Let W_2 be the subspace of V_2 spanned by all w_2 of the form $w_2 = v(I-A)$ where v is an arbitrary vector in V_2 and A is an arbitrary element in X. Then $W_1 \subseteq W_2$.

PROOF. Suppose C has the special form $C = A^{-1}B^{-1}AB$. Every element in X has the form $I +$ nilpotent, since X is a p-group over a field of characteristic p. In particular, $A = I+N$, $B = I+M$, $C = I+N'$, and $A^{-1} = I-N+N^2\ldots$, $B^{-1} = I-M+M^2\ldots$. The relation $C = A^{-1}B^{-1}AB$ shows that N' is a polynomial in the (not necessarily commuting) variables N and M, and that each monomial is of degree at least two. Since $I-A = -N$, $I-B = -M$, and $I-C = -N'$, we find that $w_1(I-C) = -w_1N'$, and if we expand out N' as a polynomial in N and M, we see that $-w_1N'$ is a linear combination of vectors $t(I-A)$ and $t(I-B)$, where t lies in V_2. This is so since N' is a polynomial in $I-A$ and $I-B$ such that every monomial is at least of degree two, and since $w_1(I-A)$ and $w_1(I-B)$ both lie in V_2 by assumption. In other words, we have proved the lemma in the special case that $C = A^{-1}B^{-1}AB$.

Now let C be any element in the commutator group of X. Then $C = C_1C_2\ldots C_r$, where $C_i = A_i^{-1}B_i^{-1}A_iB_i$ for suitable A_i and B_i. If now we make use of the identity

$$I-C = I-C_1+C_1(I-C_2)+C_1C_2(I-C_3)+\cdots+C_1\ldots C_{r-1}(I-C_r),$$

and also make use of the fact that both V_1 and V_2 are X-invariant, the entire lemma follows.

LEMMA 3.6. *Let X be a p-group and $\mathfrak{B}$ a group of automorphisms of X. Suppose A and B are two $\mathfrak{B}$-invariant normal subgroups of X and $A < B$. Then we can find a chain of $\mathfrak{B}$-invariant normal subgroups of X, $A = A_1 < A_2 < \cdots < A_n = B$, such that $[X, A_{i+1}] \subseteq A_i$, $i = 1, \ldots, n-1$.*

PROOF. A_{i+1} can be taken as the intersection of B with the complete inverse image of $Z(X/A_i)$. A_{i+1} will be $\mathfrak{B}$-invariant and normal if A_i is, and since $A_1 = A$ is $\mathfrak{B}$-invariant and normal, we see that A_i is also $\mathfrak{B}$-invariant and normal. Since $B/A_i \lhd X/A_i$, it follows from lemma 3.4.ii that $Z(X/A_i) \cap B/A_i \neq 1$, provided only that A_i is a proper subgroup of B, so that A_{i+1} contains A_i as a proper subgroup. We repeat this process until we reach B.

Let $\mathfrak{B}$ be a group of automorphisms of the p-group X. We say that a subgroup A of X is of type I relative to $\mathfrak{B}$ if and only if

1. A is $\mathfrak{B}$-invariant and normal in X, and $A \neq 1$.
2. $[X, A, A] = 1$.

Note that all abelian $\mathfrak{B}$-invariant normal subgroups of X ($\neq 1$) are of type I relative to $\mathfrak{B}$.

We say that the subgroup A of X is of type II relative to $\mathfrak{B}$ if and only if

1. A is non-abelian of class 2.
2. $[X, A] \leqq Z(A)$.
3. $A/Z(A)$ is elementary abelian.
4. A is $\mathfrak{B}$-invariant and normal in X.
5. $Z(X) \leqq A$.

Observe that subgroups of type II are also subgroups of type I relative to $\mathfrak{B}$.

LEMMA 3.7. *Let X be a p-group and $\mathfrak{B}$ a group of automorphisms of X. Suppose that none of the maximal abelian normal subgroups of X is $\mathfrak{B}$-invariant. Then X possesses a subgroup of type II relative to $\mathfrak{B}$.*

PROOF. There are certainly $\mathfrak{B}$-invariant abelian normal subgroups of X which contain $Z(X)$, since $Z(X)$ is such a subgroup. Choose B maximal among all such. It cannot occur that $B = C(B)$, since that would imply that B was a maximal abelian normal subgroup of X which was also $\mathfrak{B}$-invariant. Hence $B < C(B)$. In $C(B)$, let us consider those subgroups C such that

1. C is $\mathfrak{B}$-invariant and normal in X.
2. C is not contained in B.

Since $C(B)$ satisfies these two conditions, it follows that $C(B)$ possesses a subgroup with these two properties and is of minimal order, say C. Then $\varphi(C)$ must be contained in B, since $\varphi(C)$ is $\mathfrak{B}$-invariant and normal along with C, and is of smaller order than C. Also $[X, C]$ must be contained in B, since it too is $\mathfrak{B}$-invariant and normal along with C, and by lemma 3.4.iii is of smaller order than C. Put $A = BC$. Remark that $B \leqq Z(A)$, since B is abelian and C centralizes B. Now $[X, BC] = [X, B][X, C]$, since $[x, bc] = [x, c][x, b]^c$, and B and C are both normal in X. Since $[X, B]$ and $[X, C]$ are both contained in B, we find $[X, A] \leqq B \leqq Z(A)$. Thus, A has properties 2, 4, and 5 in the definition of type II.

Now A is definitely not abelian, since A is $\mathfrak{B}$-invariant and normal and contains B as a proper subgroup, and B has been chosen as a maximal abelian $\mathfrak{B}$-invariant normal subgroup. On the other hand, $[A, A] \leqq [X, A] \leqq Z(A)$, which shows that A has class at most two. Hence, A has class exactly two, that is, A has property 1 in the definition of type II.

Since $A/\varphi(A)$ is elementary abelian by 2.3.b, we shall show that $A/Z(A)$ is elementary abelian by showing that $\varphi(A) \leqq Z(A)$. Now $\varphi(A)$ is generated by the commutator group of A and by the p-th powers of elements of A, by 2.3.d. Since $[A, A] \leqq Z(A)$, it suffices to prove that p-th powers of elements of A lie in $Z(A)$. Since $B \leqq Z(A)$, we have $(bc)^p = b^p c^p$. Since $b^p \in B \leqq Z(A)$, we must show that $c^p \in Z(A)$. But $c^p \in \varphi(C) \leqq B \leqq Z(A)$. This completes the proof of this lemma.

LEMMA 3.8. *Let $A \leqq B \leqq X$, where A and B are normal subgroups of the p-group X, and where $[X, B] \leqq A$. Then B normalizes every subgroup of X which contains A.*

PROOF. Since $[X, B] \leqq A$, we see that $B/A \leqq Z(X/A)$, so that B/A normalizes every subgroup of X/A. It follows that B normalizes every subgroup of X which contains A.

LEMMA 3.9. *Let X be a p-normal group, P a p-Sylow subgroup of X, and A a subgroup of $Z(P)$. Suppose that A is contained in the p-Sylow subgroup P^* of X. Then $A \leqq Z(P^*)$.*

PROOF. Put $C = C_X(A)$. We will prove the lemma by induction on $o(X)$. If $C = X$, then A is in $Z(X)$, and the lemma is true. If $C < X$, then the group $B = \{A, Z(P^*)\}$ is contained in some p-Sylow subgroup P_1 of C, and since P is contained in C, P_1 is even a p-Sylow subgroup of X. Since the p-Sylow subgroups of C are also p-Sylow subgroups of X, it follows that C is p-normal. Since $o(C) < o(X)$, we see that $A \leqq Z(P_1)$. But $Z(P^*) \leqq P_1$, and since X is p-normal, we must have $Z(P_1) = Z(P^*)$. Hence $A \leqq Z(P^*)$, as desired.

LEMMA 3.10. *If X possesses a normal p-complement, $o(X) = \prod_q q^{a_q(X)}$, then X possesses a subgroup of order $p^{a_p} q^{a_q}$ in which the q-Sylow subgroup is normal. Here q is any prime divisor of $o(X)$ different from p.*

PROOF. Let K be the normal complement to a p-Sylow subgroup of X, and let Q be a q-Sylow subgroup of K, $q \mid o(K)$. Since K is normal in X, $[K : N_K(Q)] = [X : N_X(Q)]$. Since $o(K)$ is prime to p, $[K : N_K(Q)]$ is also prime to p. Hence $[X : N_X(Q)]$ is prime to p, that is, $N_X(Q)$ contains a p-Sylow subgroup of X, say P. The group PQ satisfies the demands of the lemma.

LEMMA 3.11. *If X is a group of linear transformations on a finite dimensional vector space V, and X acts irreducibly on V, then $Z(X)$ is cyclic.*

PROOF. By a theorem of SCHUR, the set of linear transformations of V which centralize X forms a skew field. $Z(X)$ is imbedded in this skew field as a finite subgroup of the multiplicative subgroup. But finite abelian subgroups of the multiplicative group of a field are cyclic.

IV. Initial Reduction of the Proof of Theorem A

Theorem A is a statement dealing with triples $(X, Y, \mathfrak{B})$ where

1. Y is a p-Sylow subgroup of X for an odd prime p.
2. $\mathfrak{B}$ is a group of automorphisms of X such that $Y^{\mathfrak{B}} = Y$.
3. If H is any $\mathfrak{B}$-invariant normal subgroup of Y, then $A_X(H)$ is a p-group.

Triples $(X, Y, \mathfrak{B})$ satisfying these three conditions, that is, satisfying the hypotheses of Theorem A, will be said to have property $\mathfrak{N}$. This serves to define property $\mathfrak{N}$, and is a convenient device for future reference.

We can now state Theorem A in a concise way.

THEOREM A. *Let $(G, P, \mathfrak{A})$ have property $\mathfrak{N}$. Then G has a normal p-complement.*

LEMMA 4.1. *Let $(G, P, \mathfrak{A})$ have property $\mathfrak{N}$. Suppose that Theorem A has been proved for all triples $(G_1, P_1, \mathfrak{A}_1)$ with property $\mathfrak{N}$ with $o(G_1) < o(G)$. Suppose further that G is p-normal. Then G has a normal p-complement, that is, Theorem A is true for the triple $(G, P, \mathfrak{A})$.*

PROOF. If G is either a p-group or a p'-group, then Theorem A is trivially true, so we can suppose that G is neither a p-group nor a p'-group.

The theorem of GRÜN-HALL (2.3.a), applied to G, assumed to be p-normal, gives $G/G_p \cong N/N_p$, where $N = N_G(Z(P))$, P a p-Sylow subgroup of G.

CASE 1. $N < G$. Since P is $\mathfrak{A}$-invariant, so is $Z(P)$, since characteristic subgroups of $\mathfrak{A}$-invariant subgroups are $\mathfrak{A}$-invariant. Since $Z(P)$ is $\mathfrak{A}$-invariant, so is N, since normalizers of $\mathfrak{A}$-invariant subgroups are $\mathfrak{A}$-invariant. Let $\mathfrak{A}_1$ be $\mathfrak{A}$ restricted to N. One checks that the triple $(N, P, \mathfrak{A}_1)$ has property $\mathfrak{N}$. Since $o(N) < o(G)$, we conclude that N possesses a normal p-complement. Since $G/G_p \cong N/N_p$, G possesses a normal p-complement, too.

CASE 2. $N = G$, that is, $Z = Z(P)$ is normal in G. Since elements in G of order prime to p centralize Z by condition 3 defining property $\mathfrak{N}$, and since P centralizes Z, it follows that $Z \leqq Z(G)$. Let $\mathfrak{A}'$ be the group of automorphisms which $\mathfrak{A}$ induces on G/Z. One checks that the triple $(G/Z, P/Z, \mathfrak{A}')$ has property $\mathfrak{N}$. Since $o(G/Z) < o(G)$, we conclude that G/Z has a normal p-complement, and it follows readily from the fact that Z is in the center of G that G itself has a normal p-complement.

Lemma 4.1 enables us to throw our attention onto the question of the p-normality of G, since Theorem A is to be proved by induction on $o(G)$.

V. Further Lemmas

We assume now by way of contradiction that Theorem A is false and choose a triple $(G, P, \mathfrak{A})$ with property $\mathfrak{N}$ which does not satisfy the conclusion of Theorem A, and such that $o(G)$ is minimal. The next few lemmas deal with this triple $(G, P, \mathfrak{A})$, although we don't yet attack the heart of the matter.

Since we are assuming that Theorem A is false for the triple $(G, P, \mathfrak{A})$, it follows from lemma 4.1 and from the minimal nature of G that G is not p-normal. In other words, the proof of Theorem A will be complete when we have obtained a contradiction from the assumption that G is not p-normal.

LEMMA 5.1. *$Z(P)$ is contained in a p-group M of G, such that $A_G(M)$ is not a p-group.*

PROOF. This follows immediately from 2.3.1 and 2.3.m and the non-p-normality of G.

LEMMA 5.2. *If P^x is another p-Sylow subgroup of G, and*

$$\mathfrak{A}^x = \{C_x \sigma C_{x^{-1}} \mid \sigma \in \mathfrak{A}\},$$

where C_x is the inner automorphism of G induced by x, then the triple $(G, P^x, \mathfrak{A}^x)$ also has property $\mathfrak{N}$.

PROOF. Let $H_1 = x^{-1} H x$ be an $\mathfrak{A}^x$-invariant normal subgroup of P^x, where H is a subgroup of P. To say that H_1 is $\mathfrak{A}^x$-invariant is to say $(C_x \sigma C_{x^{-1}})(H_1) = H_1 = x^{-1} H x$ for all $\sigma \in \mathfrak{A}$. But $(C_x \sigma C_{x^{-1}})(H_1) = x^{-1} \sigma(H) x$, so we find that $\sigma(H) = H$, for all $\sigma \in \mathfrak{A}$. Thus H is an $\mathfrak{A}$-invariant subgroup of P. If $H_1 \lhd P^x$, then $H \lhd P$, and by assumption $A_G(H)$ is a p-group. Since H and H_1 are conjugate in G, $A_G(H_1)$ is also a p-group. That is, the triple $(G, P^x, \mathfrak{A}^x)$ has property $\mathfrak{N}$.

LEMMA 5.3. *If $B \neq 1$ is any $\mathfrak{A}$-invariant normal subgroup of P, then $N_G(B)$ possesses a normal p-complement.*

PROOF. Put $N = N_G(B)$. Then $o(N/B) < o(G)$. N is $\mathfrak{A}$-invariant along with B, so let $\mathfrak{A}_1$ be $\mathfrak{A}$ restricted to N/B. The triple $(N/B, P/B, \mathfrak{A}_1)$ is seen to have property $\mathfrak{N}$, so by the induction assumption has a normal p-complement. This guarantees the existence of a normal subgroup K/B of N/B such that $o(K/B)$ is prime to p, while $o(N/K)$ is a power of p. By 2.3.g, we can find in K a subgroup L such that $L \cap B = 1$, $LB = K$. Since $o(L)$ is prime to p, and since B is $\mathfrak{A}$-invariant and normal in K, elements in L centralize B. Thus $K = L \times B$, and L is characteristic in K, hence normal in N. This shows that L is a normal p-complement for N.

LEMMA 5.4. *If $B \neq 1$ is any $\mathfrak{A}$-invariant normal subgroup of P, then B is not normal in G.*

PROOF. This is an immediate corollary of lemma 5.3, since G does not have a normal p-complement.

LEMMA 5.5. *G possesses no non-trivial normal p-groups.*

PROOF. The maximal normal p-subgroup of G is characteristic in G, hence $\mathfrak{A}$-invariant. Being normal it is contained in every p-Sylow subgroup of G, in particular in P. By lemma 5.4, this implies that the maximal normal p-subgroup of G is 1.

LEMMA 5.6. *Suppose B and C are $\mathfrak{A}$-invariant normal subgroups of P such that*

i. $1 < B \leqq C$.
ii. $[P, C] \leqq B$.
iii. $[B, C] = 1$.

Let T be any p-group contained in $C_G(B)$ such that $\{C, T\} = U$ is a p-group. Then $[T, C] \leqq B$, so that $[T, C, C] = 1$.

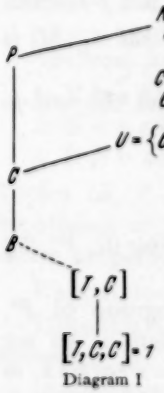


Diagram I

PROOF. Diagram I gives a picture of what we are trying to prove. By lemma 5.3, $N = N_G(B)$ has a normal p-complement. Hence, N/B has a normal p-complement. Now P/B is a p-Sylow subgroup of N/B. Since $[P, C] \leqq B$, the group C/B is contained in $Z(P/B)$. Since N/B has a normal p-complement, it is p-normal by lemma 3.2. Consider the group U/B. The lemma requires that we prove $[C, U] \leqq B$. Now U/B, being a homomorphic image of the p-group U, is a p-group, so U/B is contained in a p-Sylow subgroup P^*/B of N/B. Since N/B is p-normal, we conclude from lemma 3.9 that $C/B \leqq Z(P^*/B)$, and the lemma follows.

LEMMA 5.7. *Suppose A is a maximal abelian normal subgroup of P. Then any p-element of G which centralizes A lies in A.*

PROOF. Put $N = N_G(A)$ and $C = C_G(A)$. C is a normal subgroup of N, and the lemma demands that we show that A is a p-Sylow subgroup of C. Let P_1 be a p-Sylow subgroup of C. By lemma 3.3, the normalizer of P_1 in N contains a

p-Sylow subgroup of N, say P_2. Since P is a p-Sylow subgroup of N, we have $P_2 = P^t$ for some $t \in N$. But then P normalizes $P_1^{t^{-1}}$, so we see that P normalizes some p-Sylow subgroup of C. We then have the relations $A \leqq P_1^{t^{-1}} \leqq P$. Since $P_1^{t^{-1}}$ centralizes A, we conclude by 2.3.j that $A = P_1^{t^{-1}}$, so that A is a p-Sylow subgroup of $C_G(A)$. Since $A \lhd C_G(A)$, A is the p-Sylow subgroup of C, and this completes the proof of the lemma.

LEMMA 5.8. *If A is any $\mathfrak{A}$-invariant normal subgroup of P, then $V = V(ccl_G(A), P)$ is an $\mathfrak{A}$-invariant normal subgroup of P.*

PROOF. Let A^x be any conjugate of A contained in P. Then for $\sigma \in \mathfrak{A}$, we have $\sigma(A^x) = \sigma(x)^{-1} A \sigma(x)$, since A is $\mathfrak{A}$-invariant. Thus σ sends conjugates of A into conjugates of A. Since σ leaves P invariant, it merely permutes the conjugates of A which lie in P among themselves and leaves V invariant. Since this is true for all $\sigma \in \mathfrak{A}$, we conclude that V is $\mathfrak{A}$-invariant. It is obviously normal in P.

LEMMA 5.9. *If $A \neq 1$ is any $\mathfrak{A}$-invariant normal subgroup of P, $A \leqq D \leqq P$, and R is a q-subgroup of G which normalizes D but does not centralize D, q a prime different from p, then R does not centralize A.*

PROOF. Suppose false and that $R \leqq C_G(A)$. By lemma 5.3, $N_G(A)$ has a normal p-complement. By assumption, R is contained in $N_G(A)$ (it is even contained in $C_G(A)$), and R normalizes D, which is also contained in $N_G(A)$, since P is contained in $N_G(A)$. The group $\{R, D\} = RD$, being a subgroup of $N_G(A)$, has a normal p-complement by lemma 3.1, which is necessarily R. On the other hand, R normalizes D by assumption. Hence R and D, being normal subgroups of RD of coprime orders, commute elementwise, that is, R centralizes D. This contradiction completes the proof of lemma 5.9.

VI. Subgroups of Types I, II, and III

We now define a partial ordering $\ll$ on the set of all subgroups of G. If H_1 and H_2 are subgroups of G, we say that $H_1 \ll H_2$ if and only if $\alpha_p(N_G(H_1)) < \alpha_p(N_G(H_2))$, or $\alpha_p(N_G(H_1)) = \alpha_p(N_G(H_2))$ and $o(H_1) < o(H_2)$, or $H_1 = H_2$. Note that conjugate subgroups are not comparable. If $\mathfrak{S}$ is any set of subgroups of G, and $H \in \mathfrak{S}$, we say that H is maximal in the ordering $\ll$, relative to $\mathfrak{S}$, provided that whenever $K \in \mathfrak{S}$ and $H \ll K$, then $H = K$.

If A is any $\mathfrak{A}$-invariant normal subgroup of P, we define

$$\mathfrak{H}(ccl_G(A)) = [H \mid 1.\ H \text{ is a } p\text{-subgroup of } G.$$
$$2.\ A_G(H) \text{ is not a } p\text{-group.}$$
$$3.\ H \text{ contains some element of } ccl(A).].$$

It may occur that $\mathfrak{H}(ccl_G(A))$ is empty for some choices of A. However, lemma 5.1 says that $\mathfrak{H}(ccl_G(Z(P)))$ is not empty, so we restrict ourselves to those $\mathfrak{A}$-invariant normal subgroups $A \neq 1$ of P such that $\mathfrak{H}(ccl(A))$ is not empty. Lemmas 6.1 through 6.9 all involve the following objects:

1. An $\mathfrak{A}$-invariant normal subgroup $A \neq 1$ of P with $\mathfrak{H}(ccl(A))$ not empty.
2. A subgroup $H \in \mathfrak{H}(ccl(A))$ maximal in the ordering $\ll$ relative to $\mathfrak{H}(ccl(A))$.
3. A p-Sylow subgroup P_1 of $N = N_G(H)$.

LEMMA 6.1. *If $H<J\lhd P_1$, then $A_G(J)$ is a p-group.*

PROOF. Otherwise, $J\in\mathfrak{H}(ccl(A))$ and H would not be maximal in the ordering $\ll$ relative to $\mathfrak{H}(ccl(A))$, either by virtue of the fact that $\alpha_p(N)<\alpha_p(N_G(J))$ (we always have $\alpha_p(N)\leqq\alpha_p(N_G(J))$ since P_1 is a p-Sylow subgroup of N) or because $\alpha_p(N)=\alpha_p(N_G(J))$, in which case we have $o(H)<o(J)$.

LEMMA 6.2. *$N_G(H)/H$ has a normal p-complement.*

PROOF. Let $\mathfrak{A}_1$ be the group of automorphisms of N/H induced by the elements of P_1/H by conjugation. Suppose $H<K\lhd P_1$. By lemma 6.1, $A_G(K)$ is a p-group. In particular, $A_N(K)$ is a p-group, from which it follows that $A_{N/H}(K/H)$ is a p-group, too. This guarantees that the triple $(N/H, P_1/H, \mathfrak{A}_1)$ has property $\mathfrak{R}$. Since $o(N/H)<o(G)$, it follows from the minimal nature of G that N/H has a normal p-complement.

LEMMA 6.3. *If $o(N)=\prod_q q^{\alpha_q}$, and $o(H)=p^m$, then N/H possesses a subgroup of order $p^{\alpha_p-m}q^{\alpha_q}$ in which the q-Sylow subgroup is normal, q being any prime divisor of $o(N)$ different from p.*

PROOF. By lemma 6.2, N/H has a normal p-complement. By lemma 3.10 N/H possesses a subgroup satisfying the demands of the lemma.

LEMMA 6.4. *N possesses a subgroup of order $p^{\alpha_p}q^{\alpha_q}$ for any prime $q|o(N)$, $q\neq p$.*

PROOF. This is an immediate consequence of lemma 6.3, since the complete inverse image in N of a subgroup of N/H satisfying lemma 6.3 satisfies lemma 6.4.

REMARK. The object of the preceding lemmas has been to produce certain solvable groups contained in G, and which involve the prime p to a "considerable" amount. The solvable groups which lemma 6.4 gives us will next be subjected to a detailed study.

LEMMA 6.5. *N possesses a subgroup of order $p^{\alpha_p}q^{\alpha_q}$, for any prime $q|o(A_G(H))$, $q\neq p$, in which the q-Sylow subgroups are not normal.*

PROOF. Lemma 6.4 guarantees the existence of a subgroup of N of order $p^{\alpha_p}q^{\alpha_q}$, say $K(q)$. Since a p-Sylow subgroup of $K(q)$ is also a p-Sylow subgroup of N, and since H is contained in every p-Sylow subgroup of N, H is contained in $K(q)$. Since $K(q)$ is a subgroup of N, H is normal in $K(q)$. If a q-Sylow subgroup of $K(q)$ were normal in $K(q)$, then it would commute elementwise with H. But since a q-Sylow subgroup of $K(q)$ is also a q-Sylow subgroup of N, this would say that $o(A_G(H))$ was prime to q, contrary to our choice of q.

REMARK. Since $H\in\mathfrak{H}(ccl(A))$, there is at least one prime $q\neq p$ which divides $o(A_G(H))$. We choose one once and for all, say q. The rest of the proof of Theorem A is devoted to a study of subgroups of N which involve the primes p and q only. From this point onward, p will be the prime occurring in the statement of Theorem A, and q will be an arbitrary but fixed prime divisor of $o(A_G(H))$, $q\neq p$, and no further reference will be made to this fact.

LEMMA 6.6. If K is a subgroup of N, $o(K) = p^{\alpha_p(N)} q^b$, if the q-Sylow subgroups of K are not normal in K, and if Q_1 is the maximal normal q-subgroup of K, then HQ_1/Q_1 is the maximal normal p-subgroup of K/Q_1.

PROOF. Let L be the maximal normal subgroup of K which contains Q_1 and such that L/Q_1 is a p-group, and let H_1 be a p-Sylow subgroup of L, so that $L = Q_1 H_1$. By 2.3.f, $L \cdot N_K(H_1) = K$. Hence

$$(**) \qquad (Q_1 H_1) N_K(H_1) = Q_1 N_K(H_1) = K.$$

By lemma 3.3, $N_K(H_1)$ contains a p-Sylow subgroup of K. Hence $\alpha_p(N_G(H_1)) \geqq \alpha_p(N)$, since a p-Sylow subgroup of K is also a p-Sylow subgroup of N. Also, $H \leqq H_1$, since HQ_1 is normal in K. Suppose by way of contradiction that $H < H_1$. Since H is maximal in the ordering $\ll$ relative to $\mathfrak{H}(ccl(A))$, H_1 is not contained in $\mathfrak{H}(ccl(A))$, which implies that $A_G(H_1)$ is a p-group. In particular, a q-Sylow subgroup of $N_K(H_1)$ must centralize H_1. By (**), a q-Sylow subgroup of K/Q_1 must centralize $H_1 Q_1/Q_1 = L/Q_1$. But K/Q_1 has no non-trivial normal q-subgroups, so that L/Q_1 must contain its centralizer in K/Q_1, by 2.3.h. Thus, a q-Sylow subgroup of K/Q_1 must be the identity, that is, Q_1 is a q-Sylow subgroup of K, contrary to the assumption that the q-Sylow subgroups of K are not normal in K. Hence, $L/Q_1 = HQ_1/Q_1$ is the maximal normal p-subgroup of K/Q_1.

LEMMA 6.7. *If K and Q_1 are as in lemma 6.6, then a q-element $x \in K$ centralizes H if and only if $x \in Q_1$.*

PROOF. By the definition of Q_1, K/Q_1 has no non-trivial normal q-subgroups. HQ_1/Q_1 is the maximal normal p-subgroup of K/Q_1 by lemma 6.6. By 2.3.h, $C_{K/Q_1}(HQ_1/Q_1) = Z(HQ_1/Q_1)$. Let $x \in K$ centralize H, x being a q-element. Then xQ_1 centralizes HQ_1/Q_1, so that $xQ_1 \in Z(HQ_1/Q_1)$. But xQ_1 is a q-element of K/Q_1, and it lies in the p-group $Z(HQ_1/Q_1)$. Hence, xQ_1 is the identity element of K/Q_1, that is, x lies in Q_1. Conversely, if $x \in Q_1$, then x centralizes H since H and Q_1 are normal subgroups of K of coprime orders and so commute elementwise.

LEMMA 6.8. *If K and Q_1 are as in lemma 6.6, and L is a normal subgroup of K which contains HQ_1 properly and such that L/HQ_1 is a minimal normal subgroup of K/HQ_1, and P_1 is a p-Sylow subgroup of K, then the group $K_1 = P_1 L$ has the following properties:*

1. *L/HQ_1 is an elementary abelian q-group.*
2. *A q-Sylow subgroup of K_1 is not normal in K_1.*
3. *Q_1 is the maximal normal q-subgroup of K_1.*
4. *HQ_1/Q_1 is the maximal normal p-subgroup of K_1/Q_1.*

PROOF. By lemma 6.2, N/H has a normal p-complement. Hence, by lemma 3.1, K/H has a normal p-complement. Since $o(K)$ only involves the primes p and q, K/H is solvable. (Note that we are not forced to rely on BURNSIDE's theorem that groups of order $p^a q^b$ are solvable.) Since K/HQ_1 has no non-trivial normal p-subgroups by lemma 6.6 (here we use the fact

that $K/HQ_1 \cong K/Q_1/HQ_1/Q_1$) a minimal normal subgroup of K/HQ_1 is an elementary abelian q-group. This proves the first assertion of lemma 6.8.

Since H is normal in K_1, any normal q-subgroup of K_1 centralizes H. By lemma 6.7, Q_1 is the maximal normal q-subgroup of K_1. This proves both assertions 2 and 3 of lemma 6.8. Hence, K_1 satisfies the hypotheses of lemma 6.6 with K_1 playing the role of K. We conclude that HQ_1/Q_1 is the maximal normal p-subgroup of K_1/Q_1.

We are now ready to define the groups of type III, or more precisely, the groups of type III with respect to H, H being in $\mathfrak{H}(ccl(A))$ and maximal in the ordering $\ll$ relative to $\mathfrak{H}(ccl(A))$. The necessary components in the definition include (*) preceding lemma 6.1.

The subgroup K_1 of G will be said to be of type III with respect to H if and only if:

1. $K_1 \leqq N_G(H) = N$.
2. $o(K_1) = p^{\alpha_p(N)} q^b$.
3. A q-Sylow subgroup of K_1 is not normal in K_1.
4. If Q_1 is the maximal normal q-subgroup of K_1, then K_1/Q_1 has q-Sylow subgroups which are elementary abelian.
5. Q_1 is the set of all q-elements of K_1 which centralize H.
6. HQ_1/Q_1 is the maximal normal p-subgroup of K_1/Q_1.

In intuitive terms, K_1 is chosen to contain a p-Sylow subgroup of N, and to be small subject to the restriction that it not possess a normal p-complement.

We summarize lemmas 6.5 through 6.8 by using the definition of a subgroup of type III.

LEMMA 6.8′. *If $A \neq 1$ is an $\mathfrak{A}$-invariant normal subgroup of P, $\mathfrak{H}(ccl(A))$ is not empty, and if $H \in \mathfrak{H}(ccl(A))$ is maximal in the ordering $\ll$ relative to $\mathfrak{H}(ccl(A))$, then there exists a subgroup of type III with respect to H, containing any given p-Sylow subgroup of $N_G(H)$.*

The next lemmas bring into play for the first time Theorem B of HALL and HIGMAN, and in the application of Theorem B it will be seen that the assumption that p is odd will be used. We make appeal to subgroups of types I and II defined in section 3, where we take $\mathfrak{A}$ to play the role of $\mathfrak{B}$ and P to play the role of X. Subgroups of type II will be used explicitly only in section 8. However, since subgroups of type II are also of type I, they occur implicitly in all the lemmas dealing with subgroups of type I.

LEMMA 6.9. *If the p-Sylow subgroup P_1 of N is contained in the p-Sylow subgroup $\tilde{P} = P^y$ of G, and if B is any subgroup of P of type I, then $B^y \leqq H$.*

PROOF. By conjugating with y^{-1}, we can suppose that $P_1 \leqq P$, and try to prove that H contains every subgroup of type I. This conjugation by y^{-1} is permissible, since if H is maximal in the ordering $\ll$ relative to $\mathfrak{H}(ccl(A))$, so is $H^{y^{-1}}$. To carry out the proof, we make use of a subgroup K of type III with respect to H which contains P_1.

To prove lemma 6.9, it suffices to show that every subgroup of type I which contains $Z(P)$ is contained in H, since if C is any subgroup of type I, then $B = CZ(P)$ is also of type I, so that if we can show that B is contained in H it will follow that C is also contained in H.

We first show that $Z(P)$ is contained in H. Since $H \leqq P$, $Z(P)$ is at least contained in K, since it is contained in P_1. On the other hand, HQ_1/Q_1 is the maximal normal p-subgroup of K/Q_1 and K/Q_1 has no non-trivial normal q-subgroups. By 2.3.h, HQ_1/Q_1 contains its centralizer in K/Q_1. Since $Z(P)$ centralizes H and lies in K, we see that $Z(P)$ must lie in HQ_1, and hence in H, since H is the set of all p-elements of HQ_1.

Next let B be any subgroup of type I which contains $Z(P)$ as a proper subgroup. Put $Z(P) = A_1$, and use lemma 3.6 to construct a chain of subgroups of type I, terminating at B, $A_1 < A_2 \ldots < A_n = B$, such that $[P, A_{i+1}] \leqq A_i$ for $i = 1, \ldots, n-1$. We shall show that if A_k is contained in H, $k \leqq n-1$, then so is A_{k+1}.

If A_k is contained in H, then A_{k+1} is at least contained in P_1, since by lemma 3.8, A_{k+1} normalizes H. On the other hand, if in the group K above, we represent K as linear transformations on $H/\varphi(H)$, we find by 2.3.c and lemma 6.7 that Q_1 is a q-Sylow subgroup of the kernel M of this homomorphism of K into linear transformations of $H/\varphi(H)$. H is also contained in M. M/Q_1 is a normal p-subgroup of K/Q_1 which contains HQ_1/Q_1. Since HQ_1/Q_1 is the maximal normal p-subgroup of K/Q_1, we conclude that $M = HQ_1$. That is, we have a faithful representation of K/HQ_1 as linear transformations on $H/\varphi(H)$.

It is at this point that we want to make use of Theorem B of HALL and HIGMAN. We observe that K/HQ_1 has no non-trivial normal p-subgroups, and that a q-Sylow subgroup of K/HQ_1 is elementary abelian. Application of Theorem B shows that the minimal polynomial of an element aHQ_1 of order $p^m = r$ is $(x-1)^r$. Choose $a \in A_{k+1}$, $h \in H$. Since $[P, A_{k+1}, A_{k+1}] = 1$, we find $[h, a, a] = 1$, which says that a has a minimal polynomial on $H/\varphi(H)$ which is a divisor of $(x-1)^2$. Since $p \geqq 3$, we conclude that $r = 1$ and hence that $a \in H$. Hence $A_{k+1} \leqq H$, and the proof of the lemma is completed.

LEMMA 6.10. *If A is any subgroup of type I, then $\mathfrak{H}(ccl(A))$ is not empty.*

PROOF. We are required to show that if A is any subgroup of type I then there is some p-subgroup H which contains a conjugate of A and such that $A_G(H)$ is not a p-group. We know by lemma 5.1 that $\mathfrak{H}(ccl(Z(P)))$ is not empty. Lemma 6.9 gives immediately that $\mathfrak{H}(ccl(A))$ is not empty, since if H is maximal in the ordering $\leqq$ relative to $\mathfrak{H}(ccl(Z(P)))$, then H is contained in $\mathfrak{H}(ccl(A))$.

VII. Subgroups of Type III

The previous section was devoted essentially to proving the existence of subgroups of type III with respect to H. In this section, the considerably harder task of studying the structure of such subgroups is undertaken. This study leads to an examination of quite a number of subgroups, all of which

are relevant to the discussion more or less simultaneously. Diagram II, which follows with an explanation of the groups involved, may help the reader keep the various components in mind.

The explanation of the diagram will proceed by reconstructing the lattice, starting from the empty lattice.

1. Select a subgroup A of type I.

2. Choose $H \in \mathfrak{H}(ccl(A))$ maximal in the ordering $\ll$ relative to $\mathfrak{H}(ccl(A))$, and such that $P \cap N_G(H) = P_1$ is a p-Sylow subgroup of $N_G(H)$. This can always be accomplished by taking an arbitrary group H maximal in the ordering $\ll$ relative to $\mathfrak{H}(ccl(A))$, and passing to a conjugate of H if necessary.

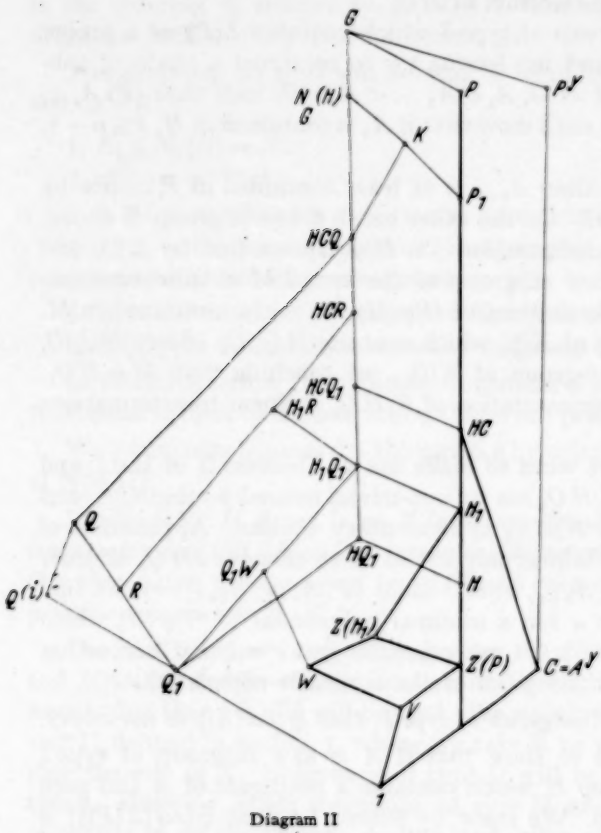


Diagram II

I. Insert $H, P_1, P, N_G(H)$, and G in the lattice.

3. Choose K to be a subgroup of type III with respect to H, and containing P_1. Denote by Q a q-Sylow subgroup of K, and by Q_1 the maximal normal q-subgroup of K.

II. Insert K, Q, and Q_1 in the lattice.

4. Select $C = A^y$ an arbitrary conjugate of A which is contained in P_1. There is at least one such C, since $H \in \mathfrak{H}(ccl(A))$.

III. Insert C and P^y in the lattice. It may occur that $P^y = P$, but this makes no difference.

5. Form the groups $\{H, C\} = HC$ (H is normal in K), and $\{H, C, Q\} = HCQ$. (Since $N_G(H)/H$ has a normal p-complement by lemma 6.2, so does K/H, that is, QH/H is normal in K/H, so that QH is normal in K.)

IV. Insert HQ_1, HC, HCQ_1, and HCQ in the lattice.

6. Q/Q_1 is elementary abelian by condition 4 in the definition of a subgroup of type III with respect to H, and $Q/Q_1 \cong HQ/HQ_1$. Also, HQ/HQ_1 is normal in HCQ/HQ_1, so that HCQ_1/HQ_1 induces automorphisms on

HQ/HQ_1. Since $HCQ_1/HQ_1 \cong C/C\cap H$, we have the p-group HCQ_1/HQ_1 represented as linear transformations on the elementary abelian q-group HQ/HQ_1. Since $p \neq q$, this representation is completely reducible. Select $Q^{(1)}, \ldots, Q^{(r)}$ such that $Q_1 < Q^{(i)} \leqq Q$, $i = 1, \ldots, r$, $r \geqq 1$, and such that $HQ^{(i)}/HQ_1$ is a minimal HCQ_1/HQ_1-invariant subgroup of HQ/HQ_1, and such that $Q/Q_1 = Q^{(1)}/Q_1 \times \cdots \times Q^{(r)}/Q_1$. The groups $Q^{(i)}$ are simply Q intersected with the complete inverse image in HCQ of minimal HCQ_1/HQ_1-invariant subgroups of HQ/HQ_1.

V. Insert the groups $Q^{(i)}$ in the lattice.

7. Choose a fixed but arbitrary index j, $1 \leqq j \leqq r$, and put $R = Q^{(j)}$.

VI. Insert R and HCR in the lattice.

8. Select $H_1 \leqq HC$, such that H_1Q_1 is normal in HCR, and such that H_1Q_1/Q_1 is the maximal normal p-group of HCR/Q_1. $H \leqq H_1$, since HQ_1 is normal in HCR, and since H_1 is the join of all subgroups T of HC such that TQ_1 is normal in HCR.

VII. Insert H_1, H_1Q_1 and H_1R in the lattice.

9. Since $P_1 \leqq P$, and H is maximal in the ordering relative to $\mathfrak{H}(ccl(A))$, by lemma 6.9, H contains every subgroup of type I. Since $Z(P)$ is of type I, $Z(P) \leqq H$, so that $Z(P) \leqq H_1$. Form $Z(H_1)$, and observe that $Z(H_1)$ contains $Z(P)$.

10. Form the subgroup $W = \{w \mid w \in Z(H_1), w^p = 1\}$, and $V = W \cap Z(P)$.

VIII. Insert $Z(H_1)$, $Z(P)$, W, WQ_1 (Q_1 is normal in HCR), and V in the lattice. Insert 1 in the lattice.

This completes the construction of the lattice.

Diagram II has put in view the relevant groups under discussion. We now turn to the relevant homomorphisms. $Z(H_1)$ is characteristic in H_1, and W is characteristic in $Z(H_1)$, hence is characteristic in H_1. Thus, WQ_1/Q_1 is characteristic in H_1Q_1/Q_1. Since $H_1Q_1 \lhd HCR$, we have $H_1Q_1/Q_1 \lhd HCR/Q_1$, and hence $WQ_1/Q_1 \lhd HCR/Q_1$. In the group HCR, we have the following chain of subgroups, each normal in HCR: $1 \leqq Q_1 < Q_1W \leqq Q_1H_1 < HCR$. Since Q_1 and Q_1W are both normal in HCR, HCR induces automorphisms on Q_1W/Q_1 by conjugation. $Q_1W/Q_1 \cong W$, and W, from its definition, is an elementary abelian p-group. Thus we have a homomorphism from HCR into $\mathrm{Aut}(Q_1W/Q_1)$. Let L be the kernel of this homomorphism.

LEMMA 7.1. $L = H_1Q_1$.

PROOF. Since $W \leqq Z(H_1)$, H_1 is contained in L. Q_1 is obviously contained in L, so we have $L \geqq H_1Q_1$. Let gQ_1 be any q-element of HCR/Q_1 which centralizes WQ_1/Q_1. Then gQ_1 centralizes VQ_1/Q_1, that is, if $v \in V$, then $g^{-1}vg = vg_1$, where g_1 lies in Q_1. But V is contained in H, and H and Q_1 commute elementwise, being normal subgroups of HCR of coprime orders. Now vg_1, being a conjugate of v, must be a p-element. Since v and g_1 commute, g_1 must be a p-element. Since $g_1 \in Q_1$, we have $g_1 = 1$, that is, g centralizes V.

V is characteristic in $Z(P)$, hence of type I, and in particular, is $\mathfrak{A}$-invariant. By lemma 5.3, $N_G(V)$ has a normal p-complement, say E. Let $\tilde{Q}$ be a q-Sylow subgroup of L. By the previous paragraph $\tilde{Q} \leqq N_G(V)$, since it is even contained in $C_G(V)$, so $\tilde{Q} \leqq E$. Also, $H \leqq N_G(V)$, since V is normal in P and H is contained in P. Finally, $\tilde{Q}$ normalizes H, since H is normal in HCR. Hence $[\tilde{Q}, H] \leqq H$. But $[\tilde{Q}, H] \leqq [E, H] \leqq E$, since $E \lhd N(V)$. Hence, $[\tilde{Q}, H] \leqq H \cap E = 1$, since H and E have coprime order; that is, $\tilde{Q}$ centralizes H. But then by condition 5 in the definition of the subgroup K of type III with respect to N, we find that $\tilde{Q} = Q_1$.

We have shown that Q_1 is a q-Sylow subgroup of L. Hence, L/Q_1 is a normal p-subgroup of HCR/Q_1. Since H_1Q_1/Q_1 is the maximal normal p-subgroup of HCR/Q_1, it follows that $L = H_1Q_1$, as asserted.

LEMMA 7.2. *HC/H_1 is represented faithfully on W and an element cH_1 of order $r = p^m$ has the minimal equation $(x-1)^r = 0$ on W.*

PROOF. We first verify that H_1 is normal in HC, in order that HC/H_1 make sense. Since $H_1Q_1 \lhd HCR$ by lemma 7.1, we have $H_1Q_1 \cap HC \lhd HC$. Clearly, $H_1Q_1 \cap HC \geqq H_1$, since $HC \geqq H_1$. Also, however, $H_1Q_1 \cap HC \leqq H_1$, since Q_1 is a q-group. Thus $H_1 \lhd HC$.

In order to prove this lemma, we make use of the following diagram:

$$\begin{array}{ccccc} HCQ_1/H_1Q_1 & \xrightarrow{\varrho} & \mathrm{Aut}(WQ_1/Q_1) & & WQ_1/Q_1 \\ \lambda\downarrow & & \downarrow\mu^* & & \downarrow\mu \\ HC/H_1 & \xrightarrow[\varrho^*]{} & \mathrm{Aut}(W) & & W \end{array}$$

ϱ is the homomorphism which maps cH_1Q_1 onto the automorphism $\varrho(c)$ defined by: $\varrho(c)(wQ_1) = c^{-1}wcQ_1$. λ is the isomorphism: $\lambda(cH_1Q_1) = cH_1$. μ is the isomorphism: $\mu(wQ_1) = w$. μ^* is the isomorphism of $\mathrm{Aut}(WQ_1/Q_1)$ and $\mathrm{Aut}(W)$ induced by μ: if $\sigma \in \mathrm{Aut}(WQ_1/Q_1)$, then $\mu^*(\sigma)(w) = \mu(\sigma(wQ_1))$. Finally, we define $(\varrho^*(cH_1))(w) = c^{-1}wc$. One verifies directly that the diagram is commutative. Since ϱ^* obviously extends to a map of the group ring of HC/H_1 over integers mod p into the endomorphism ring of W and ϱ extends similarly, the question of the minimal polynomials can be thrown onto the behavior of ϱ, which is what we do.

Lemma 7.1 states that HCR/H_1Q_1 is represented faithfully on WQ_1/Q_1.

From the definition of H_1, HCR/H_1Q_1 has no non-trivial normal p-subgroups. A q-Sylow subgroup of HCR/H_1Q_1 is elementary abelian. Hence, HCR/H_1Q_1 is a p-soluble group with no non-trivial normal p-groups which is represented faithfully as linear transformations of the vector space WQ_1/Q_1. Theorem B of HALL and HIGMAN obtains, and the lemma is proved.

LEMMA 7.3. *$Z(HC/H_1)$ is cyclic.*

PROOF. Since λ: $HCQ_1/H_1Q_1 \cong HC/H_1$, it suffices to prove that $Z(HCQ_1/H_1Q_1)$ is cyclic. Now HCQ_1/H_1Q_1 induces automorphisms of RH_1/H_1Q_1. By the choice of R, RH_1/H_1Q_1 ($\cong RH/Q_1H$) is a minimal

HCR/H_1Q_1-invariant subgroup of RH_1/H_1Q_1, and since RH_1/H_1Q_1 ($\cong R/Q_1$) is abelian by condition 4 in the definition of a subgroup of type III with respect to H, it follows that RH_1/H_1Q_1 is a minimal HCQ_1/H_1Q_1-invariant subgroup, that is, HCQ_1/H_1Q_1 operates irreducibly on RH_1/H_1Q_1.

Since H_1Q_1/Q_1 is the maximal normal p-group of HCR/Q_1, the group HCR/H_1Q_1 has no non-trivial normal p-groups. Hence, the group RH_1/H_1Q_1, which is the maximal normal q-group of HCR/H_1Q_1 (it is a q-Sylow subgroup of HCR/H_1Q_1) contains its centralizer in HCR/H_1Q_1 by 2.3.h. It follows directly from this fact that HCQ_1/H_1Q_1 operates faithfully on RH_1/H_1Q_1.

We have shown that HCQ_1/H_1Q_1 operates faithfully and irreducibly on RH_1/H_1Q_1, this last group being an elementary abelian q-group, so that it can be considered as a vector space over integers mod q. Lemma 3.11 applies, and the lemma is proved.

VIII. The Concluding Lemmas

The situation studied in sections 6 and 7 led to a lattice configuration together with certain homomorphisms. The study was carried on in such a manner that the choices involved in constructing the situation were all given explicitly. Since all the necessary preliminary results have been obtained, it is worthwhile to summarize the places in the argument where a choice has been made, before proving the concluding lemmas.

Consider the 6-tuple (A, H, K, Q, C, R). The only choices in the argument of section 7 occurred in the selection of these six subgroups, as follows:

1. Select a subgroup A of type I.
2. Select $H \in \mathfrak{H}(ccl(A))$, H maximal in the ordering $\lessdot$ relative to $\mathfrak{H}(ccl(A))$, such that $P \cap N_G(H) = P_1$ is a p-Sylow subgroup of $N_G(H)$.
3. Select K a subgroup of type III with respect to H, and containing P_1.

(D) 4. Select a q-Sylow subgroup Q of K.

5. Select C, a conjugate of A contained in P_1.
6. Select R such that $Q_1 < R \leqq Q$ and such that RH/HQ_1 is a minimal normal subgroup of HCQ/HQ_1. (Here Q_1 is uniquely determined as the maximal normal q-subgroup of K.)

When these choices are made the subgroup H_1 is uniquely determined: $H_1 = HC \cap L$, where L is the maximal normal subgroup of HCR such that L/Q_1 is a p-group.

The next two lemmas take us to the heart of the matter.

LEMMA 8.1. *Suppose for some choice of A, H, K, and Q satisfying D1–4, we can find C $(= A^y)$ and R satisfying D5 and D6 such that $H_1 = HC \cap L < HC$. If $B \neq 1$ is any $\mathfrak{A}$-invariant normal subgroup of P contained in A, then $B^y = B_1$ is not contained in H_1.*

PROOF. Suppose false and that $B_1 \leqq H_1$ for suitable choice of $B \neq 1$. Then the p-subgroup CW normalizes B_1 and is thus contained in some p-Sylow subgroup S of $N_G(B_1)$. Since $B \lhd P$, $B_1 \lhd P^y$, so S is a p-Sylow subgroup of G.

too. By lemmas 5.2 and 5.3, $N_G(B_1)$ has a normal p-complement. Now $C \lhd P^y$ and $Z(C) \lhd P^y$ so by lemma 3.2, C and $Z(C)$ are normal in S, and hence are both normal in $T = \{S, P^y\}$. Hence $C/Z(C) \lhd T/Z(C)$ and $C/Z(C) \leqq Z(P^y/Z(C))$ since $[P^y, C] \leqq Z(C)$, C being conjugate to a subgroup of type I. By lemma 3.2, $T/Z(C)$ is p-normal, so by lemma 3.9, $C/Z(C) \leqq Z(P^y/Z(C))$ implies that $C/Z(C) \leqq Z(S/Z(C))$, or $[S, C] \leqq Z(C)$. Hence, $[S, C, C] = 1$, and in particular $[W, C, C] = 1$, a contradiction to lemma 7.2 since $H_1 < HC$.

LEMMA 8.2. *For any choice of A, H, K, and Q satisfying D1–4 above, there exist C and R satisfying D5 and D6 such that $H_1 = HC \cap L < HC$.*

PROOF. Lemma 8.2 will be proved by showing that if it were false, then the triple $(G, P, \mathfrak{A})$ would not have property $\mathfrak{N}$. To be very specific, we shall derive a contradiction from the following assumptions:

(E)
1. $(G, P, \mathfrak{A})$ has property $\mathfrak{N}$.
2. Theorem A is false for the triple $(G, P, \mathfrak{A})$.
3. G is of minimal order with properties 1 and 2.
4. Lemma 8.2 is false.

To prove lemma 8.2, we first prove three other lemmas.

LEMMA 8.3. *Under the assumptions* (E), $V(ccl(A), H) = V(ccl(A), P_1)$.

PROOF. Lemma 8.3 demands that we show that if C is a conjugate of A contained in P_1, then C is even contained in H.

For convenience, put $V(ccl(A), H) = V(H)$ and $V(ccl(A), P_1) = V(P_1)$. Let $C_1, \ldots, C_s$ be the distinct conjugates of A contained in P_1. Since lemma 8.2 is assumed false, $HC_i = H_1$ for each i, and any choice of R. H_1 depends on C_i, of course, but we are assuming that it does not depend on R, and that $HC_i = H_1$ for all choices of R. Hence Q/Q_1 normalizes HC_iQ_1/Q_1, since Q/Q_1 is generated by the R/Q_1. Since this is true for all i, we see that Q/Q_1 normalizes JQ_1/Q_1, where $J = \{H, C_1, \ldots, C_s\}$. Lemma 8.3 is the statement that $H = J$.

J is normal in P_1, since P_1 normalizes H and permutes the C's among themselves. Suppose by way of contradiction that $H < J$. By lemma 6.1, a q-Sylow subgroup of $N_G(J)$ centralizes J. Since JQ_1 is normalized by Q by the preceding paragraph, and since $Q_1 \lhd K$, we find that $JQ_1 \lhd \{P_1, Q\} = K$, so that $JQ_1/Q_1 \lhd K/Q_1$. This contradicts condition 6 in the definition of a subgroup of type III with respect to H, and completes the proof of lemma 8.3.

LEMMA 8.4. *Under the assumptions* (E), $P_1 = P$.

PROOF. Suppose $P_1 < P$. Then by 2.3.e, P_1 is contained as a proper normal subgroup of some p-subgroup P_2. P_2 normalizes $V(P_1)$, since it permutes the C's among themselves. Since $V(P_1) = V(H)$ by lemma 8.3, $V(P_1)$ is normal in K, since the elements of K induce automorphisms of H which permute the C's among themselves. By lemma 5.9, with A playing the role of A, D playing the role of H, and R playing the role of Q, Q does not centralize A. A fortiori, Q does not centralize $V(P_1)$. But then $V(P_1) \in \mathfrak{H}(ccl(A))$ and is larger than H in the ordering $\ll$ relative to $\mathfrak{H}(ccl(A))$, since $\alpha_p(P_2) > \alpha_p(P_1) = \alpha_p(N(H))$.

This completes the proof of lemma 8.4.

LEMMA 8.5. *Under the assumptions* (E), $V(H)$ *is an* $\mathfrak{A}$*-invariant normal subgroup of* P *such that* $A_G(V(H))$ *is not a* p*-group, so that* $(G, P, \mathfrak{A})$ *does not have property* $\mathfrak{N}$.

PROOF. Since $V(H) = V(P_1)$ and $P_1 = P$ by lemmas 8.3 and 8.4, $V(P) = V(H)$ is normal in P. By lemma 5.8, $V(P)$ is $\mathfrak{A}$-invariant. Q does not centralize $V(H)$, since it does not centralize A. But Q does normalize $V(H)$. This completes the proof of lemma 8.5, and proves lemma 8.2 as well.

The object of lemmas 8.1 through 8.5 has been to obtain information about the group HC independent of its embedding in G. From this point to the end of the proof of Theorem A, the relevant portion of diagram II is the heavily-inked sublattice involving only p-subgroups.

LEMMA 8.6. *If* A *is an abelian subgroup of type I which is not elementary abelian, then* $H_1 = HC$, *for any choice of* $H, K, Q, C,$ *and* R, *which satisfy* $D1-6$.

PROOF. If $C \leqq H$, then $H_1 = H = HC$, so we are done. Suppose by way of contradiction that $C \nleqq H$, and that $H_1 < CH$. By lemma 7.3, $Z(HC/H_1)$ is cyclic. Since $HC/H_1 \cong C/C \cap H_1$, and C is a conjugate of the abelian p-group A, we conclude that HC/H_1 is cyclic of order p^d, $d \geqq 0$, so the lemma demands that we show $d = 0$.

CASE 1. $d = 1$. Since A is not elementary abelian, neither is C, so $\varphi(C) \neq 1$. Since $C \cap H_1$ is of index $p^d = p$ in C, we conclude that $\varphi(C)$ is contained in H_1. This is not possible by lemma 8.1.

CASE 2. $d > 1$. We choose $c \in C$ so that cH_1 is a cyclic generator for CH/H_1. We then choose a subgroup W_1 of W, and a basis $w_1, \ldots, w_t$ of W_1, where $t = p^d$, with respect to which c induces an automorphism with matrix in Jordan canonical form

$$I + N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & & 1 & 1 \\ 0 & \ldots & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lemma 7.2 guarantees that we can find such a W_1.

The matrix of c^p is $(I+N)^p = I + N^p$, so that c^p centralizes $w_{t-(p-1)}$, $w_{t-(p-2)}, \ldots, w_t$, since N^p has zeroes in its last p rows. Since $p \geqq 3$, c^p centralizes the subgroup $W_2 = \{w_{t-2}, w_{t-1}, w_t\}$. But c^p and $C \cap H_1$ generate a subgroup which contains the p-th power of every element in C, so we conclude that $\varphi(C)$ centralizes W_2.

The group CW_2 is a p-subgroup contained in HC, and it normalizes $\varphi(C)$, since it even centralizes it. Enlarge CW_2 to a p-Sylow subgroup S_1 of $N_G(\varphi(C))$. By lemmas 5.2 and 5.3, $N_G(\varphi(C))$ has a normal p-complement. C is normal in the p-Sylow subgroup P^y of G, and since $\varphi(C)$ is characteristic in C, P^y is a p-Sylow subgroup of $N_G(\varphi(C))$. By lemma 3.2, C is normal in S_1, so that

$[S_1, C] \leqq C$. Since C is abelian $[S_1, C, C] = 1$. Since W_2 is a subgroup of S_1, we also have $[W_2, C, C] = 1$. But $[w_{i-2}, c, c] = w_i \neq 1$, and this contradiction shows that case two is not possible.

Since $d = 1$ and $d > 1$ are both impossible, we conclude that $d = 0$, that is, $H_1 = HC$.

LEMMA 8.7. *If A is any abelian subgroup of type I, then A is elementary abelian.*

PROOF. This is an immediate consequence of lemma 8.6, in conjunction with lemma 8.2.

LEMMA 8.8. *If A is a maximal abelian normal subgroup of P which is $\mathfrak{A}$-invariant, then $H_1 = HC$, for any choice of H, K, Q, C, and R which satisfy $D1-6$.*

PROOF. If $C \leqq H$, then $H_1 = HC = H$, and we are done. Suppose by way of contradiction that $H_1 < HC$. Since $CH/H_1 \cong C/C \cap H_1$, and since C is abelian, we conclude that CH/H_1 is abelian. By lemma 8.3, CH/H_1 is cyclic. By lemma 8.7, A is elementary abelian, so $C = A^y$ is also elementary abelian. Hence, HC/H_1 is of order 1 or p, so must be of order p, since $H_1 < HC$. Since $A \lhd P$, we have $C \lhd P^y$. Since A is a maximal abelian normal subgroup of P, $Z(P) \leqq A$. Hence $Z(P^y) \leqq C$.

It follows from lemma 8.1 that $Z(P^y) \not\leqq H_1$, so we choose an element $c \in Z(P^y)$ such that cH_1 is a cyclic generator for HC/H_1. In W, choose a subgroup W_1, and a basis $w_1, \ldots, w_p$ for W_1 such that c induces an automorphism on W_1 with matrix in Jordan canonical form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & \ldots & & 1 & 1 \\ 0 & \ldots & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

which is possible by lemma 7.2. Since c centralizes w_p, we conclude that w_p centralizes all of C. Since C is a maximal abelian normal subgroup which is conjugate to the $\mathfrak{A}$-invariant normal subgroup A of P, we conclude that w_p lies in C, by lemma 5.7. Put $D = \{c, w_p\}$. We see that w_{p-1} normalizes D but does not centralize c. Since w_{p-1} centralizes $C \cap H_1$, it follows that w_{p-1} normalizes $\{C \cap H_1, D\}$, which is equal to C, since $C \cap H_1$ and c generate C and w_p is contained in C. Hence, the group $E = \{C, w_{p-1}\}$ is a p-group contained in $N_G(C)$.

Enlarge the group E to a p-Sylow subgroup of $N_G(C)$, say S. Then S is a p-Sylow subgroup of G, too, since $C \lhd P^y$. $N_G(C)$ has a normal p-complement by lemmas 5.2 and 5.3. By lemma 3.2, we conclude that $C \lhd S$.

Since $N_G(C)$ has a normal p-complement, it is p-normal by lemma 3.2. Since $Z(P^y) \leqq S$, and P^y is a p-Sylow subgroup of $N_G(C)$, $Z(P^y) = Z(S)$, by p-normality. But w_{p-1} is an element of S which does not centralize the element c of $Z(P^y)$. This contradiction completes the proof of lemma 8.8.

LEMMA 8.9. *If A is any maximal abelian normal subgroup of P, then A is not $\mathfrak{A}$-invariant.*

PROOF. This is an immediate consequence of lemma 8.8, in conjunction with lemma 8.2.

Since none of the maximal abelian normal subgroups of P is $\mathfrak{A}$-invariant, lemma 3.7 guarantees that P contains subgroups of type II. Since subgroups of type II are also subgroups of type I, the results of sections 6 and 7 are valid.

LEMMA 8.10. *If A is any subgroup of type II, then either $H_1 = HC$ or HC/H_1 is non-abelian for any choice of $H, K; Q, C$, and R satisfying $D1-6$.*

PROOF. This is a consequence of lemma 8.1, since if $H_1 < HC$ and HC/H_1 is abelian, then $C' \leqq H_1$. Since $C' \neq 1$, this contradicts lemma 8.1.

LEMMA 8.11. *If A is any subgroup of type II, then $H_1 = HC$ for any choice of H, K, Q, C $(= A^y)$ and R satisfying $D1-6$.*

PROOF. Assume by way of contradiction that $H_1 < HC$. Then lemma 8.10 says that HC/H_1 is not abelian. By lemma 8.1, $Z(P^y) \not\leqq H_1$, and $Z(P^y)$ is elementary abelian by lemma 8.7. Now $Z(C)/Z(C) \cap H_1 \cong Z(C)H_1/H_1 \leqq Z(CH_1/H_1)$, and since $Z(CH/H_1)$ is cyclic by lemma 7.3 and $Z(C)$ is elementary abelian by lemma 8.7, we conclude that $Z(C)/Z(C) \cap H_1$ has order 1 or p. But $Z(P^y) \leqq Z(C)$ by condition 5 in the definition of a subgroup of type II, and $Z(P^y) \not\leqq H_1$, so we must have $Z(C)/Z(C) \cap H_1$ of order p, and

$$(***) \qquad Z(C) = \{c, Z(C) \cap H_1\}$$

for some $c \in Z(P^y)$.

Since HC/H_1 is not abelian, there exist elements $a, b \in C - H_1$ with $[a, b] \in C' \leqq Z(C)$, but $[a, b] \in' H_1$. Then $[a, b] = c^k d$, with $0 < k < p$, and $d \in Z(C) \cap H_1$, and by altering the choice of c if necessary, we assume that $k = 1$. Now we form the group $X = \{a, b, H_1\}/H_1 \leqq CH_1/H_1$. Then $[aH_1, bH_1] = cH_1$ lies in $Z(X)$. Also $(cH_1)^p = H_1$, and since $\varphi(C) \leqq Z(C)$ by condition 3 in the definition of a subgroup of type II, we have $(aH_1)^p = a^p H_1 \in Z(C)H_1/H_1 = \{c, H_1\}/H_1$, and similarly for b. Therefore $o(X) = p^3$.

X is represented faithfully on W since X is a subgroup of HC/H_1 which is represented faithfully on W by lemma 7.2. Let V_1 be a subgroup of W of minimal possible order which is X-invariant and on which X is represented faithfully.

The number of subgroups of index p in V_1 is $\equiv 1 \pmod p$ [2, p. 152]. X induces automorphisms of V_1 which permute these subgroups among themselves. Hence, X must leave at least one of them fixed, say V_2. Since $o(V_1) > o(V_2)$, X is not represented faithfully on V_2. It follows that V_2 centralizes c, since $\{c, H_1\}/H_1 = Z(X)$ is contained in every non-trivial normal subgroup of X. It follows that V_2 centralizes $\{c, Z(C) \cap H_1\} = Z(C)$, by $(***)$. The group $\{V_2, C\}$ is contained in the p-group HC, so is a p-group. By lemmas 5.2 and 5.6, with $Z(C)$ in the role of B and C in the role of C and V_2 in the role of T, we conclude that $[V_2, C] \leqq Z(C)$. Put $W_2 = [V_2, C]$, and $W_1 = [V_1, c]$. Now V_1 and V_2 are both X-invariant, and $[V_1 : V_2] = p$. Hence X is represented as

linear transformations on V_1/V_2, which is the cyclic group of order p. Since X is a p-group, this representation is trivial. In group-theoretic terms, this says that $[v_1, x] \in V_2$ for all $v_1 \in V_1$ and $x \in X$. In linear transformation terms, this says that $v_1(I-x) \in V_2$ for all $v_1 \in V_1$ and $x \in X$. We apply lemma 3.5 to conclude that $W_1 \leqq W_2$.

Since $W_2 \leqq Z(C)$, we conclude that $W_1 \leqq Z(C)$. Now V_1 centralizes H_1 and hence $Z(C) \cap H_1$. Since $[V_1, c] = W_1 \leqq Z(C)$, it follows from (***) that V_1 normalizes $Z(C)$. Since X is represented faithfully on V_1, V_1 possesses an element v which does not centralize c.

The group $Z(C)V_1$ is contained in the p-group HC, so is a p-group. Enlarge $Z(C)V_1$ to a p-Sylow subgroup S of $N_G(Z(C))$. By lemmas 5.2 and 5.3, $N_G(Z(C))$ has a normal p-complement. Now $Z(P^y) \leqq Z(C)$, since C is conjugate to A, and A is of type II. Hence $Z(P^y) \leqq S$. Also P^y is a p-Sylow subgroup of $N_G(Z(C))$. Since $N_G(Z(C))$ has a normal p-complement, it is p-normal by lemma 3.2. Since $Z(P^y) \leqq S$, we have $Z(P^y) = Z(S)$. But $c \in Z(P^y)$ and v is an element of S which does not centralize c. This contradiction completes the proof of lemma 8.11 and at the same time completes the proof of Theorem A, since lemma 8.11 is in contradiction with lemma 8.2.

Bibliography

[1] BAER, R.: Classes of finite groups and their properties. Ill. J. Math. **1**, 115–187 (1957). – [2] BURNSIDE, W.: Theory of groups of finite order, 2nd ed. New York: Dover 1955. – [3] HALL, M.: The theory of groups. New York: MacMillan 1959. – [4] HALL, P.: A contribution to the theory of groups of prime-power order. Proc. Lon. Math. Soc. **36**, 29–95 (1933/34). – [5] HALL, P., and G. HIGMAN: On the p-length of p-soluble groups. Proc. Lon. Math. Soc. **6**, 1–42 (1956). – [6] THOMPSON, J.: Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order. Proc. Nat. Acad. Sci. **45**, 578–581 (1959). – [7] WIELANDT, H.: p-Sylow-Gruppen und p-Faktor-Gruppen. J. reine angew. Math. **182**, 180–193 (1940). – [8] ZASSENHAUS, H.: The theory of groups, 2nd English ed. New York: Chelsea 1958.

Dept. of Math., University of Chicago, Chicago 37, Ill. (U.S.A.)

(Eingegangen am 22. Mai 1959)

HODGES, J. H.
Math. Zeitschr. 72, 355–361 (1960)

Some Determinantal Equations Over a Finite Field

By
JOHN H. HODGES

1. INTRODUCTION AND NOTATION. Let $q=p^n$, p a prime, and let $GF(q)$ denote the finite field of order q. Let A be a nonsingular matrix of order m over $GF(q)$ and let t be an integer such that $1 \leqq t \leqq m$. In this paper, we consider the problem of finding the number of solutions U, V of the determinantal equation

$$\begin{vmatrix} A & V \\ U & 0 \end{vmatrix} = \beta, \tag{1.1}$$

where β is an assigned number of $GF(q)$, and U and V are $t \times m$ and $m \times t$ matrices, respectively, over $GF(q)$.

For $t=1$, (1.1) reduces to an ordinary bilinear equation, for which the number of solutions is well known. In order to determine the number of solutions for arbitrary t, the determinantal equation (1.1) is reduced to a form which is shown to be related to a problem involving bilinear forms over $GF(q)$. This latter problem has been solved in [5]. By using the relationship between the two problems, the number of solutions of (1.1) is found (Theorem 1) for $\beta \neq 0$. Then, by using Theorem 1, the number of solutions of (1.1) is found (Theorem 2) for $\beta=0$. As a check on these theorems, it is shown in §5 that the results which they give for $t=1$ and $t=m$ coincide with results which can be obtained directly. For $\beta=0$, the solutions of (1.1) may be restricted to those for which both U and V are of rank t. The number of such *proper* solutions is found in Theorem 3. In § 7 we consider the generalized determinantal equation

$$\sum_{i=1}^{k} \begin{vmatrix} A_i & V_i \\ U_i & 0 \end{vmatrix} = \beta, \tag{1.2}$$

where $k \geqq 1$, the A_i are nonsingular matrices of order m_i, U_i and V_i are $t_i \times m_i$ and $m_i \times t_i$ matrices, respectively, and $1 \leqq t_i \leqq m_i$ for $i=1, \ldots, k$. Finally, in § 8, as an application of the results for the number of solutions of (1.2), we evaluate several generalized Gauss sums. Some of the methods of this paper are similar to those employed by L. CARLITZ in considering the analogous problems for symmetric matrices in [2] and for skew matrices in [3].

In the present paper, numbers of $GF(q)$ will be denoted by lower case Greek letters $\alpha, \beta, \ldots$. Matrices with elements in $GF(q)$ will be denoted by italic capitals $A, B, \ldots$. $A(m, s)$ will denote a matrix of m rows and s columns.

The research for this paper was supported, in part, by National Science Foundation Research Grant G-2990.

We will need the following formula, which is a special case of a formula due to LANDSBERG [6], for the number $g(m, t, t)$ of $m \times t$ matrices ($t \leqq m$) of rank t over $GF(q)$:

$$g(m, t, t) = \prod_{i=0}^{t-1} (q^m - q^i). \tag{1.3}$$

In particular,

$$g_t = g(t, t, t) = \prod_{i=0}^{t-1} (q^t - q^i) \tag{1.4}$$

is the number of nonsingular matrices of order t over $GF(q)$.

2. THE SIMPLE DETERMINANTAL EQUATION. Let $\beta \in GF(q)$ be fixed and let $A = A(m, m) = (\alpha_{ij})$ with $|A| = \delta \neq 0$. If t is an arbitrary integer $\geqq 1$, let $N(m, t; \beta) = N(A; m, t; \beta)$ denote the number of pairs $U = U(t, m) = (\mu_{rj})$, $V = V(m, t) = (\nu_{is})$ of matrices over $GF(q)$ such that

$$\begin{vmatrix} A & V \\ U & 0 \end{vmatrix} = \beta. \tag{2.1}$$

There is no loss of generality in assuming that $t \leqq m$. Let $A^{-1} = (\beta_{ij})$, so that $\beta_{ij} = \delta^{-1} A_{ij}$, where (A_{ij}) is the adjoint of A. Then for each $i = 1, \ldots, m$ and $r = 1, \ldots, t$, define

$$\lambda_{ir} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} \mu_{rj}. \tag{2.2}$$

Consider the determinant in (2.1). For each $r = 1, \ldots, t$ subtract, from the $(m+r)$-th row of the determinant, λ_{ir} times the i-th row, for $i = 1, \ldots, m$. If the resulting determinant is denoted by $G = |\gamma_{ab}|$, then for any $a = m + r$ with $1 \leqq r \leqq t$ and any b such that $1 \leqq b \leqq m$, we have

$$\begin{cases} \gamma_{ab} = \mu_{rb} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ir} \alpha_{ib} = \mu_{rb} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ib} \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} \mu_{rj} \right) \\ \qquad = \mu_{rb} - \sum_{j=1}^{m} \mu_{rj} \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ib} \beta_{ij} \right). \end{cases} \tag{2.3}$$

But $\beta_{ij} = \delta^{-1} A_{ij}$, so that the inner sum in the right member of (2.3) is equal to

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ib} \beta_{ij} = \delta^{-1} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ib} A_{ij} = \begin{cases} 0 & (j \neq b), \\ \delta^{-1} \delta = 1 & (j = b). \end{cases} \tag{2.4}$$

Thus, using (2.4) in (2.3), we get, for $m+1 \leqq a = m+r \leqq m+t$ and $1 \leqq b \leqq m$,

$$\gamma_{ab} = \mu_{rb} - \mu_{rb} = 0. \tag{2.5}$$

Furthermore, for $m+1 \leqq a = m+r \leqq m+t$ and $m+1 \leqq b \leqq m+t$ so that $b = m+s$ with $1 \leqq s \leqq t$, we have

$$\gamma_{ab} = -\sum_{i=1}^{m} \lambda_{ir} \nu_{is} = -\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} \mu_{rj} \right) \nu_{is} = -\sum_{i,j=1}^{m} \beta_{ij} \mu_{rj} \nu_{is}. \tag{2.6}$$

In view of (2.5) and (2.6), it is clear that equation (2.1) reduces to

$$\left|\sum_{i,j=1}^{m} \beta_{ij}\mu_{ri}\nu_{js}\right| = (-1)^t \delta^{-1}\beta \qquad (r, s = 1, \ldots, t), \tag{2.7}$$

so that every solution of (2.1) is a solution of (2.7) and conversely. Therefore, $N(m, t; \beta)$, the number of solutions of (2.1), is also equal to the number of solutions of (2.7).

3. A RELATED PROBLEM. Let $A = A(m, k)$ and $B = B(s, t)$ have ranks r and z, respectively, where $z \leqq r$, and let $N_t^z(A, B)$ denote the number of pairs $U = U(s, m)$, $V = V(k, t)$ of matrices over $GF(q)$ such that

$$UAV = B. \tag{3.1}$$

The value of $N_t^z(A, B)$ has been found in [5]. We shall only consider the case where A and B are square and nonsingular, that is, $m = k = r$ and $s = t = z$. Then by [5, Theorem 3], we have explicitly

$$N_t^t(A, B) = q^{t(2m-t-1)/2} \prod_{i=1}^{t} (q^{m-i+1} - 1) = q^{t(m-t)}\, g(m, t, t), \tag{3.2}$$

where $g(m, t, t)$ is given by (1.3). It is easy to show that the number of square matrices B of order t and determinant $\beta \neq 0$ is $g_t/(q-1)$, where g_t, the number of nonsingular matrices of order t, is given by (1.4). If we take $A = A(m, m) = (\alpha_{ij})$, $U = U(t, m) = (\mu_{ri})$ and $V = V(m, t) = (\nu_{js})$ in (3.1), then

$$UAV = \left(\sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij}\mu_{ri}\nu_{js}\right), \qquad (r, s = 1, \ldots, t). \tag{3.3}$$

Let B range over the non-singular matrices of order t and determinant $\beta \neq 0$. Since by (3.2), the number $N_t^t(A, B)$, as a function of B, depends only on the order of B, it follows that the number of solutions of the equation

$$|UAV| = \left|\sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij}\mu_{ri}\nu_{js}\right| = \beta \neq 0, \qquad (r, s = 1, \ldots, t), \tag{3.4}$$

is given by multiplying $N_t^t(A, B)$ by $g_t/(q-1)$.

4. SOLUTIONS OF THE SIMPLE DETERMINANTAL EQUATION. Returning to (2.1), or equivalently to (2.7), we take $\beta \neq 0$. Then comparing (2.7) with (3.4), with A replaced by $(A')^{-1}$ in the latter, we get

THEOREM 1. *If $A = A(m, m)$ is nonsingular and $\beta \neq 0$, then the number $N(m, t; \beta)$ of pairs $U(t, m)$, $V(m, t)$ of matrices over $GF(q)$ which satisfy (2.1), is given by*

$$N(m, t; \beta) = \frac{q^{t(m-t)}\, g_t\, g(m, t, t)}{q-1}, \tag{4.1}$$

where $g(m, t, t)$ and g_t are given by (1.3) and (1.4) respectively.

To get $N(m, t; 0)$ we use the relationship

$$N(m, t; 0) + \sum_{\beta \neq 0} N(m, t; \beta) = q^{2mt}, \tag{4.2}$$

which is obtained by letting U and V in (2.1) range through all matrices of the appropriate sizes and counting the number of times which each β appears as the value of the determinant. Since, by (4.1), $N(m, t; \beta)$ has the same value for all $\beta \neq 0$, substituting this value into (4.2) and solving for $N(m, t; 0)$ proves

THEOREM 2. *If $A = A(m, m)$ is nonsingular and $\beta = 0$, then the number $N(m, t; 0)$, of pairs $U(t, m)$, $V(m, t)$ of matrices over $GF(q)$ which satisfy* (2.1), *is given by*

$$N(m, t; 0) = q^{2mt} - q^{t(m-t)} g_t g(m, t, t), \tag{4.3}$$

where $g(m, t, t)$ and g_t are given by (1.3) *and* (1.4), *respectively.*

5. SOME SPECIAL CASES. As a partial check on (4.1) and (4.3) we consider some special cases of (2.1). First, taking $t = 1$, we see that (4.1) becomes, for $\beta \neq 0$,

$$N(m, 1; \beta) = q^{m-1}(q^m - 1), \tag{5.1}$$

and (4.3) becomes

$$N(m, 1; 0) = q^{m-1}(q^m + q - 1). \tag{5.2}$$

But, for $t = 1$, with $\mu_{1j} = \mu_j$ and $\nu_{i1} = \nu_i$, equation (2.7) reduces to

$$\sum_{i,j=1}^{m} \beta_{ij} \mu_j \nu_i = -\delta^{-1} \beta, \tag{5.3}$$

where $|\beta_{ij}| \delta \neq 0$. After reducing (β_{ij}) to the identity matrix of order m by means of non-singular linear transformations of the μ's and ν's, it can easily be proved, by induction on m in the resulting bilinear equation which is equivalent to (5.3), that (5.1) and (5.2) actually give the number of solutions of (5.3) for $\beta \neq 0$ and $\beta = 0$, respectively. For q odd, also see [4; p. 47].

Secondly, taking $t = m$, (4.1) becomes, for $\beta \neq 0$,

$$N(m, m; \beta) = (g_m)^2/(q - 1), \tag{5.4}$$

and (4.3) reduces to

$$N(m, m; 0) = q^{2m^2} - (g_m)^2. \tag{5.5}$$

When $t = m$, equation (2.1) becomes

$$|U|\,|V| = (-1)^m \beta. \tag{5.6}$$

If $\beta \neq 0$, (5.6) implies that U and V are both nonsingular. For each of the g_m nonsingular U's, there are $g_m/(q-1)$ V's such that $|V| = (-1)^m \beta/|U|$, so that the number of solutions of (5.6) is given correctly by (5.4). If $\beta = 0$, then (5.6) implies that $|U| = |V| = 0$ or $|U| = 0$ and $|V| \neq 0$ or $|U| \neq 0$ and $|V| = 0$. The numbers of pairs U, V satisfying these three mutually exclusive conditions are $(q^{m^2} - g_m)^2$, $(q^{m^2} - g_m) g_m$, and $g_m (q^{m^2} - g_m)$ respectively, and the sum of these numbers is equal to $N(m, m; 0)$ as given by (5.5).

6. PROPER SOLUTIONS OF THE SIMPLE DETERMINANTAL EQUATION. When $\beta = 0$, a solution U, V of (2.1) is called *proper* if rank $U = \text{rank}\, V = t$. If U and V are of the appropriate sizes and either rank $U < t$ or rank $V < t$, then the pair U, V is clearly an improper (not proper) solution of (2.1). Since

the numbers of pairs U, V such that rank $U<t$ and rank $V<t$, rank $U=t$ and rank $V<t$, rank $U<t$ and rank $V=t$ are $\{q^{mt}-g(m,t,t)\}^2$, $g(m,t,t)\{q^{mt}-g(m,t,t)\}$, $\{q^{mt}-g(m,t,t)\}\,g(m,t,t)$, respectively, the sum of these three quantities is the number of improper solutions of (2.1). The total number $N(m,t;0)$ of solutions of (2.1) for $\beta=0$ is given by (4.3), so that subtracting the number of improper solutions from $N(m,t;0)$ gives

THEOREM 3. *If $A=A(m,m)$ is nonsingular and $\beta=0$, then the number $N'(m,t;0)$, of proper solutions $U(t,m)$, $V(m,t)$ of the determinantal equation (2.1), is given by*

$$N'(m,t;0)=g(m,t,t)\{g(m,t,t)-q^{t(m-t)}g_t\}, \tag{6.1}$$

where $g(m,t,t)$ and g_t are given by (1.3) and (1.4) respectively.

7. THE GENERALIZED DETERMINANTAL EQUATION. Let $\beta\in GF(q)$ and $m_1,\dots,m_k$ and $t_1,\dots,t_k$ be sets of $k\geqq 1$ positive integers with $1\leqq t_i\leqq m_i$ for $i=1,\dots,k$. Let $N(m_1,\dots,m_k;t_1,\dots,t_k;\beta)$ denote the number of solutions $U_1,\dots,U_k, V_1,\dots,V_k$ of the equation

$$\sum_{i=1}^{k}\begin{vmatrix} A_i & V_i \\ U_i & 0 \end{vmatrix}=\beta, \tag{7.1}$$

where A_i is a nonsingular matrix of order m_i and $U_i=U_i(t_i,m_i)$, $V_i=V_i(m_i,t_i)$ for $i=1,\dots,k$. For $k=1$, $N(m_1,t_1;\beta)$ is given by (4.1) and (4.3). For $k=2$, it is evident that

$$\left\{\begin{aligned} N(m_1,m_2;t_1,t_2;\beta) &= \sum_{\beta_1+\beta_2=\beta} N(m_1,t_1;\beta_1)\,N(m_2,t_2;\beta_2)\\ &= \sum_{\beta_1} N(m_1,t_1;\beta_1)\,N(m_2,t_2;\beta-\beta_1)\\ &= N(m_1,t_1;\beta)\,N(m_2,t_2;0)+\\ &\quad+\sum_{\beta_1\neq\beta} N(m_1,t_1;\beta_1)\,N(m_2,t_2;\beta-\beta_1). \end{aligned}\right. \tag{7.2}$$

Since $\sum_{\beta_1} N(m_1,t_1;\beta_1)=q^{2m_1t_1}$ and, in view of (4.1), $N(m_2,t_2;\beta-\beta_1)=N(m_2,t_2;1)$ for $\beta\neq\beta_1$, (7.2) becomes

$$\left\{\begin{aligned} N(m_1,m_2;t_1,t_2;\beta) &= N(m_1,t_1;\beta)\,N(m_2,t_2;0)+\\ &\quad+N(m_2,t_2;1)\{q^{2m_1t_1}-N(m_1,t_1;\beta)\}. \end{aligned}\right. \tag{7.3}$$

Take $\beta\neq 0$, so that $N(m_1,t_1;\beta)=N(m_1,t_1;1)$. Then, the coefficient of $N(m_1,t_1;1)$ on the right side of (7.3) is

$$N(m_2,t_2;0)-N(m_2,t_2;1)=q^{2m_1t_1}-qN(m_2,t_2;1),$$

which follows from (4.1) and (4.2). Substituting this into (7.3) and simplifying gives

THEOREM 4. *If $\beta\neq 0$, the number of solutions U_1, U_2, V_1, V_2 of (7.1) with $k=2$ is given by*

$$\left\{\begin{aligned} N(m_1,m_2;t_1,t_2;\beta) &= q^{2m_1t_1}N(m_1,t_1;1)+q^{2m_2t_2}N(m_2,t_2;1)-\\ &\quad-qN(m_1,t_1;1)\,N(m_2,t_2;1), \end{aligned}\right. \tag{7.4}$$

where $N(m,t;1)$ is given by (4.1).

Using Theorem 4, we can prove, by induction on k, the general

THEOREM 5. *If $\beta \neq 0$, the number $N_k = N(m_1, \ldots, m_k; t_1, \ldots, t_k; \beta)$ of solutions $U_1, \ldots, U_k$, $V_1, \ldots, V_k$ of (7.1) for $k \geqq 1$ is given by*

$$N_k = q^{2s_k} \sum_{i=1}^{k} (-q)^{i-1} \sum_{j_1, \ldots, j_i} q^{-2(m_{j_1} t_{j_1} + \cdots + m_{j_i} t_{j_i})} N(m_{j_1}, t_{j_1}; 1) \ldots N(m_{j_i}, t_{j_i}; 1), \tag{7.5}$$

where $s_k = \sum_{i=1}^{k} m_i t_i$, the inner sum is over all combinations of the k integers $1, 2, \ldots, k$ taken i at a time $(1 \leqq i \leqq k)$, and $N(m, t; 1)$ is given by (4.1).

We will not take the space to give the proof of this theorem here.

By analogy with the statement and proof of Theorem 2 we have

THEOREM 6. *If $\beta = 0$, the number $N(m_1, \ldots, m_k; t_1, \ldots, t_k; 0)$ of solutions $U_1, \ldots, U_k$, $V_1, \ldots, V_k$ of (7.1) for $k \geqq 1$ is given by*

$$N(m_1, \ldots, m_k; t_1, \ldots, t_k; 0) = q^{2s_k} - (q-1) N_k, \tag{7.6}$$

where $s_k = \sum_{i=1}^{k} m_i t_i$ and N_k is given by (7.5).

8. GENERALIZED GAUSS SUMS. Throughout this section we will assume that $q = p^n$ is odd. For $\alpha \in GF(q)$, put

$$e(\alpha) = e^{2\pi i t(\alpha)/p}, \quad t(\alpha) = \alpha + \alpha^p + \cdots + \alpha^{p^{n-1}}. \tag{8.1}$$

Then it is easy to prove that

$$\sum_{\beta \in GF(q)} e(\alpha\beta) = \begin{cases} q & (\alpha = 0), \\ 0 & (\alpha \neq 0). \end{cases} \tag{8.2}$$

We recall the definition [*1*, §3] of the Gauss sum

$$G(\alpha) = \sum_{\beta} e(\alpha \beta^2), \tag{8.3}$$

for $\alpha \in GF(q)$, and the properties

$$\begin{aligned} G(\alpha) = \sum_{\beta} \psi(\beta)\, e(\alpha\beta) &= \psi(\alpha)\, G(1) \qquad (\alpha \neq 0); \\ G^2(1) &= \psi(-1)\, q, \end{aligned} \tag{8.4}$$

where $\psi(\alpha) = 0, 1, -1$ according to whether α is zero, a nonzero square, or a non-square of $GF(q)$. If $\alpha \in GF(q)$ and $m_1, \ldots, m_k$ and $t_1, \ldots, t_k$ are sets of positive integers with $1 \leqq t_i \leqq m_i$ for $i = 1, \ldots, k$, define

$$\begin{aligned} G_k(\alpha) &= G(m_1, \ldots, m_k; t_1, \ldots, t_k; \alpha) \\ &= \sum_{\beta} N(m_1, \ldots, m_k; t_1, \ldots, t_k; \beta)\, e(\alpha \beta^2). \end{aligned} \tag{8.5}$$

For $\alpha = 0$, it is obvious that $G_k(0) = q^{2s_k}$, where $s_k = \sum_{i=1}^{k} m_i t_i$. For $\alpha \neq 0$,

$$\begin{aligned} G_k(\alpha) = N(m_1, \ldots, m_k; t_1, \ldots, t_k; 0) &+ \\ + N(m_1, \ldots, m_k; t_1, \ldots, t_k; 1) \sum_{\beta \neq 0} e(\alpha \beta^2). \end{aligned} \tag{8.6}$$

If we substitute for $N(m_1, \ldots, m_k; t_1, \ldots, t_k; 0)$ in (8.6) its value in terms of $N_k = N(m_1, \ldots, m_k; t_1, \ldots, t_k; 1)$ as given by (7.6) and observe that, in view of (8.3), the summation on the right of (8.6) is equal to $G(\alpha) - 1 = \psi(\alpha) G(1) - 1$, we may state

THEOREM 7. *If $\alpha \in GF(q)$, q odd, and $G_k(\alpha)$ is the generalized Gauss sum defined by* (8.5), *then*

$$G_k(\alpha) = q^{2s_k} + \psi^2(\alpha)\{\psi(\alpha) G(1) - q\} N_k, \tag{8.7}$$

where $s_k = \sum_{i=1}^{k} m_i t_i$ and N_k is given by (7.5).

In similar fashion, if we define

$$\left\{ \begin{aligned} H_k(\alpha) &= H(m_1, \ldots, m_k; t_1, \ldots, t_k; \alpha) \\ &= \sum_{\beta} N(m_1, \ldots, m_k; t_1, \ldots, t_k; \beta)\, e(\alpha\beta), \end{aligned} \right. \tag{8.8}$$

where the m_i and t_i are as defined previously, then proceeding as in the proof of Theorem 7, using (8.2) instead of (8.3), we can prove

THEOREM 8. *If $\alpha \in GF(q)$, q odd, and $H_k(\alpha)$ is the generalized Gauss sum defined by* (8.8), *then*

$$H_k(\alpha) = q^{2s_k} - \psi^2(\alpha)\, q N_k, \tag{8.9}$$

where $s_k = \sum_{i=1}^{k} m_i t_i$ and N_k is given by (7.5).

Finally, defining

$$\left\{ \begin{aligned} H'_k(\alpha) &= H'(m_1, \ldots, m_k; t_1, \ldots, t_k; \alpha) \\ &= \sum_{\beta} \psi(\beta)\, N(m_1, \ldots, m_k; t_1, \ldots, t_k; \beta)\, e(\alpha\beta), \end{aligned} \right. \tag{8.10}$$

with the m_i and t_i as before, it is easy to prove

THEOREM 9. *If $\alpha \in GF(q)$, q odd, and $H'_k(\alpha)$ is the generalized Gauss sum defined by* (8.10) *,then*

$$H'_k(\alpha) = \psi(\alpha) N_k G(1) = G_k(\alpha) - H_k(\alpha), \tag{8.11}$$

where N_k is given by (7.5).

References

[1] CARLITZ, L.: The singular series for sums of squares of polynomials. Duke Math. J. **14**, 1105–1120 (1947). — [2] CARLITZ, L.: A problem involving quadratic forms in a finite field. Mathematische Nachrichten **11**, 135–142 (1954). — [3] CARLITZ, L.: Representations by skew forms in a finite field. Archiv der Math. **5**, 19–31 (1954). — [4] DICKSON, L. E.: Linear groups. Leipzig 1901. — [5] HODGES, JOHN H.: Representations by bilinear forms in a finite field. Duke Math. J. **22**, 497–510 (1955). — [6] LANDSBERG, GEORG: Über eine Anzahlbestimmung und eine damit zusammenhängende Reihe. J. reine angew. Math. **111**, 87–88 (1893).

Cornell Aeronautical Laboratory, Inc. of Cornell University, Buffalo 21, N.Y. (U.S.A.)

(Eingegangen am 10. März 1959)

BAGEMIHL, F.
Math. Zeitschr. 72, 362–366 (1960)

Planar sections of spatial sets

By
FREDERICK BAGEMIHL

We denote by $\mathscr{E}$ the linear continuum, and by $\mathscr{S}$ the set of points of three-dimensional Euclidean space provided with a rectangular Cartesian coordinate system whose axes are the x-, y-, and z-axes. The planes that are perpendicular to the x- (y-, z-)axis will be called x-(y-, z-)planes. If the union of a set of x-(y-, z-)planes intersects the x-(y-, z-)axis in a linear set with a certain property, we say, for brevity, that the set of planes possesses this property; for example, a set of measure zero of z-planes is a set of z-planes whose union intersects the z-axis in a linear set of measure zero.

A theorem proved by SIERPIŃSKI [4, p. 12, Theorem 9] may be stated as follows:

If $\mathscr{S}=E_1\cup E_2\cup E_3$, where every x-plane intersects E_1 in a finite number of points and every y-plane intersects E_2 in a finite number of points, then there exists a z-plane that intersects E_3 in $2^{\aleph_0}$ points.

We shall first obtain two generalizations of this result.

If A is a subset of a plane P, we say that A is a planar set that is everywhere of power $2^{\aleph_0}$ (everywhere of second category, everywhere of positive exterior measure) if, for every open rectangle R in the plane P, the set $A\cap R$ is of power $2^{\aleph_0}$ (second category, positive exterior measure).

THEOREM 1. *If $\mathscr{S}=E_1\cup E_2\cup E_3$, where every x-plane intersects E_1 in a finite number of points and every y-plane intersects E_2 in less than $2^{\aleph_0}$ points, then every z-plane, with at most $\aleph_0$ exceptions, intersects E_3 in a planar set that is everywhere of power $2^{\aleph_0}$, everywhere of second category, and everywhere of positive exterior measure.*

PROOF. Let r_1, r_2, s_1, s_2 be rational numbers with $r_1<r_2$ and $s_1<s_2$. For every $z\in\mathscr{E}$, let

$$S_z=\{(x, y, z):\ r_1<x<r_2,\ s_1<y<s_2,\ x\in\mathscr{E},\ y\in\mathscr{E}\}\cap E_3.$$

Suppose that there exists an enumerable set Z of real numbers such that, for every $z\in Z$, $|S_z|<2^{\aleph_0}$. Then $\left|\bigcup_{z\in Z} S_z\right|<2^{\aleph_0}$, and hence there exists a real number y_0 between s_1 and s_2, and a set X of $2^{\aleph_0}$ real numbers between r_1 and r_2, such that, for every $x_0\in X$, none of the $\aleph_0$ points (x_0, y_0, z) with $z\in Z$ belongs to E_3. Moreover, these $\aleph_0$ points all lie in the plane $x=x_0$ which, by hypothesis, contains only a finite number of points of E_1, and therefore $\aleph_0$ of these points belong to E_2. But then the plane $y=y_0$ contains $2^{\aleph_0}\cdot\aleph_0=2^{\aleph_0}$ points of E_2, contrary to hypothesis.

Suppose that there exists an enumerable set Z of real numbers such that, for every $z\in Z$, S_z is a planar set of first category. Then the (orthogonal)

projection of $\bigcup_{z\in Z} S_z$ on the xy-plane is also a planar set of first category, and hence, according to a theorem of KURATOWSKI and ULAM [3], there exists a real number y_0 between s_1 and s_2, and a residual subset X of the interval (r_1, r_2) such that, for every $x_0\in X$, none of the $\aleph_0$ points (x_0, y_0, z) with $z\in Z$ belongs to E_3. Since $|X|=2^{\aleph_0}$, this leads, as before, to a contradiction of the hypothesis concerning E_2.

Suppose, finally, that there exists an enumerable set Z of real numbers such that, for every $z\in Z$, S_z is a planar set of measure zero. Appealing this time to a theorem of FUBINI [2], we again arrive at a contradiction of the hypothesis concerning E_2.

Hence, there exists a finite set Z_{r_1, r_2, s_1, s_2} of real numbers such that, for every $z\in\mathscr{E}-Z_{r_1, r_2, s_1, s_2}$ the projection of S_z on the xy-plane intersects the rectangle

$$\{(x, y, 0):\ r_1<x<r_2,\ s_1<y<s_2,\ x\in\mathscr{E},\ y\in\mathscr{E}\}$$

in a planar set of power $2^{\aleph_0}$, second category, and positive exterior measure. Let $Z^*=\bigcup Z_{r_1, r_2, s_1, s_2}$ where r_1, r_2, s_1, s_2 range over the set of rational numbers so that $r_1<r_2$ and $s_1<s_2$. Then $|Z^*|\leqq\aleph_0$, and for every $z_0\in\mathscr{E}-Z^*$, the z-plane $z=z_0$ intersects E_3 in a planar set that is everywhere of power $2^{\aleph_0}$, everywhere of second category, and everywhere of positive exterior measure.

THEOREM 2. *If $\mathscr{S}=E_1\cup E_2\cup E_3$, where every x-plane intersects E_1 in a planar nowhere dense set of points and every y-plane intersects E_2 in less than $2^{\aleph_0}$ points, then every z-plane, with at most a set of first category of exceptions, intersects E_3 in a planar set that is everywhere of power $2^{\aleph_0}$, everywhere of second category, and everywhere of positive exterior measure.*

PROOF. Let r_1, r_2, s_1, s_2 be rational numbers with $r_1<r_2$ and $s_1<s_2$, and put

$$I=\{x:\ r_1<x<r_2,\ x\in\mathscr{E}\},\qquad J=\{y:\ s_1<y<s_2,\ y\in\mathscr{E}\}.$$

For every $z\in\mathscr{E}$, define S_z as in the proof of Theorem 1.

Suppose that there exists an enumerable everywhere dense subset Z of some interval of $\mathscr{E}$ such that, for every $z\in Z$, $|S_z|<2^{\aleph_0}$. If S is the projection of $\bigcup_{z\in Z} S_z$ on the xy-plane, then, as $|Z|=\aleph_0$, we have $|S|<2^{\aleph_0}$. Hence, if Y is an enumerable everywhere dense subset of J, then, for every $y_0\in Y$, the set

$$T_{y_0}=\{(x, y_0, 0):\ r_1<x<r_2,\ x\in\mathscr{E}\}\cap S$$

is of power less than $2^{\aleph_0}$; and if T is the set of abscissas of the points constituting the projection of $\bigcup_{y_0\in Y} T_{y_0}$ on the x-axis, then $|T|<2^{\aleph_0}$. Let $X=I-T$, and observe that $|X|=2^{\aleph_0}$. Then, if $x\in X$, $y\in Y$, and $z\in Z$, the point $(x, y, z)\notin E_3$. If $y_0\in Y$, the hypothesis concerning E_2 implies that if X_{y_0} is the set of those elements $x_0\in X$ such that, for at least one $z\in Z$, the point (x_0, y_0, z) belongs to E_2, then $|X_{y_0}|<2^{\aleph_0}$. Set $X^*=\bigcup_{y_0\in Y} X_{y_0}$. Then, since $|Y|=\aleph_0$, we have $|X^*|<2^{\aleph_0}$, so that $X-X^*$ is not empty. Let $x_0\in X-X^*$. Then the set

$$\{(x_0, y, z):\ y\in Y,\ z\in Z\}$$

is a subset of E_1 as well as of the plane $x=x_0$, but is not nowhere dense in this plane, contradicting the hypothesis concerning E_1.

Suppose that there exists an enumerable everywhere dense subset Z of some interval of $\mathscr{E}$ such that, for every $z\in Z$, S_z is a planar set of first category. If S is the projection of $\bigcup_{z\in Z} S_z$ on the xy-plane, then, as $|Z|=\aleph_0$, S is a planar set of first category. It follows from a theorem of KURATOWSKI and ULAM [3] that there exists an enumerable everywhere dense subset Y of J such that, for every $y_0\in Y$, the set

$$T_{y_0}=\{(x, y_0, 0): r_1<x<r_2,\ x\in\mathscr{E}\}\cap S$$

is a linear set of first category; and if T is the projection of $\bigcup_{y_0\in Y} T_{y_0}$ on the x-axis, then, as $|Y|=\aleph_0$, T is a linear subset of I of first category. Let $X=I-T$, and observe that $|X|=2^{\aleph_0}$. As before, we ultimately arrive at a contradiction of the hypothesis concerning E_1.

Suppose, finally, that there exists an enumerable everywhere dense subset Z of some interval of $\mathscr{E}$ such that, for every $z\in Z$, S_z is a planar set of measure zero. Appealing this time to a theorem of FUBINI [2], we again arrive at a contradiction of the hypothesis concerning E_1.

Hence, there exists a nowhere dense set Z_{r_1,r_2,s_1,s_2} of real numbers such that, for every $z\in\mathscr{E}-Z_{r_1,r_2,s_1,s_2}$, the projection of S_z on the xy-plane intersects the rectangle

$$\{(x, y, 0): r_1<x<r_2,\ s_1<y<s_2,\ x\in\mathscr{E},\ y\in\mathscr{E}\}$$

in a planar set of power $2^{\aleph_0}$, second category, and positive exterior measure. Set $Z^*=\bigcup Z_{r_1,r_2,s_1,s_2}$, where r_1, r_2, s_1, s_2 range over the set of rational numbers so that $r_1<r_2$ and $s_1<s_2$. Then Z^* is a subset of $\mathscr{E}$ of first category, and for every $z_0\in\mathscr{E}-Z^*$, the z-plane $z=z_0$ intersects E_3 in a planar set that is everywhere of power $2^{\aleph_0}$, everywhere of second category, and everywhere of positive exterior measure.

Consider the following propositions:

($\mathfrak{U}_K^*$) *$\mathscr{S}=E_1\cup E_2\cup E_3$, where every x-plane intersects E_1 in at most $\aleph_0$ points, every y-plane intersects E_2 in at most $\aleph_0$ points, and every member of some non-enumerable set of z-planes intersects E_3 in a planar set of first category.*

($\mathfrak{U}_M^*$) *$\mathscr{S}=E_1\cup E_2\cup E_3$, where every x-plane intersects E_1 in at most $\aleph_0$ points, every y-plane intersects E_2 in at most $\aleph_0$ points, and every member of some non-enumerable set of z-planes intersects E_3 in a planar set of measure zero.*

($\mathfrak{N}^*$) *$\mathscr{E}$ is not the union of less than $2^{\aleph_0}$ linear sets of first category.*

($\mathfrak{M}^*$) *$\mathscr{E}$ is not the union of less than $2^{\aleph_0}$ linear sets of measure zero.*

We shall show that they are related to the continuum hypothesis

(H) $2^{\aleph_0}=\aleph_1$.

THEOREM 3. *The conjunction of ($\mathfrak{N}^*$) and ($\mathfrak{U}_K^*$) is equivalent to (H).*

PROOF. (a) Clearly (*H*) implies ($\mathfrak{N}^*$). According to SIERPIŃSKI [4, p. 11, Theorem 8], (*H*) implies that $\mathscr{S}=E_1\cup E_2\cup E_3$, where every x- (y-, z-) plane intersects E_1 (E_2, E_3) in at most $\aleph_0$ points, and this evidently implies ($\mathfrak{U}_K^*$).

(b) Assume that $(\mathfrak{N}^*)$ and $(\mathfrak{U}_K^*)$ are true, but that (H) is false. Then, because of the hypothesis concerning E_3, there exists a cardinal number $\mathfrak{p}$ with $\aleph_0 < \mathfrak{p} < 2^{\aleph_0}$, and a set P of $\mathfrak{p}$ real numbers, such that, for every $c \in P$, the set

$$M_c = \{(x, y, c):\ x \in \mathscr{E},\ y \in \mathscr{E}\} \cap E_3$$

is a planar set of first category. Hence, by a theorem of KURATOWSKI and ULAM [3], there exists a subset F_c of $\mathscr{E}$ of first category such that, for every $b \in \mathscr{E} - F_c$, the set

$$\{(x, b, c):\ x \in \mathscr{E}\} \cap E_3$$

is a linear set of first category. Let $F = \bigcup_{c \in P} F_c$. Then $(\mathfrak{N}^*)$ implies that the set $\mathscr{E} - F$ is not empty. If $b_0 \in \mathscr{E} - F$, then, for every $c \in P$, the set

$$H_c = \{(x, b_0, c):\ x \in \mathscr{E}\} \cap E_3$$

is a linear set of first category, and $(\mathfrak{N}^*)$ implies that the projection of the set $H = \bigcup_{c \in P} H_c$ on the x-axis does not exhaust the axis. Thus, there exists a number $a_0 \in \mathscr{E}$ such that, for every $c \in P$, the point (a_0, b_0, c) does not belong to E_3 and consequently does belong to $E_1 \cup E_2$. But there are $\mathfrak{p}$ such points, all of which lie on a straight line parallel to the z-axis. Therefore either $\mathfrak{p}$ of these points are in E_1, in which case the x-plane $x = a_0$ contains $\mathfrak{p}$ points of E_1; or $\mathfrak{p}$ of these points are in E_2, in which case the y-plane $y = b_0$ contains $\mathfrak{p}$ points of E_2. But this contradicts $(\mathfrak{U}_K^*)$, and so (H) must be true.

THEOREM 4. *The conjunction of* $(\mathfrak{M}^*)$ *and* $(\mathfrak{U}_M^*)$ *is equivalent to* (H).

PROOF. In the proof of Theorem 3, replace "$(\mathfrak{N}^*)$" by "$(\mathfrak{M}^*)$", "$(\mathfrak{U}_K^*)$" by "$(\mathfrak{U}_M^*)$", "first category" by "measure zero", and "KURATOWSKI and ULAM [3]" by "FUBINI [2]".

The following propositions, the second pair of which were introduced in [1], are also related to (H):

$(\mathfrak{U}_K)$ *$\mathscr{S} = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, where every member of some set of second category of x-planes intersects E_1 in at most $\aleph_0$ points, every member of some set of second category of y-planes intersects E_2 in less than $2^{\aleph_0}$ points, and every member of some nonenumerable set of z-planes intersects E_3 in a planar set of first category.*

$(\mathfrak{U}_M)$ *$\mathscr{S} = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, where every member of some set of positive exterior measure of x-planes intersects E_1 in at most $\aleph_0$ points, every member of some set of positive exterior measure of y-planes intersects E_2 in less than $2^{\aleph_0}$ points, and every member of some nonenumerable set of z-planes intersects E_3 in a planar set of measure zero.*

$(\mathfrak{N})$ *The union of less than $2^{\aleph_0}$ linear sets of first category is of first category.*

$(\mathfrak{M})$ *The union of less than $2^{\aleph_0}$ linear sets of measure zero is of measure zero.*

THEOREM 5. *The conjunction of* $(\mathfrak{N})$ *and* $(\mathfrak{U}_K)$ *is equivalent to* (H).

PROOF. (a) To show that (H) implies $(\mathfrak{N})$ and $(\mathfrak{U}_K)$, replace "$(\mathfrak{N}^*)$" by "$(\mathfrak{N})$" and "$(\mathfrak{U}_K^*)$" by "$(\mathfrak{U}_K)$" in part (a) of the proof of Theorem 3.

(b) Assume that $(\mathfrak{N})$ and $(\mathfrak{U}_K)$ are true, but that (H) is false. Then, because of the hypothesis concerning E_3, there exists a cardinal number $\mathfrak{p}$ with $\aleph_0 < \mathfrak{p} < 2^{\aleph_0}$,

and a set P of $\mathfrak{p}$ real numbers, such that, for every $c \in P$, the set

$$M_c = \{(x, y, c): x \in \mathscr{E}, y \in \mathscr{E}\} \cap E_3$$

is a planar set of first category. Hence, according to a theorem of KURATOWSKI and ULAM [3], there exists a subset F_c of $\mathscr{E}$ of first category such that, for every $b \in \mathscr{E} - F_c$, the set

$$\{(x, b, c): x \in \mathscr{E}\} \cap E_3$$

is a linear set of first category. Let $F = \bigcup_{c \in P} F_c$. Then $(\mathfrak{R})$ implies that F is a subset of $\mathscr{E}$ of first category. Because of the hypothesis concerning E_2, if we put $Y = \mathscr{E} - F$, there exists a number $b_0 \in Y$ such that the y-plane $y = b_0$ intersects E_2 in less than $2^{\aleph_0}$ points, and, for every $c \in P$, the set

$$H_c = \{(x, b_0, c): x \in \mathscr{E}\} \cap E_3$$

is a linear set of first category. Now $(\mathfrak{R})$ implies that the projection of the set $H = \bigcup_{c \in P} H_c$ on the x-axis is a linear set of first category. Thus, there exists a subset X of $\mathscr{E}$ such that $\mathscr{E} - X$ is a linear set of first category and, for every $a_0 \in X$ and every $c \in P$, the point (a_0, b_0, c) does not belong to E_3 and consequently does belong to $E_1 \cup E_2$. Because of the hypothesis concerning E_1, it follows from $(\mathfrak{R})$ that there exists a subset X^* of X with $|X^*| = 2^{\aleph_0}$ such that, for every $a_0 \in X^*$, $\mathfrak{p}$ of the points (a_0, b_0, c) with $c \in P$ belong to E_2. This implies that the y-plane $y = b_0$ contains $2^{\aleph_0} \cdot \mathfrak{p} = 2^{\aleph_0}$ points of E_2, contrary to the choice of b_0. Hence, (H) must be true if $(\mathfrak{R})$ and $(\mathfrak{U}_K)$ are true.

THEOREM 6. *The conjunction of* $(\mathfrak{M})$ *and* $(\mathfrak{U}_M)$ *is equivalent to* (H).

PROOF. (a) To show that (H) implies $(\mathfrak{M})$ and $(\mathfrak{U}_M)$, replace "$(\mathfrak{R}^*)$" by "$(\mathfrak{M})$" and "$(\mathfrak{U}_K^*)$" by "$(\mathfrak{U}_M)$" in part (a) of the proof of Theorem 3.

(b) To prove that the conjunction of $(\mathfrak{M})$ and $(\mathfrak{U}_M)$ implies (H), replace "$(\mathfrak{R})$" by "$(\mathfrak{M})$", "$(\mathfrak{U}_K)$" by "$(\mathfrak{U}_M)$", "first category" by "measure zero", and "KURATOWSKI and ULAM [3]" by "FUBINI [2]" in part (b) of the proof of Theorem 5.

[1] BAGEMIHL, F.: Some results connected with the continuum hypothesis. Z. Math. Logik Grundlagen Math. **5**, 97–116 (1959). – [2] FUBINI, G.: Sugli integrali multipli. Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. (5) $\mathbf{16}_1$, 608–614 (1907). – [3] KURATOWSKI, C., and S. ULAM: Quelques propriétés topologiques du produit combinatoire. Fund. Math. **19**, 247–251 (1932). – [4] SIERPIŃSKI, W.: Sur quelques propositions concernant la puissance du continu. Fund. Math. **38**, 1–13 (1951).

University of Notre Dame, Notre Dame, Ind., U.S.A.

(Eingegangen am 27. April 1959)

KASCH, F., u. B. VOLKMANN
Math. Zeitschr. 72, 367–378 (1960)

Metrische Sätze über transzendente Zahlen in P-adischen Körpern

Von
FRIEDRICH KASCH und BODO VOLKMANN

1. Fragestellung. Die auf MAHLER zurückgehende Klasseneinteilung der transzendenten Zahlen[1]) ist von ihm [6] auch auf Zahlen in den P-adischen Körpern K_P übertragen worden. 1936 führte dann TURKSTRA [8] eine Maßtheorie in den Körpern K_P ein, die auch die Übertragung einiger damals im Reellen bzw. Komplexen bekannter metrischer Aussagen auf das P-adische gestattete. Insbesondere ergab sich als Analogon zu einem Satz von MAHLER die Aussage, daß im Sinne des Turkstraschen Maßes fast alle P-adischen Zahlen S-Zahlen sind. Dabei bewies TURKSTRA als Gegenstück zu dem Ergebnis von MAHLER, wonach fast alle reellen Zahlen ξ S-Zahlen von einem Typ[2])

$$\vartheta(\xi) \leqq 4 \tag{1}$$

sind, daß für fast alle P-adischen Zahlen die Ungleichung

$$\vartheta(\xi) \leqq 7 \tag{2}$$

erfüllt ist.

Seither ist die Abschätzung (1) mehrfach verbessert worden, und das kürzlich von uns erzielte, bisher beste Ergebnis [3] besagt insbesondere, daß fast alle reellen ξ den Ungleichungen

$$1 \leqq \vartheta_n(\xi) \leqq 2 - \frac{2}{n} \qquad (n = 3, 4, \ldots) \tag{3}$$

genügen. Dagegen liegen im P-adischen Fall, soweit den Verfassern bekannt, bisher noch keine Resultate vor, die über (2) hinausgehen.

In der vorliegenden Arbeit wird für eine beliebige Primzahl P folgende Verschärfung von (2) bewiesen, die ungefähr die Güte von (3) erreicht:

Satz 1. *Für fast alle Zahlen $\xi \in K_P$ gilt*[3])

$$\vartheta_1(\xi) = 2, \tag{4}$$

$$1 + \frac{1}{n} \leqq \vartheta_n(\xi) \leqq 2 - \frac{1}{2n} \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{5}$$

[1]) Siehe z. B. SCHNEIDER [7].
[2]) Siehe [3], S. 442.
[3]) Die genauen Definitionen der hier benutzten Begriffe sind im nächsten Abschnitt enthalten.

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion nach n mit dem Induktionsbeginn $n=1$. Sonst folgen wir methodisch im Wesentlichen unserem Beweis von (3), dessen Grundgedanke darin besteht, Eigenschaften der Diskriminante der approximierenden Polynome für die Abschätzung des Maßes auszunutzen.

Im Fall $n=2$ hat für reelle Zahlen KUBILYUS [4] das bestmögliche Ergebnis, nämlich

$$\vartheta_2(\xi) = 1 \quad \text{für fast alle } \xi,$$

erzielt. Sein Beweis wurde von einem der Verfasser [2] durch einen einfacheren ersetzt, wobei sich zugleich das bestmögliche Ergebnis für die komplexen Zahlen mit ergab. Durch Übertragung dieser Methode erhalten wir auch im P-adischen Fall die bestmögliche Aussage:

Satz 2. *Für fast alle Zahlen $\xi \in K_P$ gilt*

$$\vartheta_2(\xi) = \tfrac{3}{2}. \tag{6}$$

2. Voraussetzungen. Es sei P eine (für das Folgende feste) Primzahl und K_P der zugehörige Henselsche Körper. Die Bewertung $|\ |_P$ von K_P läßt sich dann eindeutig auf die algebraisch abgeschlossene Hülle $\hat{K}_P$ von K_P fortsetzen und soll auch in diesem Sinne mit $|\ |_P$ bezeichnet werden. Alle im folgenden auftretenden algebraischen Zahlen sind als Elemente von $\hat{K}_P$ zu betrachten.

Wenn n und H natürliche Zahlen sind, sei $\mathfrak{Q}(n, H)$ die Menge der Polynome $q(x)$ mit ganzrationalen Koeffizienten a_i von einem Grad $\leqq n$ und einer Höhe $(= \max |a_i|) \leqq H$. Dann setzen wir für[4]) jedes $\xi \in K_P$

$$w_n(H, \xi) = \min_{\substack{q \in \mathfrak{Q}(n, H) \\ q(\xi) \neq 0}} |q(\xi)|_P,$$

ferner

$$w_n(\xi) = \overline{\lim_{H \to \infty}} \frac{\log \frac{1}{w_n(H, \xi)}}{\log H} \quad \text{sowie} \quad \vartheta_n(\xi) = \frac{w_n(\xi)}{n},$$

schließlich

$$\vartheta(\xi) = \sup_{n=1,2,\ldots} \vartheta_n(\xi) \quad \text{und} \quad w(\xi) = \overline{\lim_{n \to \infty}} \vartheta_n(\xi).$$

Eine Zahl $\xi \in K_P$ heißt *(P-adische) S-Zahl*, wenn $0 < \vartheta(\xi) < \infty$ ist.

Das Turkstrasche Maß wird in Anlehnung an die von FELLER und TORNIER [1] für den Baireschen Nullraum entwickelte Maßtheorie folgendermaßen eingeführt[5]): Man definiert als *P-adisches Intervall n-ter Stufe* (bei ganzrationalem n) die Menge aller Zahlen $\xi \in K_P$, in deren P-adischer Entwicklung

$$\xi = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_\nu P^\nu \qquad \left(0 \leqq a_\nu < P;\ a_\nu \text{ ganzrational};\ a_\nu = 0 \quad \text{für} \quad \nu < \nu_0(\xi)\right)$$

alle Koeffizienten a_ν mit $\nu < n$ denen einer vorgegebenen Zahl gleich sind. Es zeigt sich, daß jedes P-adische Intervall sowohl offen als auch abgeschlossen ist, und ferner läßt sich beweisen, daß jede offene Menge $O \subseteqq K_P$ als Ver-

[4]) Vgl. [7] sowie [3].
[5]) Siehe [8], Kap. V.

einigung von P-adischen Intervallen darstellbar ist. Als *beschränkt* wird eine Menge $M \subseteqq K_P$ bezeichnet, wenn es eine ganzrationale Zahl t so gibt, daß $M \subseteqq K_P^t$ (= Menge der $\xi \in K_P$ mit $|\xi|_P \leqq P^t$) gilt.

Der Aufbau der Maßtheorie wird dann in mehreren Schritten vollzogen:

1. Für jedes P-adische Intervall E von n-ter Stufe setzt man

$$T(E) = \sup_{\alpha, \beta \in E} |\alpha - \beta|_P = P^{-n}.$$

2. Für jede beschränkte, offen-abgeschlossene Menge $A \subseteqq K_P$ wird, wenn $A = \bigcup_i E^i$ eine Zerlegung in paarweise fremde P-adische Intervalle ist,

$$T(A) = \sum_i T(E^i)$$

gesetzt und gezeigt, daß die linke Seite nicht von der speziellen Wahl der Zerlegung abhängt.

3. Für jede beschränkte, offene Menge $O \subseteqq K_P$ wird eine Zerlegung $O = \bigcup_i E^i$ in *maximale P-adische Intervalle* (d. h. solche, die in keinem ganz zu O gehörenden P-adischen Intervall echt enthalten sind) eingeführt, die Eindeutigkeit dieser Zerlegung bewiesen und

$$T(O) = \sum_i T(E^i)$$

gesetzt. Daraus erhält man Analoga zu den bekannten Sätzen der Inhaltstheorie für lineare, offene Mengen.

4. Für jede beliebige, beschränkte Menge $M \subseteqq K_P$ wird das äußere Turkstrasche Maß

$$\overline{T}(M) = \inf T(O)$$

eingeführt, wobei O alle offenen, beschränkten Mengen mit $M \subseteqq O$ durchläuft. Es folgt insbesondere, daß für beschränkte, offene Mengen O stets $\overline{T}(O) = T(O)$ ist. Sodann lassen sich in bekannter Weise das zugehörige innere Maß und der Begriff der Meßbarkeit definieren.

5. Für jede beliebige Menge $M \subseteqq K_P$ wird $M \cap K_P^t = M^t$ und

$$\overline{T}(M) = \lim_{t \to +\infty} \overline{T}(M^t)$$

gesetzt. Damit wird auch für nichtbeschränkte Mengen M der Begriff der Meßbarkeit und des Maßes $T(M)$ erklärt, sofern dieses existiert. Man kann dann u. a. nachweisen, daß das Turkstrasche Maß $T(M)$ monoton und σ-additiv ist.

3. Hilfssätze. Zu den Beweisen benötigen wir die folgenden Hilfssätze[6]:

Hilfssatz 1. *Es seien*

$$L_i(x_0, \ldots, x_n) = L_i(\underline{x}) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_{ij} x_j \qquad (i = 0, \ldots, n)$$

[6]) Dabei sind $C_1, C_2, \ldots$ positive, reelle Zahlen, die von n und P, nicht aber von H abhängen dürfen. Alle im folgenden auftretenden Polynome haben ganzrationale Koeffizienten.

$n+1$ Linearformen mit reellen Koeffizienten und einer nichtverschwindenden Determinante d; ferner sei

$$L(\mathfrak{x}) = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j x_j$$

eine Linearform mit P-adisch ganzen Koeffizienten. Sind dann $\beta, \beta_0, \ldots, \beta_n$ positive reelle Zahlen mit $0<\beta<1$ und $\beta\beta_0 \ldots \beta_n \geqq |d|\,P$, so gibt es einen Gitterpunkt $\mathfrak{x}$ mit $|L(\mathfrak{x})|_P<\beta$ und

$$|L_i(\mathfrak{x})| \leqq \beta_i \qquad (i=0, \ldots, n).$$

Beweis. Folgt aus [5], Satz 1.

Hilfssatz 2. *Zu jeder Linearform $L(\mathfrak{x})=\gamma_0 x_0+\cdots+\gamma_n x_n$ mit P-adisch ganzen Koeffizienten gibt es für jedes hinreichend große $t>1$ wenigstens einen Gitterpunkt $\mathfrak{x} \neq (0, \ldots, 0)$ mit $\max(|x_0|, \ldots, |x_n|)=H$, derart, daß $H \leqq t^{1/n}$ und $|L(\mathfrak{x})|_P< \frac{P}{t^{1+1/n}}$ ist.*

Beweis[7]. In dem Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} |\gamma_0 x_0+\gamma_1 x_1+\cdots+\gamma_n x_n|_P &< \frac{P}{t^{1+1/n}} \\ |x_0| &\leqq t^{1/n} \\ |x_1| &\leqq t^{1/n} \\ &\vdots \\ |x_n| &\leqq t^{1/n} \end{aligned}$$

ist die Determinante der letzten $n+1$ Ungleichungen offenbar gleich 1. Daher sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 mit $\beta=\frac{P}{t^{1+1/n}}$ und $\beta_0=\beta_1=\cdots=t^{-1/n}$ erfüllt, und somit folgt die Behauptung.

Hilfssatz 3. *Für jede transzendente, insbesondere also für jede S-Zahl $\xi \in K_P$ ist*

$$\vartheta_n(\xi) \geqq 1+\frac{1}{n} \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Beweis[8]. Für jede P-adisch ganze Zahl ξ und jedes hinreichend große t ergibt sich durch Anwendung von Hilfssatz 2 mit $\gamma_i=\xi^i$ und $x_i=a_i$ $(i=0, \ldots, n)$ die Existenz eines Polynoms $q(x) \in \mathfrak{Q}(n, [t^{1/n}])$ mit $|q(\xi)|_P \leqq P t^{-(1+1/n)}$. Folglich ist

$$w_n(H, \xi) < \frac{C_1}{H^{n+1}} \qquad (H=1, 2, \ldots),$$

woraus die Behauptung leicht zu folgern ist.

Hilfssatz 4. *Sei $q(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\cdots+a_n$ ein Polynom mit den Nullstellen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Dann gilt, wenn die Indizes $i_1, \ldots, i_k$ voneinander verschieden sind, die Ungleichung*

$$|a_0 \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k}|_P \leqq 1.$$

[7]) Siehe [8], Kap. V, Satz 2*.

[8]) Vgl. [8], S. 67–68.

Beweis. Nach dem Beweis von [7], Hilfssatz 17 ist jedes Produkt der Form $a_0\alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_k}$ ganzalgebraisch, und daraus folgt die Behauptung.

Hilfssatz 5. *Sei $q(x)$ ein Polynom vom Grade $n\geqq 2$ mit lauter verschiedenen Nullstellen $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Dann gilt, wenn $D(q)$ die Diskriminante bezeichnet,*

$$|q'(\alpha_m)|_P \geqq \sqrt{|D(q)|_P} \qquad (m=1,\dots,n).$$

Beweis. Nach [3], Gl. (4) ist

$$|q'(\alpha_m)|_P = \frac{\sqrt{|D(q)|_P}}{\left|a_0^{n-2}\prod\limits_{i,j\neq m;i<j}(\alpha_i-\alpha_j)\right|_P}.$$

Bei der Ausmultiplikation des Produktes im Nenner entsteht eine Summe von Produkten mit je $\binom{n-1}{2}$ Faktoren aus der Menge der $n-1$ Wurzeln α_i mit $i\neq m$. Da in diesen Produkten jedes α_i höchstens in der $(n-2)$-ten Potenz vorkommt, läßt sich jedes von ihnen in Faktoren der Form $a_0\alpha_{i_1}\dots\alpha_{i_k}$ zerlegen. Somit hat nach Hilfssatz 4 jeder Summand des Nenners einen P-adischen Wert $\leqq 1$, so daß

$$\left|a_0^{n-2}\prod_{i,j\neq m;i<j}(\alpha_i-\alpha_j)\right|_P \leqq 1$$

und damit die Behauptung folgt.

Hilfssatz 6. *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 5 gilt, wenn ξ eine beliebige, von $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ verschiedene Zahl aus K_P mit*

$$|\xi-\alpha_m|_P = \min_{i=1,\dots,n}|\xi-\alpha_i|_P$$

ist,

$$|\xi-\alpha_m|_P \leqq \frac{|q(\xi)|_P}{\sqrt{|D(q)|_P}}.$$

Beweis. Für jedes $i\neq m$ ist

$$|\alpha_m-\alpha_i|_P = |(\alpha_m-\xi)+(\xi-\alpha_i)|_P \leqq |\alpha_i-\xi|_P,$$

und somit wird

$$|q'(\alpha_m)|_P = |a_0|_P\prod_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n}|\alpha_m-\alpha_i|_P \leqq |a_0|_P\prod_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n}|\alpha_i-\xi|_P.$$

Folglich ergibt sich nach Hilfssatz 5

$$\sqrt{|D(q)|_P} \leqq |a_0|_P\prod_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n}|\alpha_i-\xi|_P$$

und damit

$$|\xi-\alpha_m|_P \leqq \frac{|a_0|_P}{\sqrt{|D(q)|_P}}\prod_{i=1}^{n}|\xi-\alpha_i|_P = \frac{|q(\xi)|_P}{\sqrt{|D(q)|_P}}.$$

Hilfssatz 7. *Seien $q_0(x)$, $q_1(x),\dots,q_r(x)$ Polynome mit*

$$q_0(x)=\prod_{i=1}^{r}q_i(x), \qquad \text{Grad } q_0=n \text{ und Höhe } q_i=H_i \qquad (i=0,\dots,n).$$

Dann gilt $H_0\geqq(4n)^{-n}\prod\limits_{i=1}^{r}H_i$:

Beweis. Siehe [7], Hilfssatz 16.

Hilfssatz 8. *Für jedes Polynom $q(x)$ vom Grad n gilt wenigstens eine der folgenden Aussagen*[9]*:*

1. q ist Produkt von n linearen Polynomen,

2. q ist Produkt von zwei Polynomen mindestens zweiten Grades,

3. q hat lauter verschiedene Nullstellen.

Beweis. Im Ring der Polynome mit ganzrationalen Koeffizienten sei

$$q = q_1^{\varrho_1} \dots q_r^{\varrho_r}$$

die eindeutige Zerlegung von q in Primelementpotenzen; ferner sei Grad $q_i = n_i$ $(i = 1, \dots, r)$. Wird nun angenommen, es gelte weder 1. noch 3., so gibt es wenigstens ein n_i, etwa n_1, mit $1 < n_i < n$. Dann kann auch nicht $n_1 = n - 1$ sein, weil daraus 3. bzw. 1. folgen würde. Somit gilt $1 < n_1 < n - 1$, woraus unmittelbar folgt, daß

$$q = q_1 (q_1^{\varrho_1 - 1} q_2^{\varrho_2} \dots q_r^{\varrho_r})$$

eine Zerlegung mit der Eigenschaft 2. ist.

Hilfssatz 9. *Bei vorgegebenen ganzrationalen Zahlen $H > 1$ und x mit $H^2 \neq x$ hat die Gleichung*

$$H^2 - 4 a_0 a_1 = x$$

höchstens $C_2 H^{C_3/\log\log H}$ Lösungen in ganzen Zahlen a_0, a_1 mit $|a_0| \leqq H, |a_1| \leqq H$.

Beweis[10]. Ist $d(M)$ die Anzahl der positiven Teiler von M, so beträgt die Lösungsanzahl höchstens

$$2 d(H^2 - x) \leqq C_2 H^{C_3/\log\log H}.$$

Hilfssatz 10. *Bei vorgegebenen ganzrationalen Zahlen $H > 1$ und x hat die Gleichung*

$$a_1 - 4 H a = x$$

höchstens $C_2 r(x, 4H) H^{C_3/\log\log H}$ Lösungen in ganzen Zahlen a_1, a mit $|a_1| \leqq H$, $|a| \leqq H$, wobei $r(u, v)$ der größte gemeinsame quadratische Teiler von u und v ist.

Beweis. Siehe [2], Seite 267.

Hilfssatz 11. *Sind N und M natürliche Zahlen, so gilt*

$$\sum_{x=1}^{M} r(x, N) \leqq M \log N.$$

Beweis. Sei $d^2 | N$; dann gilt $r(x, N) = d$ genau für die x von der Form $x = d^2 x_1$ mit $r(x_1, N) = 1$. Es gibt also höchstens M/d^2 Zahlen x mit dieser Eigenschaft, und daher wird

$$\sum_{x=1}^{M} r(x, N) \leqq \sum_{d^2 | N} \frac{M}{d^2} d \leqq M \sum_{d | N} \frac{1}{d} \leqq C_4 M \log N.$$

4. Beweis von Satz 1. Im Hinblick auf Hilfssatz 3 ist nur noch

$$\vartheta_1(\xi) \leqq 2 \quad \text{und} \quad \vartheta_n(\xi) \leqq 2 - \frac{1}{2n} \qquad (n = 2, 3, \dots) \tag{7}$$

[9]) Dabei ist an die oben getroffene Vereinbarung zu erinnern, wonach nur Polynome über dem Ring der ganzrationalen Zahlen betrachtet werden.

[10]) Vgl. [2], S. 266.

für fast alle $\xi \in K_p$ zu beweisen. Da die Menge der algebraischen Zahlen aus K_P das Maß 0 besitzt, können wir uns dabei auf die Menge K der transzendenten P-adischen Zahlen beschränken.

Sei $S_n(\sigma)$ die Menge der $\xi \in K$ mit $\vartheta_n(\xi) > \sigma$. Dann gibt es, wie man der Definition leicht entnimmt, zu jeder Zahl $\xi \in S_n(\sigma)$ unendlich viele H, zu denen Polynome $q(x) \in \mathfrak{Q}(n, H)$, $q(x) \notin \mathfrak{Q}(n, H-1)$ mit

$$|q(\xi)|_P < H^{-n\sigma} \tag{8}$$

existieren; die Menge aller $\xi \in K$, für die dies zutrifft, bildet also eine Obermenge $S_n^*(\sigma)$ von $S_n(\sigma)$. Ist nun für alle $\sigma > \sigma_0$ die Gleichung $T\left(S_n^*(\sigma)\right) = 0$ bewiesen, so folgt auch $T\left(S_n^*(\sigma_0)\right) = T\left(S_n(\sigma_0)\right) = 0$; denn $S_n^*(\sigma_0)$ ist als Vereinigung der abzählbar vielen Mengen $S_n^*\left(\sigma_0 + \frac{1}{j}\right)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ darstellbar. Wir werden diese Überlegung im Fall $n = 1$ mit $\sigma_0 = 2$ und im Fall $n \geqq 2$ mit $\sigma_0 = 2 - \frac{1}{2n}$ anwenden, so daß dann (7) folgt.

Um für jedes $\varepsilon > 0$ die Gleichung $T\left(S_1^*(2+\varepsilon)\right) = 0$ zu beweisen, bemerken wir, daß in diesem Fall für jede Lösung von (8) wegen[11])

$$|q(\xi)|_P = |a_0 \xi + a_1|_P = |a_0|_P \cdot \left|\xi + \frac{a_1}{a_0}\right|_P < H^{-2-\varepsilon}$$

offenbar

$$\left|\xi + \frac{a_1}{a_0}\right|_P < \frac{1}{|a_0|_P H^{2+\varepsilon}} = \frac{P^{\varkappa}}{H^{2+\varepsilon}}$$

gilt, wenn $|a_0|_P = P^{-\varkappa}$ ist. Wir überdecken nun jede rationale Zahl $-\frac{a_1}{a_0}$ durch das P-adische Intervall $\mathfrak{i}(a_0, a_1)$ der Zahlen $\xi \in K_P$ mit $\left|\xi + \frac{a_1}{a_0}\right|_P < \frac{H^{-2-\varepsilon}}{|a_0|_P}$. Dann ist offenbar die Menge $S_1^*(2+\varepsilon)$ für jedes H_0 in der Vereinigung

$$\bigcup_{H=H_0}^{\infty} \bigcup_{\max(|a_0|, |a_1|) = H} \mathfrak{i}(a_0, a_1)$$

enthalten. Für das Turkstrasche Maß verwenden wir die Zerlegung

$$T_H = T\Big(\bigcup_{\max(|a_0|, |a_1|) = H} \mathfrak{i}(a_0, a_1)\Big) \leqq T\Big(\bigcup_{|a_0| \leqq H = |a_1|} \mathfrak{i}(a_0, a_1)\Big) + T\Big(\bigcup_{|a_1| < H = |a_0|} \mathfrak{i}(a_0, a_1)\Big),$$

und die beiden letzten Summanden nennen wir T_H' bzw. T_H''.

Zur Abschätzung von T_H' ist zu berücksichtigen, daß bei den auftretenden Intervallen stets $0 \leqq \varkappa \leqq k = \left[\frac{\log H}{\log P}\right]$ ist und jedes solche $\varkappa$ höchstens $2HP^{-\varkappa}$ mal vorkommt. Daher wird

$$T_H' \leqq \sum_{\varkappa=0}^{k} \frac{2H}{P^{\varkappa}} \cdot \frac{P^{\varkappa}}{H^{2+\varepsilon}} = 2(k+1)\frac{1}{H^{1+\varepsilon}} < \frac{C_5}{H^{1+\varepsilon/2}}.$$

Für T_H'' erhält man entsprechend die Ungleichung

$$T_H'' < \frac{C_6 H}{|H|_P H^{2+\varepsilon}} = \frac{C_6}{|H|_P H^{1+\varepsilon}},$$

[11]) Da keine konstanten Polynome als Lösungen auftreten können, haben alle zu betrachtenden $q(x)$ den genauen Grad 1.

und somit ergibt sich

$$T\left(S_1^*(2+\varepsilon)\right) \leqq \lim_{H_0 \to \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} (T'_H + T''_H) \leqq \lim_{H_0 \to \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} \frac{C_5}{H^{1+\varepsilon/2}} + \lim_{H_0 \to \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} \frac{C_6}{|H|_P\, H^{1+\varepsilon}}.$$

Da der erste Grenzwert verschwindet, bleibt nur der zweite zu betrachten. Es ist[12])

$$\sum_{H=1}^{\infty} \frac{1}{|H|_P\, H^{1+\varepsilon}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\substack{H=1 \\ P^l \| H}}^{\infty} \frac{P^l}{H^{1+\varepsilon}} < \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P^l}{(m\,P^l)^{1+\varepsilon}} = \frac{P^\varepsilon}{P^\varepsilon - 1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{1+\varepsilon}} < \infty,$$

woraus

$$\lim_{H_0 \to \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} T''_H = 0$$

folgt, und daher gilt $T\left(S_1^*(2+\varepsilon)\right) = 0$.

Es sei nun bereits für $m = 1, 2, \ldots, n-1$ die Gleichung $T\left(S_m^*(\sigma_0)\right) = 0$ mit

$$\sigma_0 = \sigma_0(m) = \begin{cases} 2 & \text{für } m = 1, \\ 2 - \frac{1}{2m} & \text{für } m = 2, \ldots, n-1 \end{cases} \tag{9}$$

bewiesen. Dann ist zu zeigen, daß für jedes $\varepsilon > 0$, wenn $\sigma = 2 - \frac{1}{2n} + \varepsilon$ gesetzt wird, $T\left(S_n^*(\sigma)\right) = 0$ gilt. Dazu stellen wir die Menge $S = S_n^*(\sigma)$ als Vereinigung von vier Teilmengen S^0, S^1, S^2, S^3 dar, die folgendermaßen definiert sind: Es sei $S^0(\sigma)$ die Menge der $\xi \in K$, für die (8) unendlich viele Lösungen $q(x)$ mit Grad $q(x) < n$ besitzt; ferner seien $S^1(\sigma)$, $S^2(\sigma)$ und $S^3(\sigma)$ die Menge der $\xi \in K$, für die (8) unendlich viele Lösungen $q(x)$ besitzt, die vom Grad n sind und außerdem im Sinne von Hilfssatz 8 die Aussagen 1., 2. bzw. 3. erfüllen. Dann gilt sicher $S = S^0 \cup S^1 \cup S^2 \cup S^3$. Wir setzen nun $V = \bigcup_{m=1}^{n-1} S_m^*(\sigma_0(m))$ und zeigen zunächst

$$T(S^0 \cup S^1 \cup S^2) \leqq T(V), \tag{10}$$

woraus $T(S^0 \cup S^1 \cup S^2) = 0$ folgt, da nach Induktionsvoraussetzung $T(V) = 0$ ist.

Ist $\xi \in S^0$, so gibt es offenbar ein $m < n$ derart, daß unendlich viele Lösungen von (8) existieren, die den Grad m haben. Wegen

$$n\left(2 - \frac{1}{2n} + \varepsilon\right) > m\,\sigma_0(m) \qquad (m = 1, \ldots, n-1) \tag{11}$$

folgt dann $\xi \in S_m^*\left(\sigma_0(m)\right)$, also auch $\xi \in V$ und damit $S^0 \subseteqq V$.

Ist $\xi \in S^1$, so gibt es unendlich viele Lösungen der Form $q = q_1 \ldots q_n$ mit linearen Polynomen q_i von (8). Bezeichnet man deren Höhen mit H_i und nimmt man $\xi \notin S_1^*(2)$ an, so besitzt die Ungleichung

$$|q_i(\xi)|_P < H_i^{-2}$$

nur endlich viele Lösungen in linearen Polynomen $q_i(x)$, für die wegen $\xi \in K$ stets $|q_i(\xi)|_P > 0$ gilt. Es gibt also eine Konstante $\gamma = \gamma(\xi) > 0$ mit

$$|q_i(\xi)|_P > \gamma\, H_i^{-2}$$

[12]) $P^l \,\|\, H$ bedeutet, daß P^l, nicht aber P^{l+1} Teiler von H ist.

für alle linearen Polynome der Höhe H_i. Damit folgt unter Berücksichtigung von Hilfssatz 7

$$|q(\xi)|_P > \gamma^n \prod_{i=1}^{n} H_i^{-2} > C_7(\xi)\, H^{-2}.$$

Wegen (11) steht dies im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß (8) unendlich viele Lösungen $q(x)$ der angegebenen Art hat. Folglich muß $S^1 \subseteqq V \cup S_1^*(2)$ gelten, also auch $T(S^1) \leqq T(V)$.

Ist $\xi \in S^2$, so gibt es für wenigstens ein m unendlich viele Lösungen $q = q_1 q_2$ von (8) mit Grad $q = n$ und $1 < \text{Grad}\, q_1 = m < n$. Nimmt man $\xi \notin S_m^*(\sigma_0(m)) \cup S_{n-m}^*(\sigma_0(n-m))$ an, so folgt analog zur vorhergehenden Überlegung

$$|q(\xi)|_P > \gamma_1 \gamma_2 H_1^{-m\sigma_0(m)} H_2^{-(n-m)\sigma_0(n-m)} > C_8 H^{-\mu\sigma_0(\mu)}$$

mit $\mu = \min(m\sigma_0(m), (n-m)\,\sigma_0(n-m))$. Wegen

$$n\left(2 - \frac{1}{2n} + \varepsilon\right) > \mu\,\sigma_0(\mu)$$

steht dies im Widerspruch zur Voraussetzung, daß (8) unendlich viele derartige Lösungen $q(x)$ besitzt. Folglich muß auch $T(S^2) \leqq T(V)$ gelten.

Ist $\xi \in S^3$, so gibt es unendlich viele Polynome $q(x)$ vom Grad n mit lauter verschiedenen Nullstellen, die (8) genügen. Wir ordnen jeder Nullstelle α_i eines solchen Polynoms das P-adische Intervall $\mathfrak{i}(\alpha_i)$ der Zahlen $\xi \in K_P$ mit

$$|\xi - \alpha_i|_P < \frac{1}{H^{n\sigma}\sqrt{|D(q)|_P}}$$

zu, wobei die linke Seite im Sinne der Bewertung in $\hat{K}_P$ zu verstehen ist. Dann gilt offenbar für alle diese Polynome in der Bezeichnungsweise von Hilfssatz 6 mit $\sigma = 2 - \frac{1}{2n} + \varepsilon$ die Ungleichung

$$|\xi - \alpha_m|_P \leqq \frac{|q(\xi)|_P}{\sqrt{|D(q)|_P}} < \frac{H^{-n\sigma}}{\sqrt{|D(q)|_P}},$$

d. h., es ist $\xi \in \mathfrak{i}(\alpha_m)$. Folglich wird für jedes H_0 die Menge S^3 durch die Gesamtheit dieser Intervalle mit $H \geqq H_0$ überdeckt, und somit gilt für das Turkstrasche Maß

$$\overline{T}(S^3) \leqq \lim_{H_0 \to \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} {\sum}' \frac{H^{-n\sigma}}{\sqrt{|D(q)|_P}}, \tag{12}$$

wobei in der inneren Summe $q(x)$ alle Polynome vom Grad n, der Höhe H und mit der (durch den Strich am Summenzeichen ausgedrückten) Nebenbedingung $D(q) \neq 0$ durchläuft.

Zur Abschätzung von

$$\Sigma = {\sum}' \frac{1}{\sqrt{|D(q)|_P}} \tag{13}$$

berücksichtigen wir, daß die Anzahl der Summanden $\leqq C_9 H^n$ ist, da jeweils einer der Koeffizienten, etwa a_i, den Betrag H hat. Wenn dann alle übrigen Koeffizienten bis auf einen, etwa a_j $(j \neq i)$, festgehalten werden, ist $D(q)$ ein Polynom $V(a_j)$ von einem Grad $g' \geqq 1$, so daß die Funktion $|V(a_j)|$ jeden

Wert höchstens $2g'=g$ mal annehmen kann. Die Summe Σ ist also (bei festem j und i) in eine Anzahl $\leqq C_{10}H^{n-1}$ von Summanden der Form

$$\Sigma^* = \sum_{\substack{t=-H \\ V(t)\neq 0}}^{H} \frac{1}{\sqrt{|V(t)|_P}} \tag{14}$$

zerlegbar. Es soll gezeigt werden, daß für jede dieser Summen eine Ungleichung der Form

$$\Sigma^* < C_{11} H^{n-1/2} \tag{15}$$

gilt und somit

$$\Sigma < C_{12} H^{2n-3/2} \tag{16}$$

ist.

Die Werte $|V(t)|$ sind ganze Zahlen x mit $1 \leqq x \leqq C_{13}H^{2n-2}$, da $D(q)$ ein homogenes Polynom vom Grad $2n-2$ in den Variablen $a_0, \ldots, a_n$ ist. Daher gilt, wenn die natürliche Zahl k durch die Ungleichung

$$P^k \leqq C_{13} H^{2n-2} < P^{k+1} \tag{17}$$

definiert wird, stets $|x|_P = P^{-\varkappa}$ mit $0 \leqq \varkappa \leqq k$, und zwar wird jedes solche $\varkappa$ für höchstens $A_\varkappa = C_{13}H^{2n-2}/P^\varkappa$ Werte x angenommen, da dann $P \| x$ sein muß. Jede dieser Zahlen x, die auftritt, liefert zur Summe Σ^* den Beitrag $P^{\varkappa/2}$, und so ergibt sich durch Betrachtung des ungünstigsten Falles, wo die Zahlen x mit den größtmöglichen Werten von $P^{\varkappa/2}$ — und jeder von ihnen g mal — angenommen werden, die Abschätzung

$$\Sigma^* < g(A_k P^{k/2} + A_{k-1} P^{(k-1)/2} + \cdots + A_{k-u} P^{(k-u)/2}),$$

wenn u eine natürliche Zahl mit

$$A_k + A_{k-1} + \cdots + A_{k-u} \geqq 2H+1 \tag{18}$$

ist. Daraus folgt weiter

$$\begin{aligned}\Sigma^* &< g\, C_{13} H^{2n-2}(P^{-k/2} + P^{-(k-1)/2} + \cdots + P^{-(k-u)/2}) \\ &= g\, C_{13} \frac{H^{2n-2}}{P^{k/2}} \cdot \frac{P^{u/2}-1}{P^{1/2}-1} < g\, C_{13}^{1/2} H^{n-1} P^{1/2} \cdot \frac{P^{u/2}-1}{P^{1/2}-1},\end{aligned}$$

letzteres wegen (17). Folglich ist

$$\Sigma^* < C_{14} H^{n-1} P^{u/2}. \tag{19}$$

Ferner gilt auf Grund von (18)

$$2H+1 \leqq C_{13} H^{2n-2}(P^{-k} + P^{-k+1} + \cdots + P^{-u}) = C_{13} \frac{H^{2n-2}}{P^k} \cdot \frac{P^{u+1}-1}{P-1},$$

also, wieder nach (17),

$$P^{u+1} > C_{15} \frac{P^k H}{H^{2n-2}} > C_{15} C_{13} \frac{H}{P},$$

d.h. $P^u > C_{16} H$, und somit kann man $P^u = C_{17} H$ setzen, wenn $C_{17} > C_{16}$ geeignet gewählt wird. Damit ergibt sich aus (19) die Ungleichung (15), so daß (16) bewiesen ist.

Setzt man (16) in (12) ein, so erhält man

$$\overline{T}(S^3) \leqq C_{12} \lim_{H_0 \to \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} H^{(2-\sigma)n-3/2},$$

und da in dieser Reihe wegen $\sigma = 2 - \frac{1}{2n} + \varepsilon$ der Exponent < -1 ist, tritt Konvergenz ein, so daß $\overline{T}(S^3) = T(S^3) = 0$ folgt. Damit ist alles bewiesen.

5. Beweis von Satz 2. Analog zum vorangehenden Beweis haben wir jetzt für $\sigma = \frac{3}{2} + \varepsilon$ mit beliebigem $\varepsilon > 0$ die Gleichung $T\left(S_2(\sigma)\right) = 0$ nachzuweisen. Die Darstellung von $S = S_2^*(\sigma)$ als Vereinigung von Mengen S^j vereinfacht sich jetzt zu $S = S^0 \cup S^1 \cup S^2$, wobei diese Mengen mit dem jetzigen Wert von σ in (8) definiert sind. Wegen $2\left(\frac{3}{2} + \varepsilon\right) > 2$ ergibt sich dann wie im Beweis von Satz 1 die Gleichung

$$T(S^0 \cap S^1) = 0.$$

Um die noch fehlende Aussage

$$T(S^2) = 0 \tag{20}$$

zu beweisen, können wir zunächst dem Beweisgang von Satz 1 bis zum Auftreten der Summe Σ in (13) folgen. Da jetzt für jedes Polynom $q(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ offenbar $D(q) = a_1^2 - 4 a_0 a_2$ ist und mindestens einer der drei Koeffizienten den Betrag H haben muß, gilt die Ungleichung

$$\Sigma \leqq 2 \sum_{a_0, a_1 = -H}^{H}{}' |H^2 - 4 a_0 a_2|_P^{-1/2} + 4 \sum_{a_1, a = -H}^{H}{}' |a_1^2 - 4 H a|_P^{-1/2}. \tag{21}$$

Wir bezeichnen die beiden Summen auf der rechten Seite mit Σ_1 bzw. Σ_2. Zu ihrer Abschätzung berücksichtigen wir, daß die Werte von $D(q)$ ganze Zahlen x mit $1 \leqq |x| \leqq 5H^2$ sind und Gleichungen der Form $|x|_P = P^{-\varkappa}$ mit $0 \leqq \varkappa \leqq k$ genügen, wenn k wie in (17) (mit $C_{13} = 5$) definiert wird. Jedes solche $\varkappa$ wird somit höchstens $10H^2/P^\varkappa$ Werte von x angenommen, und ferner gibt Hilfssatz 9 eine obere Schranke für die Vielfachheit an, mit der eine Zahl x in der Summe Σ_1 auftreten kann. Somit erhält man

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &\leqq 4H + \sum_{\substack{a_0, a_1 = -H \\ 4 a_0 a_2 \neq 0}}^{H}{}' |H^2 - 4 a_0 a_2|_P^{-1/2} \leqq 4H + C_2 H^{C_3/\log\log H} 10 H^2 \sum_{\varkappa=0}^{k} P^{-\varkappa/2} \\ &\leqq C_{18} H^{2 + C_{14}/\log\log H}.\end{aligned}$$

Ähnlich folgt auf Grund der Hilfssätze 10 und 11

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &\leqq C_2 H^{C_3/\log\log H} \sum_{\varkappa=0}^{k} \sum_{x_1=1}^{[5H^2 P^{-\varkappa}]} r(x_1 P^\varkappa, 4H) P^{\varkappa/2} \\ &\leqq C_2 H^{C_3/\log\log H} \sum_{\varkappa=0}^{k} \sum_{x_1=1}^{[5H^2 P^{-\varkappa}]} r(x_1, 4H) P^\varkappa \leqq C_2 H^{C_3/\log\log H} (k+1) 5H^2 \log(4H) \\ &< C_{19} H^{2 + C_{15}/\log\log H}.\end{aligned}$$

Setzt man dies in (12) ein, so ergibt sich

$$\overline{T}(S^2) \geqq C_{21} \varliminf_{H_0 \to \infty} \sum_{H=H_0}^{\infty} H^{-2\sigma + 2 + C_{16}/\log\log H},$$

woraus die zu beweisende Gl. (20) folgt.

6. Schlußbemerkung. Im Reellen bzw. im Komplexen kann man bekanntlich die Mahlersche Vermutung so aussprechen[13]), daß für fast alle ξ die Gleichungen

$$\vartheta_n(\xi) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \vartheta_n(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

gelten. Ersteres hat sowohl die Aussage

$$\vartheta(\xi) = \sup_{n=1,2,\ldots} \vartheta_n(\xi) = 1 \qquad \text{für fast alle reellen } \xi \tag{22}$$

als auch

$$w(\xi) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \vartheta_n(\xi) = 1 \qquad \text{für fast alle reellen } \xi \tag{23}$$

zur Folge. Analog dazu wird man im P-adischen Fall vermuten dürfen, daß fast alle $\xi \in K_p$ den Gleichungen

$$\vartheta_n(\xi) = 1 + \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{24}$$

genügen, woraus einerseits

$$\vartheta(\xi) = 2 \qquad \text{für fast alle } \xi \in K_P \tag{25}$$

und andererseits

$$w(\xi) = 1 \qquad \text{für fast alle } \xi \in K_P \tag{26}$$

folgt. Für $n = 1$ und $n = 2$ ist (24) durch Satz 1 bzw. Satz 2 bewiesen, während für $n \geqq 3$ die entsprechende Frage noch offensteht. Die Richtigkeit der Aussage (25) dagegen ergibt sich als unmittelbare Folge von Satz 1. Jeder weitere Fortschritt in Richtung auf (26) bzw. (24) dürfte — wie im gewöhnlichen Fall — von neuen Einsichten in die Werteverteilung der Diskriminanten $D(q)$ abhängig sein.

Literatur

[1] FELLER, W., u. E. TORNIER: Maß- und Integrationstheorie des Baireschen Nullraumes. Math. Ann. **107**, 165–187 (1932). — [2] KASCH, F.: Über eine metrische Eigenschaft der S-Zahlen. Math. Z. **70**, 263–270 (1958). — [3] KASCH, F., u. B. VOLKMANN: Zur Mahlerschen Vermutung über S-Zahlen. Math. Ann. **136**, 442–453 (1958). — [4] KUBILYUS, J. F.: Über eine Anwendung der Winogradowschen Methode auf die Lösung eines Problems aus der metrischen Zahlentheorie. [Russ.] Dokl. Akad. Nauk SSSR, N.S. **67**, 783–786 (1949). — [5] MAHLER, K.: Über Diophantische Approximationen im Gebiete der P-adischen Zahlen. Jahresber. DMV **44**, 250–255 (1934). — [6] MAHLER, K.: Über eine Klasseneinteilung der P-adischen Zahlen. Mathematica (Zutphen) **3**, 177–185 (1934/35). — [7] SCHNEIDER, TH.: Einführung in die transzendenten Zahlen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1957. — [8] TURKSTRA, H.: Metrische bijdragen tot de theorie der Diophantische approximaties in het lichaam der P-adische getallen. Diss. Freie Univ. Amsterdam 1936, 146 S.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität
Mainz, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 29. April 1959)

[13]) Vgl. [3], § 1.

Moser, J.
Math. Zeitschr. 72, 379–398 (1960)

The Order of a Singularity in Fuchs' Theory

By

JÜRGEN MOSER

I. Introduction

1. This paper is concerned with systems of ordinary differential equations

$$\frac{dy}{dx} = A(x)\,y \tag{1}$$

where y is a vector with n components and $A(x)$ an n by n matrix. The elements of $A(x)$ are assumed to be analytic functions of the complex variable x for $0<|x|<\varrho$ with a pole at $x=0$:

$$A(x) = x^{-p}\sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu x^\nu \quad (A_0 \neq 0) \tag{2}$$

where p is an integer and the A_ν constant matrices. The aim of Fuchs' theory is to study the nature of the solution vectors $y(x)$ near the singularity $x=0$.

In most treatments of this problem one restricts the attention to the case where A_0 is a matrix with distinct eigenvalues in which case one can describe the solution by asymptotic series for $p>1$. For $p=1$ one has a regular singularity, i.e. all solutions $y(x)$ of (1) grow at most like a finite power of $|x|$

$$|y| \leqq c|x|^N \tag{3}$$

for small x and with some norm $|y|$ [1]).

For the degenerate case, however, where A_0 has several zero eigenvalues or even is nilpotent this problem is very complicated and has not been treated in this generality. It can happen, for instance, that even in the case $p>1$ one has a regular singularity (see example below). On the other hand it was proven by Horn [1] that in case $x=0$ is a regular singularity one can transform the system (1) by

$$y = T(x)\,z \tag{4}$$

into a system

$$\frac{dz}{dx} = B(x)\,z, \qquad B = T^{-1}A\,T - T^{-1}\frac{d}{dx}T \tag{5}$$

where $B(x)$ has a pole of first order only. Here $T(x)$ is a matrix whose elements are analytic in some neighborhood $0<|x|<\varrho$ with at most a pole at $x=0$, and which satisfies $\det T(x) \not\equiv 0$.

[1]) Since $y(x)$ is multivalued in general one has to restrict the argument of x to a fixed sector $|\arg x| < \text{const}$.

We will call systems (1) and (5) which are related by such a transformation (4) "equivalent", since the behavior of the solutions near a singularity is essentially the same, namely up to functions which have a pole near the origin. Here we require only that $\det T(x)$ is not identically zero but allow that $\det T(0)$ vanishes [2]).

Thus Horn's theorem can be expressed as follows: A system (1) has a regular singularity at $x=0$ if and only if it is equivalent to a system (2) with a pole of first order. Even though this criterion gives a necessary and sufficient condition for a regular singularity it cannot be used to decide about the nature of the singularity for a preassigned system. There is no method of constructing the transformation $T(x)$, and it is not even clear, how many terms of the transformation matrix

$$T(x) = \sum_{\nu=-N}^{M} x^\nu T_\nu$$

are necessary for the reduction. It is the purpose of this note to give a criterion which allows the decision of this question in a definite number of steps.

2. For any system of the form (1) we define the rational number

$$m(A) = p - 1 + \frac{r}{n} \geqq 0 \tag{6}$$

as the *order* of A where $r = r(A_0)$ is the algebraic rank of A_0, $0 < r \leqq n$. If $p - 1 + \frac{r}{n} < 0$ we set $m(A) = 0$. For every system (1) we introduce the number

$$\mu(A) = \operatorname*{Min}_T m(T^{-1} A T - T^{-1} T'), \tag{6'}$$

i.e. $\mu(A)$ is the minimum value of the order of all systems which are equivalent to (1). One can consider $\mu(A) - 1$ as a generalization of "Poincaré's rank" of a singularity. The matrix $A(x)$ is called *reducible*, if $m(A) > \mu(A)$.

Before stating the main results we illustrate the significance of $\mu(A)$ for the nilpotent matrix

$$A(x) = \begin{pmatrix} x^{-q} & -x^{-2q} \\ 1 & -x^{-q} \end{pmatrix}$$

where q is a positive integer. Obviously $m(A) = 2q - \frac{1}{2}$ but this matrix is reducible. With the transformation matrix

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^q & x^{q+\gamma} \end{pmatrix}, \quad \gamma = \left[\frac{q}{2}\right] \text{ [3])}$$

one computes $B = T^{-1} A T - T^{-1} T'$ to

$$B(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x^{-q+\gamma} \\ -q x^{-\gamma-1} & -(q+\gamma) x^{-1} \end{pmatrix}.$$

---

[2]) A similar concept of equivalence was introduced by G. D. BIRKHOFF [2], who required that $T(0)$ is the identity matrix. In this case, A_0 is unchanged, and the order p of the pole is the same for equivalent systems.

[3]) $[x]$ stands for the greates integer $\leqq x$.

One can show that $B(x)$ is not reducible and one finds

$$\mu(A) = m(B) = \frac{q+1}{2}.$$

In particular the minimum order of the pole $x=0$ is

$$\gamma + 1 = \left[\frac{q}{2}\right] + 1.$$

In this simple example the order $m(A)$ can be reduced from $2q - \frac{1}{2}$ to $\frac{1}{2}(q+1)$.

The regular singularity is characterized by the inequality

$$\mu \leqq 1$$

according to Horn's theorem. In the following we will assume that

$$m(A) > 1$$

and investigate under which conditions $A(x)$ is reducible.

The reason for the above refined definition of the order $m(A)$ of the singularity lies in the fact that it is possible to give a necessary and sufficient criterion for reducibility which involves the first two coefficients A_0, A_1 of $A(x)$ only. This statement is contained in

THEOREM 1. *If $m(A) > 1$ the system (1) is reducible if and only if the polynomial*

$$\mathfrak{P}(\lambda) = x^r \det\left(\lambda I + x^{p-1} A(x)\right)\big|_{x=0}, \qquad r = r(A_0) \tag{7}$$

vanishes identically in λ.

The polynomial $\mathfrak{P}(\lambda)$ depends on A_0, A_1 only, since in

$$x^{p-1} A(x) = \frac{A_0}{x} + A_1 + x A_2 + \cdots$$

A_0 has the rank r. Hence in forming the determinant in (7) one has to take r columns from A_0 and the others from $\lambda I + A_1 + x A_2 + \cdots\big|_{x=0} = \lambda I + A_1$. Thus

$$\mathfrak{P}(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{n-r} \lambda^\nu \mathfrak{P}_\nu(A_0, A_1)$$

where the coefficients $\mathfrak{P}_\nu(A_0, A_1)$ are homogeneous polynomials in the coefficients of A_0, A_1 of degree $n - \nu$. Therefore the above criterion requires

$$\mathfrak{P}_\nu(A_0, A_1) = 0 \quad \text{for} \quad \nu = 0, \ldots, n - r.$$

Since reducibility depends on the coefficients A_0, A_1 one can expect that the reduction of $m(A)$ can be achieved by simple transformation matrices $T(x)$. This is expressed by

THEOREM 2. *If $A(x)$ is reducible and $m(A)>1$ then the reduction can be carried out with a matrix T of the form*

$$T = (P_0 + x P_1)\,\mathrm{diag}\,(1, 1, \ldots, 1, x, x, \ldots x)$$

where P_0, P_1 are constant matrices and $\det P_0 \neq 0$.

REMARK. This theorem expresses only that $B = T^{-1}A\,T - T^{-1}T'$ satisfies $m(B)<m(A)$, not that $m(B)$ equals $\mu(A)$.

Theorem 2 limits the computation of T to two matrices. After this reduction has been carried out one can apply Theorem 1 to check whether a further reduction is possible. Here it is important to observe that $\mathfrak{P}(\lambda)$ will change from one step to the next since B is not obtained by a similarity transformation but by $B = T^{-1}A\,T - T^{-1}T'$. If the system possesses a regular singularity one has to reduce the order from $m(A)$ to $\mu = 1$ which requires at most $(p-2)n + r = n\,(m(A)-1)$ steps. In this sense one can consider Theorem 1 as a criterion for a regular singularity, although it is not given in "closed form". The same remark refers more generally to the computation of $\mu(A)$. After one has reached the last step for which $m(A) = \mu(A)$ one has $\mathfrak{P}(\lambda) \not\equiv 0$ which is the characteristic property of A_0, A_1 in the irreducible case.

3. It is interesting to note that for ordinary differential equation

$$\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{du}{dx} + a_n(x)\,u = 0 \tag{8}$$

the invariant μ can be computed explicitly and not only recursively. Here the $a_k(x)$ are assumed to be analytic in $0<|x|<\varrho$ with at most a pole at $x=0$. The equation (8) can be rewritten as a first order system (1) for which the number $\mu = \mu(A)$ has been defined.

This number can be computed as follows: Let $\lambda_k \geqq 0$ be the smallest integer such that

$$x^{\lambda_k} a_k(x) \quad \text{is regular at} \quad x = 0.$$

THEOREM 3. *With the above definition let p be the smallest integer with*

$$p \geqq \frac{\lambda_k}{k}, \qquad r = \operatorname{Max}_k\,(\lambda_k - (p-1)\,k) > 0.$$

Then

$$\mu = p - 1 + \frac{r}{n} \tag{9}$$

is the required invariant provided $p>1$. If $p \leqq 1$ one has $\mu \leqq 1$.

This theorem can be considered as a generalization of Fuchs' theorem which states that (8) has a regular singularity if and only if $\lambda_k \leqq k$, i.e. $p \leqq 1$. Such a criterion is not known for systems (1). A similar situation occurs in the computation of μ, which can be done explicitly for differential equations (8) while for systems only a "recursive" criterion can be given.

The differential equations (8) can be chosen as models to exhibit all non-negative rational numbers with denominator n as possible values for μ. For $0<\mu\leqq 1$ one has a regular singularity and for $\mu=0$ a regular point.

If the matrix $A(x)$ is real and symmetric or hermitean the computation of μ can be given explicitly since only the reduced case occurs.

4. The above question is closely related to the problem of invariants of $A(x)$ under the equivalence

$$A \sim B = T^{-1} A\, T - T^{-1} T' \tag{10}$$

where $T(x)$ is a matrix described under (4). One might expect similar normal forms as they are known under similarity transformations. That the situation is quite different in both cases is seen from the fact that the invariants under similarity consist of at least n power series (for instance the coefficients of the characteristic polynomial) while the equivalence (10) admits only finitely many numbers as invariants for A. This follows from a theorem of G. D. BIRKHOFF [2] who proved that one can find a $T(x)$ with $T(0)=I$ such that

$$B = \sum_{\nu=1}^{p} B_{p-\nu}\, x^{-\nu}$$

does not contain x in positive powers. His method requires solving an integral equation and might be called *transcendental*, since it requires the knowledge of infinitely many terms in A. In contradistinction to Birkhoff's result this paper is concerned with terms of negative exponents in x and an *algebraic* description of those terms. While in Birkhoff's paper the term $T^{-1}T'$ in (10) is to be considered as the principal part $T^{-1}A\,T$ is the main term in this note.

The equivalence relation (10) has been investigated in several papers, in particular, by LOEWY [6], where the question of decomposability of a matrix or a matrix complex is treated. However, these results are not used and not needed for the proof of the above results.

In this paper we consider the coefficients of all analytic functions to be complex numbers although it is clear that the proofs can be generalized to commutative fields without zero divisors.

II. 3 Lemmata

The proof of the above theorem is based on 3 lemmata which are proven in this section. The first lemma can be considered as a generalization of the fact that an analytic function $f(z)\equiv 0$ which has at most a pole at $z=0$ can be written in the form $f(z)=z^{\alpha}g(z)$ where $g(z)$ is analytic at $z=0$ and $g(0)\neq 0$. The number α will be replaced by a diagonal matrices in the corresponding statement for matrices.

LEMMA 1. *Let*

$$T(x) = \sum_{\nu} T_\nu x^\nu$$

be a sum with finitely many negative ν and $\det T(x) \not\equiv 0$. *Then $T(x)$ can be represented in the form*

$$T(x) = P(x)\, x^\alpha\, Q(x)$$

where $P(x)$ is a polynomial with $\det P(x) \equiv 1$ *and $Q(x)$ a power series with* $\det Q(0) \neq 0$ *and*

$$x^\alpha = \operatorname{diag}(x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n})$$

where $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n$ are integers.

REMARK 1. $P(x)$ is a unit in the ring of polynomials since on account of $\det P(x) \equiv 1$ the inverse $P^{-1}(x)$ also is a polynomial. $Q(x)$ is a unit in the ring of power series while x^α represents the essential part of $T(x)$.

REMARK 2. Like in Lemma 1 one can find a representation of the form

$$T(x) = Q(x)\, x^\alpha\, P(x)$$

with the same properties specified for P, Q in Lemma 1.

PROOF. We prefer to prove the statement in the form of remark 2

$$T(x) = Q(x)\, x^\alpha\, P(x)$$

considering the column vectors $t_l(x)$ of $T(x)$ instead of the rows. The matrix $P(x)$ will be built up by multiplication out of "elementary" matrices $E(x), F$:

$$(*) \qquad E = I + E_{kl}(x) \qquad (k \neq l)$$

where E_{kl} has all elements equal to zero but one element in the k-th row and l-th column which is any polynomial $p_{kl}(x)$, $k \neq l$. Obviously $\det E \equiv 1$. F stands for any permutation matrix

$$F = (\pm e_{j_1}, \pm e_{j_2}, \ldots, \pm e_{j_n})$$

where e_l is the l-th unit vector and $j_1, \ldots, j_n$ is a permutation of $1, 2, \ldots, n$. The signs $\pm$ are arbitrary except for the condition $\det F = 1$. Thus F is independent of x.

Multiplying a matrix

$$T = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$$

with E from the right results in replacing t_l by $t_l + p_{kl}(x)\, t_k$ while multiplication with F from the right permuts the column vectors and changes the signs. Let P denote any product of several such matrices E and F. Obviously these matrices form a group all elements of which are matrices of polynomials with $\det P \equiv 1$.

To prove Lemma 1 we define the integers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ successively by the following maximal conditions: Let α_1 be the greatest integer such that $x^{-\alpha_1} T(x)$ is a power series. The constant term of $x^{-\alpha_1} T(x)$ then is a nonzero matrix and applying a matrix F we can assume that

$$T(x)\, F = \left(x^{\alpha_1} s_1(x),\ x^{\alpha_1} s_2(x), \ldots, x^{\alpha_1} s_n(x)\right)$$

where $s_l(x)$ are power series and $s_1(0) \neq 0$. Obviously α_1 remains unchanged if T is replaced by TP.

α_2 is chosen as the greatest integer under all choices of P such that the representation

$$T(x)\,P = \left(x^{\alpha_1} r_1(x),\ x^{\alpha_2} r_2(x),\ x^{\alpha_3} r_3(x), \ldots, x^{\alpha_n} r_n(x)\right)$$

holds where the $r_l(x)$ are power series. Obviously $\alpha_2 \geqq \alpha_1$. After having defined $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}$ we choose α_l to be the greatest integer for which a representation

$$T(x)\,P(x) = \left(x^{\alpha_1} q_1(x), \ldots, x^{\alpha_l} q_l(x),\ x^{\alpha_l} q_{l+1}(x), \ldots, x^{\alpha_l} q_n(x)\right) \tag{2.1}$$

holds. Again $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_l$ is an obvious consequence of the definition. The existence of α_l follows from the assumption that $\det\left(T(x)\,P(x)\right) = \det T(x) \not\equiv 0$, hence there is an integer γ with $T(x) = c\,x^{\gamma} + \cdots$, $c \neq 0$. The estimate $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots \alpha_{s-1} + (n - l + 1)\alpha_l \leqq \gamma$ guarantees the existence of a maximal α_l.

Now it follows by induction that in any maximal representation (2.1)

$$\operatorname{rank}\left(q_1(0), q_2(0), \ldots, q_n(0)\right) \geqq l. \tag{2.2}$$

For $l = 1$ this is obvious. Assume this has been proven for $l - 1$. If necessary one can achieve then that $q_1(0), q_2(0), \ldots, q_{l-1}(0)$ are linearly independent vectors by applying a permutation matrix F to (2.1). If the statement (2.2) were wrong then

$$q_k(0) = \sum_{\lambda=1}^{l-1} c_{k\lambda}\, q_\lambda(0) \quad \text{for} \quad k = l, \ldots, n.$$

Applying a product of matrices E we can achieve

$$q_k(0) = 0 \quad \text{for} \quad k = l, \ldots, n$$

which implies that α_l can be increased. This contradiction proves (2.2). For $l = n$ we obtain

$$T\,P = \left(x^{\alpha_1} q_1(x), \ldots, x^{\alpha_n} q_n(x)\right) = Q(x)\,x^{\alpha}$$

where

$$Q(x) = \left(q_1(x), \ldots, q_n(x)\right), \qquad x^{\alpha} = \operatorname{diag}\left(x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n}\right)$$

is a power series with

$$\det Q(0) \neq 0.$$

Thus

$$T = Q(x)\,x^{\alpha}\,P^{-1}$$

and since P^{-1} also is a polynomial with $\det P \equiv 1$ Lemma 1 is proven in the form of remark 2. Applying the argument to the transposed of T one obtains the statement of the Lemma 1.

The representation of the Lemma 1 is not unique, the numbers $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, however, depend on T only. For, assume that there is a second representation

$$T = \hat{P}\, x^{\beta}\, \hat{Q} = P\, x^{\alpha}\, Q.$$

Then, from the maximal choice of the α it follows

$$\beta_k \leqq \alpha_k.$$

and from

$$\det T = \det \hat{Q}(0)\, x^{\Sigma \beta_k} + \cdots = \det Q(0)\, x^{\Sigma \alpha_k} + \cdots$$

one has

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

These two relations imply $\beta_k = \alpha_k$.

One can give an independent description for the α_k: Consider any subdeterminant Δ of order l of T and let

$$\Delta = c\, x^{\gamma_l} + \cdots \qquad c \neq 0$$

be the expansion of Δ. Then

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_l = \operatorname{Min} \gamma_l$$

where the minimum is taken over all l by l subdeterminants of T. This defines the α_k. The proof of this statement follows immediately from Lemma 1.

For any matrix $T(x)$ of the type occurring we define the span $\sigma(T)$ by

$$\sigma(T) = \alpha_n - \alpha_1 = \operatorname*{Max}_{k,l} (\alpha_k - \alpha_l)$$

which is a non negative integer. The assumption $\sigma(T) = 0$, for example, amounts to

$$T(x) = x^{\alpha_1}\, Q(x); \qquad \det Q(0) \neq 0.$$

Any matrix T of span $\sigma > 0$ can be written as the product of σ matrices of span 1. For this purpose observe that x^{α} can be broken up into σ matrices of span 1 by constructing σ sequences $\beta^{(\nu)} = (\beta_k^{(\nu)})$ $(k = 1, \ldots, n;\ \nu = 1, \ldots, \sigma)$ with

$$\beta_k^{(\nu)} \leqq \beta_{k+1}^{(\nu)}; \qquad \beta_n^{(\nu)} - \beta_1^{(\nu)} = 1.$$

and

$$\sum_{\nu=1}^{\sigma} \beta_k^{(\nu)} = \alpha_k.$$

Defining

$$T_\nu = P\, x^{\beta^{(\nu)}}\, P^{-1} \quad \text{for} \quad \nu = 1, 2, \ldots, \sigma - 1$$

$$T_\sigma = P\, x^{\beta^{(\sigma)}}\, Q$$

one has

$$\sigma(T^{(\nu)}) = 1.$$

$$T = T_1\, T_2 \ldots T_\sigma.$$

For later reference we introduce the ring $R[x]$ of functions $f(x)$ which are analytic in some (individual) neighborhood $|x|<\varrho$. $R(x)$ denotes the corresponding field, generated by $R[x]$. The elements in $R(x)$ can be written in the form $x^\alpha f(x)$ where α is an integer and $f\in R[x]$, $f(0)\neq 0$. With $M[x]$, $M(x)$ we denote the ring of matrices whose elements lie in $R[x]$, $R(x)$ respectively. Thus $M[x]$, $M(x)$ formnon commutative rings with zero divisors. The unit elements in the ring $M[x]$, consist of those matrices $Q(x)$ for which $\det Q(0)\neq 0$.

Similarly let $R_0[x]$ denote the ring of polynomials of x and $R_0(x)$ the field generated by $R_0[x]$. If $M_0[x]$, $M_0(x)$ are the rings of matrices whose elements are in $R_0[x]$, $R_0(x)$ one can express Lemma 1 as follows: Every $T(x)\in M(x)$ can be written in the form $P(x)\,x^\alpha Q(x)$ where P is a unit in $M_0[x]$ and Q is a unit in $M[x]$. x^α has the same meaning as above.

LEMMA 2. *Let*

$$A(x)=A_0+xA_1+\cdots$$

belong to $M[x]$ *and satisfy* $r=r(A_0)>0$ (i.e. $A_0\neq 0$). *Let* $T(x)$ *be a matrix in* $M(x)$ *with* $\det T(x)\not\equiv 0$ *and define*

$$B(x)=T^{-1}A\,T.$$

A necessary and sufficient condition for the existence of such a $T(x)$ *that*

$$B(x)=B_0+xB_1+\cdots$$

belongs to $M[x]$ *and satisfies*

$$r(B_0)<r(A_0)$$

is that the polynomial

$$\mathfrak{P}(\lambda)=x^r\det\left(\lambda I+\frac{A(x)}{x}\right)\Big|_{x=0}$$

vanishes identically in λ.

PROOF. This condition is certainly necessary: If there exists such a $T(x)$ then

$$\det\left(\lambda I+\frac{A(x)}{x}\right)=\det\left(\lambda I+\frac{B(x)}{x}\right)=$$

$$=\det\left(\lambda I+\frac{B_0}{x}+B_1+\cdots\right).$$

The last determinant contains x^{-1} at most to the power $r(B_0)<r$, hence

$$x^r\det\left(\lambda I+\frac{A(x)}{x}\right)$$

vanishes identically in λ for $x=0$.

To prove the converse we make use of the theory of invariants of matrices under similarity transformations [4]).

[4]) The following proof is a slight modification of an argument for which I am indebted to Professor A. A. ALBERT.

Let $$f(\lambda, x) = \det(\lambda I + A(x))$$ be the characteristic polynomial of $A(x)$. Then the condition $\mathfrak{P}(\lambda) \equiv 0$ is tantamount to $$x^{n-r+1} | f(\lambda x, x)$$ i.e. to the assumption that $x^{-n+r-1} f(\lambda x, x)$ is a power series in x. This follows immediately from the equation

$$x^{-n+r-1} f(\lambda x, x) = x^{r-1} \det\left(\lambda I + \frac{A(x)}{x}\right).$$

Denote by s the largest integer for which $x^s | f(\lambda x, x)$. Then $n - r < s \leqq n$. We will prove the converse of Lemma 2 in the stronger version, that the rank of B_0 satisfies

$$r(B_0) \leqq n - s; \tag{2.2*}$$

which implies $r(B_0) < r(A_0)$.

To prove this statement we make use of the fact that a matrix $C = C(x)$ in $M(x)$ is similar to $A(x)$ if and only if it has the same elementary divisors $f_j(\lambda, x)$ as $A(x)$. The $f_j(\lambda, x)$ are polynomials in λ with coefficients in the field $R(x)$ which satisfy

$$f(\lambda, x) = \prod_{j=1}^{\infty} f_j(\lambda, x). \tag{2.3}$$

Since the highest coefficient of $f_j(\lambda, x)$ is one and concludes from Gauss' Lemma that the coefficients of $f_i(\lambda, x)$ lie in the ring $R[x]$.

Corresponding to the factorization of $f(\lambda, x)$ one can decompose the n dimensional vector space into n_j dimensional subspaces $\left(n = \sum_{j=1}^{\infty} n_j\right)$ which are invariant under A. In the invariant subspaces A is given by matrices A_j with respect to an appropriate basis and

$$f_j(\lambda, x) = \det(\lambda I_{n_j} + A_j).$$

Let s_j be the largest integer satisfying $x^{s_j} | f_j(\lambda x, x)$ then it follows from (2.3) that $\sum_{j=1}^{\infty} s_j = s$.

Assuming that the statement (2.2*) has been proven for the indecomposable matrices A_j[5]), namely that they are similar to $B_j(x)$ in $M[x]$ with $r(B_j(0)) \leqq n_j - s_j$ it follows that the matrix $B(x)$, which is composed of the $B_j(x)$, satisfies

$$r(B(0)) = \sum_{j=1}^{\infty} r(B_j(0)) \leqq \sum_{j=1}^{\infty} (n_j - s_j) = n - s.$$

Therefore it suffices to prove the statement (2.2*) for indecomposable matrices $A(x)$. Then

$$f(\lambda, x) = \lambda^n + a_n(x)\lambda^{n-1} + \cdots + a_1(x) \tag{2.4}$$

[5]) For the concepts used here compare [5], Chap. IV.

is the minimal polynomial and the condition $x^s | f(\lambda x, x)$ ensures that

$$b_1(x) = \frac{a_1}{x^s}, \quad b_2 = \frac{a_2}{x^{s-1}}, \ldots, b_s = \frac{a_s}{x}, \quad b_{s+1} = a_{s+1}, \ldots, a_n = b_n.$$

are power series in $R[x]$. Any indecomposable matrix $A(x)$ satisfying (2.4) is similar to the so-called companion matrix $C(x)$ of $f(\lambda, x)$ which contains ones in the diagonal above the main diagonal and has as last row the elements

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1 x^s, b_2 x^{s-1}, \ldots, b_s x, b_{s+1}, \ldots, b_n).$$

All other elements of C are 0.

Defining the diagonal matrix

$$D(x) = (x^{-s}, x^{-s+1}, \ldots, x^{-1}, 1, \ldots, 1)$$

and

$$D^{-1} C D = B(x)$$

it is easily seen that $B(x)$ belongs to $M[x]$ and that the first s rows of $B(0)$ are zero rows, hence

$$r(B(0)) \leqq n - s$$

which proves the statement (2.2*) and the Lemma 2.

LEMMA 3. *Let $A(x)$ satisfy the assumption of Lemma 2 and assume*

$$\mathfrak{P}(\lambda) \equiv 0.$$

Then there exists a transformation $T(x)$ (as in Lemma 2) for which

$$T^{-1} A T = B(x) \varepsilon M[x] \; r(B(0)) < r(A(0))$$

for which

$$\sigma(T) = 1.$$

PROOF. a) For the proof it suffices to assume that $A(0)$ is nilpotent. Otherwise $A(0)$ has a nonzero eigenvalue $a \neq 0$ and with a constant similarity one can achieve that $A(0)$ is a triangular matrix and $a_{11} = a \neq 0$. Let $\hat{A}$ be the $(n-1)$ by $(n-1)$ matrix which is obtained from $A(x)$ by cancelling the first row and column. It is easily seen that

$$\mathfrak{P}(\lambda) = x^r \det\left(\lambda I + \frac{A(x)}{x}\Big|_{x=0}\right) = a\, \hat{\mathfrak{P}}(\lambda)$$

where

$$\hat{\mathfrak{P}}(\lambda) = x^{r-1} \det\left(\lambda I + \frac{\hat{A}(x)}{x}\Big|_{x=0}\right.$$

and thus $\hat{A}$ satisfies the same hypothes as A does. If the statement can be proven for all matrices with $< n$ rows and columns it follows for n by n matrices provided there is a nonzero eigenvalue of $A(0)$. This reduces the proof to nilpotent $A(0)$.

b) By Lemma 2 there exists some $T(x)\varepsilon M(x)$ which diminishes the rank of the constant term. Representing $T(x)$ in the form

$$T(x) = P(x)\, x^{\alpha} Q(x)$$

according to Lemma 1 we define

$$\hat{A} = P^{-1} A\, P, \qquad \hat{B} = Q\, B\, Q^{-1}$$

so that

$$x^{-\alpha} \hat{A}\, x^{\alpha} = \hat{B}.$$

Since

$$r\left(\hat{A}(0)\right) = r\left(A(0)\right); \qquad r\left(\hat{B}(0)\right) = r\left(B(0)\right)$$

we can assume $T(x) = x^{\alpha}$, where

$$\alpha = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n.$$

Furthermore, since $\mathfrak{P}(\lambda)$ depends on A_0, A_1 only we can assume $A_2 = A_3 = \cdots = 0$.

c) In the decomposition $P\, x^{\alpha} Q$ the factors P, Q are not uniquely determined since there are polynomials P_1, P_2 for which

$$P_1\, x^{\alpha} = x^{\alpha} P_2$$

for instance, for all P_1 which are upper triangular matrices $x^{-\alpha} P_1 x^{\alpha}$ are polynomials in x again.

This freedom in P, Q can be used to achieve that the nonzero column ctors of $A(0)$ are linearly independent. Thus if $A(0)$ is decomposed into several matrices with n rows:

$$A(0) = (\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_r)$$

the rank is additive

$$r\left(A(0)\right) = \sum_{\nu=1}^{r} r\left(\tilde{A}_{\nu}\right).$$

To achieve this aim, we write

$$A(0) = (a_{kl})$$

and notice that

$$a_{kl} = 0 \quad \text{for} \quad \alpha_k > \alpha_l,$$

since otherwise $x^{-\alpha} A\, x^{\alpha}$ would have a singularity at 0. We represent $A(0)$ by blocks of matrices by combining the a_{kl} with $\alpha_k = \alpha$, $\alpha_l = \alpha'$ to $A_{\alpha\alpha'}$ so that

$$A(0) = (A_{\alpha\alpha'})$$

where α, α' runs over certain integers. The above condition amounts to

$$A_{\alpha\alpha'} = 0 \quad \text{for} \quad \alpha > \alpha'.$$

The diagonal matrices $A_{\alpha\alpha}$, of course, are nilpotent since $A(0)$ is. By a constant transformation

$$T_0 = (T_{0\alpha\alpha'})$$

which is a diagonal matrix in this block representation ($T_{\alpha\alpha'}=0$ for $\alpha\neq\alpha'$) one can achieve that $A_{\alpha\alpha}$ are in upper triangular normal form. Thus $A(0)=(a_{kl})$ are upper triangular with zero diagonal elements.

Now we achieve that the column vectors of $A(0)$ are replaced by 0 vectors and r independent vectors. For this purpose let a_l denote the column vectors of $A(0)$;

$$A(0)=(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Let $a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}$ consist of zero and independent vectors already and assume a_l is dependent on $a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}$

$$a_l=\sum_{\lambda<l} c_\lambda a_\lambda.$$

Let C denote the constant matrix which is obtained from the unit matrix by replacing the lth column by

$$\begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ \vdots \\ -c_{l-1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Then

$$A(0)\,C=(a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, 0, a_{l+1}, \ldots, a_n).$$

Since $C^{-1}A(0)C$ is obtained from $A(0)C$ by adding the lth row to the λth ($\lambda<l$) the first l columns are not affected by this procedure since $A(0)C$ like $A(0)$ is upper triangular with zero diagonal elements. Also since

$$x^{-\alpha}C\,x^{\alpha}=C_1(x)$$

is a polynomial with $\det C_1(x)\equiv 1$ (hence a unit in the polynomial ring) we have

$$x^{-\alpha}(C^{-1}A\,C)\,x^{\alpha}=C_1^{-1}BC_1=\hat{B}$$
$$r\big(C^{-1}A(0)\,C\big)=r\big(A(0)\big)$$
$$r\big(\hat{B}(0)\big)=r\big(B(0)\big).$$

Thus we can assume that A is replaced by $C^{-1}AC$ in the above statement.

Thus we can assume that the rank is additive with respect to a decomposition of $A(0)$ into several column matrices.

d) For the sake of simplicity we first carry out the proof of Lemma 3 in case

$$\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n.$$

The general case will be a generalization of this idea.

By a), b), c) we can assume

$$A = A_0 + xA_1$$

A_0 consists of 0 and independent column vectors

A_0 is upper triangular.

Since

$$B = x^{-\alpha} A\, x^{\alpha}$$

$$B_{kl} = x^{-\alpha_k + \alpha_l} A_{kl}(x)$$

the elements of $B(0)$ are zero except if $-\alpha_k + \alpha_l = -1$. Thus with

$$B(0) = (b_{kl})$$

one has

$$b_{kl} = 0 \quad \text{for} \quad \alpha_k \neq \alpha_l + 1$$

in particular,

$$b_{kl} = 0 \quad \text{for} \quad k \neq l + 1.$$

The α_k form an increasing sequence of integers. We construct all those sequences $\beta_k^{(\nu)}$ for which $\beta_n^{(\nu)} - \beta_1^{(\nu)} = 1$ which have the jump from $k = \nu - 1$ to $k = \nu$ $(\nu = 2, \ldots, n)$. Introducing

$$\beta^{(\nu)} = \operatorname{diag}(\beta_1^{(\nu)}, \beta_2^{(\nu)}, \ldots, \beta_n^{(\nu)}) \qquad (\nu = 2, \ldots, n)$$

we form the matrices

$$x^{-\beta^{(\nu)}} A(x)\, x^{\beta^{(\nu)}} = C^{(\nu)}(x)$$

and claim that

(*) $$r(C^{(\nu)}(0) < r(A_0))$$

for some ν. Counterexamples show that in general this inequality is not true for all ν.

To prove this statement notice that $\beta_k^{(\nu)} - \beta_l^{(\nu)} > 0$ implies $\alpha_k - \alpha_l > 0$. Therefore $C^{(\nu)}(x)$ has no negative powers of x and the matrix $C^{(\nu)}(0)$ has the form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a_{12} \cdots & a_{1,\nu-1} & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & a_{\nu-2,\nu-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \\ \hline & b_{\nu,\nu-1} & & 0\ a_{\nu,\nu+1} \\ & & & \ddots \\ & & & a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{array}\right)$$

Hence the rank of $C^{(\nu)}(0)$ is at most

$$r(a_1, a_2, \ldots a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \ldots, a_n) + r(b'_\nu)$$

where b'_ν stands for the νth row of $B(0)$. Since the rank is additive for A_0 it follows

$$r(C^{(\nu)}) \leqq r(A_0) - r(a_\nu) + r(b_\nu).$$

Adding over all ν one obtains

$$\sum_{\nu=2}^{n} r(C^{(\nu)}) \leqq (n-1)\, r(A_0) - r(A_0) + r\big(B(0)\big).$$

The assumption $r(A_0) > r\big(B(0)\big)$ leads to

$$\frac{1}{n-1} \sum_{\nu=2}^{n} r(C^{(\nu)}) < r(A_0)$$

which proves the statement (*).

e) A similar argument as in d) can be applied in the general case

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_n.$$

In this case, however, one first has to achieve that $B(0)$ has the additive rank property with respect to the rows and simultaneously $A(0)$ with respect to the columns. Here we refer to rows and columns in the block representation determined by indices k with equal α_k. In other words: Let

$$A_0 = (A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(N)})$$

be a decomposition of A_0 into N matrices of consecutive columns in such a manner that $\alpha_k \neq \alpha_{k'}$ if k, k' are the column numbers belonging to different matrices $A^{(K)}$. Then

$$r(A_0) = \sum_{K=1}^{N} r(A^{(K)}).$$

A similar property can be achieved simultaneously with respect to the *rows* of $B(0)$.

To prove this statement we can assume $A(0)$ to be an upper triangular matrix consisting of r independent column vectors and $n-r$ zero columns. Writing $A(0)$ in the block representation

$$A(0) = (A_{\alpha\alpha'}), \qquad B(0) = (B_{\alpha\alpha'})$$

where α, α' runs over the integers which are assumed by $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ one has in particular, $A_{\alpha\alpha'} = 0$ for $\alpha > \alpha'$. Breaking up $A(0)$ into column matrices

$$A_{\alpha'} = (A_{\alpha\alpha'})$$

one obviously has

(**) $$r\big(A(0)\big) = \sum_{\alpha'} r(A_{\alpha'}).$$

In order to achieve the corresponding property with respect to the rows of $B(0)$ we apply a constant matrix

$$C = (C_{\alpha\alpha'}) \qquad (C_{\alpha\alpha'} = 0 \text{ if } \alpha \neq \alpha')$$

(diagonal in block representation) so that $A_{\alpha\alpha}=B_{\alpha\alpha}$ and hence $B(0)$ become lower triangular matrices. Since C commutes with x^α one has

$$x^{-\alpha}(C^{-1}A\,C)\,x^\alpha = C^{-1}BC$$

and the matrix $C^{-1}A(0)C$ satisfies (**) since the rank of $A_{\alpha'}$ remains unchanged.

Applying the construction of c) we achieve that $B(0)$ consists of zero and linear independent row vectors. For this purpose we construct a constant matrix C_1 such that

$$C_1\,B(0)\,C_1^{-1}$$

consists of zero rows and linearly independent rows. C_1 has ones in the diagonal and zeros above the diagonal. Then $x^{-\alpha}A\,x^\alpha=B$ goes over into

$$x^{-\alpha}C_2A\,C_2^{-1}x^\alpha = C_1\,B\,C_1^{-1}$$

where

$$C_2(x) = x^\alpha C_1\,x^{-\alpha}$$

$C_2(x)$ is regular at $x=0$, since C_1 has zeros above the diagonal. Moreover $C_2(0)$ is nonsingular and $\det C_2(0)=1$. Actually $C_2(0)$ is diagonal in the block representation so that the condition (**) will be satisfied for $C_2A\,C_2^{-1}$ as for A. This shows that one can assume that A as well as B have the additive rank property with respect to their columns (A) and their rows (B) respectively.

f) Now the proof can be finished like in d). Let $\beta^{(\nu)}=\operatorname{diag}(\beta_1^{(\nu)},\beta_2^{(\nu)},\ldots,\beta_n^{(\nu)})$ $(\nu=2,\ldots,N)$, where $\beta_k^{(\nu)}$ are increasing sequences of 0 and 1 for which the jump occurs only at a jump of the given sequence α_k. Then $T=x^{\beta^{(\nu)}}$ have span 1. Introducing

$$x^{-\beta^{(\nu)}}A(x)\,x^{\beta^{(\nu)}} = C^{(\nu)}(x) \qquad (\nu=2,\ldots,N)$$

it can be shown that

$$r\left(C^{(\nu)}(0)\right) = r(A_0) - r(A^{(\nu)}) + r(B^{(\nu)})$$

where

$$A_0=(A^{(1)},A^{(2)},\ldots,A^{(N)}), \qquad B_0=\begin{pmatrix}B^{(1)}\\ \vdots\\ B^{(N)}\end{pmatrix}.$$

Adding these relations one finds

$$\frac{1}{N-1}\sum_{\nu=2}^{N} r\left(C^{(\nu)}(0)\right) < r(A_0)$$

hence

$$r\left(C^{(\nu)}(0)\right) < r(A_0)$$

for at least one ν. Since $x^{\beta^{(\nu)}}$ has span 1 the Lemma 3 is proven.

III. Proof of Theorem 1 and 2

a) Assume $A = x^{-p}(A_0 + xA_1 + \cdots)$ satisfies

$$\mathfrak{P}(\lambda) = x^r \det\left(\frac{A_0}{x} + A_1 + \lambda I\right)\Big|_{x=0} \equiv 0.$$

Then according to Lemma 3 there is a transformation

$$T(x) = T_0 + x T_1 + \cdots = T$$

with $\sigma(T) = 1$ such that

$$T^{-1} A T = B$$

and

$$m(A) > m(B).$$

Since $\sigma(T) = 1$ one can write T in the form $P x^{\alpha} Q$ with $\alpha_n - \alpha_1 = 1$. Hence

$$T^{-1}\frac{d}{dx} T = Q^{-1} x^{-\alpha} P^{-1}\frac{dP}{dx} x^{\alpha} Q + Q^{-1}\frac{\alpha}{x} Q + Q^{-1}\frac{dQ}{dx}$$

has at most a pole of order 1. Thus, if $p > 1$ (i.e. $m > 1$) then

$$m\left(T^{-1} A T - T^{-1}\frac{d}{dx} T\right) < m(A)$$

which proves the first part of the theorem.

b) If on the other hand there exists some $T(x)$ such that

$$T^{-1} A T - T^{-1}\frac{d}{dx} T = B$$

and

$$m(B) < m(A)$$

then one can represent T in the form

$$P x^{\alpha} Q.$$

Then with

$$P^{-1} A P - P^{-1}\frac{d}{dx} P = \hat{A}$$

$$Q B Q^{-1} + \left(\frac{d}{dx} Q\right) Q^{-1} = \hat{B}$$

one has

$$x^{-\alpha} \hat{A} x^{\alpha} - \frac{\alpha}{x} = \hat{B}$$

and

$$m(\hat{A}) = m(A); \qquad m(\hat{B}) = m(B)$$

since P, Q are regular at $x = 0$. Since we assumed $m(A) > 1$ it follows

$$m(\hat{A}) > m\left(\hat{B} + \frac{\alpha}{x}\right)$$

thus m can be diminished by a similarity transformation. This proves that

$$x^r \det(\lambda I + x^{(p-1)} \hat{A})|_{x=0} \equiv 0.$$

Since this expression depends on A_0, A_1 only and since $\hat{A} - P^{-1} A P = -P^{-1} \frac{d}{dx} P$ is a power series in x it follows that $\mathfrak{P}(\lambda) = x^r \det(\lambda I + x^{p-1} A)|_{x=0} \equiv 0$. In other words: If the number $m(A)$ is greater than 1 it can be diminished by similarity if and only if it can be diminished by the operation

$$T^{-1} A T - T^{-1} T'$$

The transformation T can always be chosen as to be of span 1. Moreover, representing T in the form $P x^a Q$ of Lemma 1 one observes that $Q(x)$ does not change $m(B)$ and therefore can be replaced by the identity. Finally it is obvious that only the first two terms of $P(x)$ enter in B_0, so that we can assume $T = (P_0 + P_1 x) x^a$. This completes the proof of theorem 2.

In particular one notices that for symmetric matrices $A(x)$ only the reduced form can occur. Since for a symmetric matrix the rank agrees with the number of non zero eigenvalues one has

$$\mathfrak{P}(\lambda) = x^r \det\left(\lambda I + \frac{A_0}{x} + A_1\right)\Big|_{x=0} = a_1, \ldots, a_r \det(\lambda I + \hat{A})$$

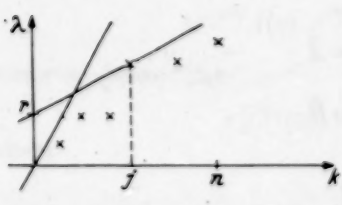
if $a_1, \ldots, a_r$ are the non zero eigenvalues of A_0. This expression is a polynomial of degree $n - r$.

IV. The case of a single differential equation

Consider a differential equation of n-th order

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \frac{du}{dx} + a_n(x)\, u = 0$$

for which the coefficients $a_k(x)$ have at most a pole at zero. Let $\lambda_k \geqq 0$ denote the order of the pole of a_k. ($\lambda_k = 0$ if a_k is regular).



We now construct p, r as the smallest integers (p, r) ordered lexicographically such that

$$\lambda_k \leqq k(p-1) + r.$$

This can be visualized graphically if one plots the λ_k as ordinates over the abscissa k and then first constructs the straight line through 0 with the smallest integer slope p which stays above all λ_k. Then one finds among all the parallel lines of slope $p - 1$ the lowest one. The section which is cut off on the λ-axis is r, which is an integer. That r is an integer follows from the formula

$$r = \operatorname{Max}_k (\lambda_k - (p-1)\, k).$$

Defining

$$\gamma_k = \operatorname{Min}(p\, k, (p-1)\, k + r)$$

we have

$$\lambda_k \leqq \gamma_k$$

and equality for at least one $k \geqq r$. Let $j \geqq r$ be the smallest integer with

$$\lambda_j = \gamma_j .$$

Geometrically γ_k represents the broken line dominating λ_k.

Now it is easy to construct an irreducible system of differential equations which is equivalent to (E). For this purpose introduce the vector y with the components

$$y_{k+1} = x^{-\gamma_{n-k}} \frac{d^k u}{d x^k} \quad (k = 0, \ldots, n-1).$$

Then for $k = 0, \ldots, n-2$

$$\frac{d y_{k+1}}{d x} = x^{-\gamma_{n-k} + \gamma_{n-k-1}} y_{k+2} - \frac{\gamma_{n-k}}{x} y_{k+1}$$

$$\frac{d y_n}{d x} = - \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} x^{-\gamma_1 + \gamma_{n-k}} y_{k+1} - \frac{\gamma_1}{x} y_n .$$

Therefore, introducing

$$\gamma = \operatorname{diag}(\gamma_n, \ldots, \gamma_1)$$

and

$$K(x) = \left(\begin{array}{cccc|cc} \multicolumn{4}{c|}{\overbrace{\hphantom{0 \quad x \quad \ddots \quad x}}^{n-r+1}} & & \\ 0 & x & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & x & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 1 \\ b_n, & b_j & \ldots & b_r & b_{r-1} & b_1 \end{array} \right)$$

where the b_k are the regular functions

$$b_k(x) = - a_k(x)\, x^{\gamma_k} \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

we have

$$\frac{d y}{d x} = \left(x^{-p} K(x) - \frac{\gamma}{x} \right) y \text{ [6]}.$$

It has to be shown that for

$$A(x) = x^{-p} K(x) - \frac{\gamma}{x}$$

the polynomial $\mathfrak{P}(\lambda)$ does not vanish identically, if $p > 1$. It is obvious that

$$x^p A(x)|_{x=0} = A_0 = K(0)$$

has rank r, since $r-1$ rows of $K(0)$ contains ones and since

$$b_j(x) = - a_j(x)\, x^{\gamma_j} = - a_j(x)\, x^{\lambda_j} \qquad (j \geqq r)$$

[6]) Use $\gamma_1 = \operatorname{Min}\{p, p-1+r\} = p$.

does not vanish at $x=0$. If one considers the determinant

$$\mathfrak{P}(\lambda) = x^r \det\left(\lambda I + \frac{1}{x} K(x) - \gamma x^{p-2}\right)\Big|_{x=0}$$

one computes easily the highest coefficient to be

$$\mathfrak{P}(\lambda) = \lambda^{n-j} b_j(0) + \cdots$$

where $j \geqq r$ was defined above. Hence the degree of $\mathfrak{P}(\lambda)$ is $\leqq n-r$ and $\mathfrak{P}(\lambda) \not\equiv 0$. This proves that the above system is not reducible, hence μ is given by

$$\mu = p - 1 + \frac{r}{n} \quad \text{if } p > 1$$

where p, r were defined by the above diagram.

Necessary and sufficient for a regular singularity is that $p=1$ or $\mu \leqq 1$ which is the principal result of Fuchs theory. The above result can be considered a generalization of Fuchs' theorem.

References

[1] HORN, J.: Zur Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen, II. Math. Annalen **40**, 527–550 (1892). — [2] BIRKHOFF, G. D.: Equivalent singularities of ordinary linear differential equations. Math. Ann. **74**, 134–139 (1913). — [3] BIEBERBACH, L.: Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Berlin: Springer 1953; esp. § 6. — [4] CODDINGTON, E. A., and N. LEVINSON: Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw-Hill 1955; Chap. 4 and 5. — [5] ALBERT, A. A.: Modern Algebra. Chicago 1937, 1958; in particular Chap. IV. — [6] LOEWY, A.: Über Matrizen- und Differentialkomplexe, I, II, III. Math. Ann. **78**, 1–51, 343–358, 359–369 (1918). — [7] PERRON, O.: Über diejenigen Integrale linearer Differentialgleichungen, welche sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten. Math. Ann. **70**, 1–32 (1911).

Dept. of Math., Massachusetts Institute of Technology, Cambridge 39, Mass. (U.S.A.)

(Eingegangen am 2. Mai 1959)

GILLMAN, L., and C. W. KOHLS
Math. Zeitschr. 72, 399—409 (1960)

Convex and pseudoprime ideals in rings of continuous functions*)

By
LEONARD GILLMAN[1]) and CARL W. KOHLS

1. Introduction

A recent development in the study of the ring $C = C(X)$ of all continuous real-valued functions on the topological space X has been the investigation of its special properties as a lattice-ordered ring. The fact that the order structure of $C(X)$ is intimately related with its prime ideal structure was first recognized and exploited in [3]. The main results contained in [3] have been reproduced in [1]. The basic theorem is that every prime ideal P in C is absolutely convex (defined in 2.3 below) and that C/P is a totally ordered ring [1, 5.5].

In this paper, we shall present several theorems that disclose further connections between the two structures mentioned. The main results are Theorem 4.1 and Theorem 4.7. We proceed to indicate some of their content.

According to [1, 14B.2], an ideal in $C(X)$ is a z-ideal (2.7) if and only if it is an intersection of prime z-ideals. Now, every z-ideal is absolutely convex. Corresponding to the quoted result, we shall prove in Theorem 4.7 that an ideal is absolutely convex if and only if it is an intersection of "pseudoprime" absolutely convex ideals. As an application of this theorem, we obtain a new characterization of F-spaces (6.2).

In [1, 2.9] and [3, 2.20], the following properties are shown to be equivalent for a z-ideal I — (i): I contains a prime ideal; (ii): I is pseudoprime; (iii): the prime ideals containing I form a chain; (iv): C/I is a totally ordered ring; (v): I is prime. We shall prove in Theorem 4.1 that (i), (ii), and (iii) are equivalent for *arbitrary* I. Moreover, if (iv) is modified so as to refer to the smallest convex ideal containing I, and (v) to refer to the radical of I, then the resulting statements are also equivalent with (i), (ii), and (iii). Since a z-ideal is convex and coincides with its radical, the new result is a generalization of the earlier one.

Additional results include the construction of a pseudoprime ideal that is not convex (3.6) and one that is not primary (4.5), and the representation of an arbitrary ideal as an intersection of ideals each contained in just one maximal ideal (5.2).

In notation and terminology, we follow [1]; however, in order to make the paper reasonably self-contained, many of the required definitions will be

*) Presented to the American Mathematical Society, April 18, 1959.

1) Fellow of the John Simon Guggenheim Memorial Foundation. The authors wish to thank M. HENRIKSEN for some helpful comments.

repeated here. When deriving algebraic or order properties of $C(X)$, we make the tacit assumption that the space X is completely regular; this involves no loss of generality [*1*, 3.9]. For some results about prime ideals not contained in [*1*], consult [*3*] and [*4*].

2. Convex and absolutely convex ideals

2.1. Let A be a partially ordered commutative ring. An ideal I in A is *convex* if $0 \leqq a \leqq b$ and $b \in I$ implies $a \in I$. Convexity is the necessary and sufficient condition that A/I be partially ordered, under the definition: $I(a) \geqq 0$ provided that $I(a) = I(x)$ for some $x \geqq 0$ [*1*, 5.2]. It is this induced order that will always be understood in references to partially ordered residue class rings.

2.2. It is obvious from the above definition that a canonical homomorphism with convex kernel preserves order. From this, it follows that the total preimage of a convex ideal is convex. Conversely, the image of a convex ideal containing the kernel is convex [*1*, 14.3(b)]. Hence we have:

PROPOSITION. *If I is a convex ideal in a partially ordered ring A, then the correspondence $J \to J/I$ is one-one between the convex ideals of A that contain I and the convex ideals in A/I.*

2.3. Throughout the rest of this section, we assume that A is not only partially ordered, but lattice-ordered. In this case, if I is convex, then $|a| \in I$ implies $a \in I$. Moreover, the stronger property of absolute convexity can be defined: I is *absolutely convex* if $|a| \leqq |b|$ and $b \in I$ implies $a \in I$. Clearly, absolute convexity implies convexity; in fact, I is absolutely convex if and only if I is convex and $a \in I$ implies $|a| \in I$ [*1*, 5.3]. Absolute convexity is the necessary and sufficient condition that the canonical homomorphism of A onto A/I be a lattice homomorphism [*1*, 5.3].

2.4. It is evident that arbitrary intersections of [absolutely] convex ideals are [absolutely] convex. Hence, for each ideal I, we can define

$$\mathrm{c}(I) = \textit{smallest convex ideal containing } I,$$

and

$$\mathrm{ac}(I) = \textit{smallest absolutely convex ideal containing } I.$$

(These ideals may be improper.)

2.5. For any ideal I in a lattice-ordered ring A, we have

$$\mathrm{c}(I) = \{a \in A\colon\ b_1 \leqq a \leqq b_2 \textit{ for some } b_1, b_2 \in I\}.$$

To see this, suppose that a belongs to J, the set in question, and $s \in A$; then $(s \vee 0)a \leqq J$ and $(s \wedge 0)a \in J$, whence $sa \in J$. The rest of the proof is routine.

In case the formula $|ab| = |a| \cdot |b|$ holds in A, then

$$\mathrm{ac}(I) = \{a \in A\colon\ |a| \leqq \textstyle\sum |b_i| \textit{ for some } b_1, \ldots, b_n \in I\}.$$

The proof is straightforward.

2.6. Clearly, the union of any *chain* of [absolutely] convex ideals is [absolutely] convex. Moreover, the sum of any two absolutely convex ideals is absolutely convex — but the corresponding proposition for *convex* ideals is false; the details follow.

PROPOSITION. *The sum of any two absolutely convex ideals in a lattice-ordered ring is absolutely convex*[2]).

It follows from this result, of course, that an arbitrary sum of absolutely convex ideals is absolutely convex.

2.7. An ideal I in $C(X)$ is a *z-ideal* if for all f, $\mathbf{Z}(f)\in\mathbf{Z}[I]$ implies $f\in I$. Clearly, intersections of z-ideals are z-ideals. Now, if $|f|\leqq|g|$, then $\mathbf{Z}(f)=\mathbf{Z}(fg)$; it follows that every z-ideal is absolutely convex. The sum of two z-ideals is a z-ideal [*1*, 14.8]; also, the sum of two prime ideals in $C(X)$ is prime [*1*, 14B.*1*]. We remark that, unlike the proof for absolutely convex ideals, the proofs of these last two assertions seem to depend strongly upon properties of rings of functions and properties of the Stone-Čech compactification βX.

2.8. EXAMPLE. *A convex ideal and a z-ideal in* $C(\mathbf{R})$ *whose sum is not convex.* The ideal $I=(\mathbf{i})$, where $\mathbf{i}(x)=x$, is convex [*1*, 5E.*2*]; and

$$J=\{f\in C(\mathbf{R}):\ f(x)=0 \text{ for all } x>0\}$$

is a z-ideal. Obviously, $|\mathbf{i}|\equiv\mathbf{i}\pmod J$, so that $|\mathbf{i}|\in(I,J)$. Consider the following function $g\in C(\mathbf{R})$:

$$g(x)=|x|\cdot|\sin 1/x| \quad \text{for} \quad x\neq 0, \qquad g(0)=0.$$

Evidently, $\mathbf{0}\leqq g\leqq|\mathbf{i}|$. Hence, if (I,J) were convex, we would have $g\in(I,J)$, and thus $g\equiv h\mathbf{i}\pmod J$ for some $h\in C(\mathbf{R})$. But then $h(x)=|\sin 1/x|$ for all $x>0$, whence h is not continuous at 0.

This example serves to illustrate that a homomorphic image of a convex ideal (not containing the kernel) need not be convex: under the canonical homomorphism of $C(\mathbf{R})$ onto $C(\mathbf{R})/J$, the image of the convex ideal $(\mathbf{i})$ is the same as that of the nonconvex ideal (I,J), and therefore is not convex (2.2).

2.9. If I is convex and $a\equiv|a|\pmod I$, then $I(a)\geqq 0$. In case I is absolutely convex, then, conversely, $I(a)\geqq 0$ implies $a\equiv|a|\pmod I$; indeed, this circumstance is characteristic of absolutely convex ideals [*1*, 5.3]. It leads to the following result.

2.10. PROPOSITION. *Let I be the intersection of a family of absolutely convex ideals I_α in a lattice-ordered ring A.*

(a) *$I(a)\geqq 0$ if and only if $I_\alpha(a)\geqq 0$ for every α.*

(b) *If the ideals I_α form a chain, and if A/I_α is totally ordered for every α, then A/I is totally ordered, and $I(a)>0$ if and only if $I_\alpha(a)>0$ for some α.*

PROOF. (a) This follows directly from the preceding remark.

(b) If A/I is not totally ordered, there exists a such that $a-|a|\notin I$ and $a+|a|\notin I$. Hence there exist α and α' such that $a-|a|\notin I_\alpha$ and $a+|a|\notin I_{\alpha'}$. Say $I_\alpha\subset I_{\alpha'}$. Then A/I_α is not totally ordered. The final statement in (b) follows from (a).

[2]) For a proof, see p. 222 of BIRKHOFF, Lattice Theory, New York, 1948.

3. Pseudoprime ideals

3.1. Let A be an arbitrary commutative ring (not necessarily ordered). We recall that an ideal P in A is *prime* provided that for $a, b \in A$, $ab \in P$ implies $a \in P$ or $b \in P$. Let us call an ideal I *pseudoprime* if for $a, b \in A$,

$$ab = 0 \quad \textit{implies} \quad a \in I \textit{ or } b \in I.$$

Trivially, all prime ideals are pseudoprime. Evidently, any ideal containing a pseudoprime ideal is pseudoprime. In particular, any ideal containing a prime ideal is pseudoprime.

3.2. We shall prove in 4.1 that the converse to this last statement holds in $C(X)$. However, the converse does not hold in general. For example, in the ring $\mathbf{Z}_8$ of integers modulo 8, the ideal J consisting of the classes $\bar{0}$ and $\bar{4}$ is pseudoprime, but it contains no prime ideal.

An obvious induction shows that if P is prime, then for any n, $a_1 a_2 \dots a_n \in P$ implies that some $a_k \in P$. It is of some interest to notice that the attempt at a corresponding induction for pseudoprime ideals breaks down at once. In the above example of $\mathbf{Z}_8$, for instance, $\bar{2} \cdot \bar{2} \cdot \bar{2} = \bar{0}$, but $\bar{2} \notin J$. In fact, we have the following result.

3.3. PROPOSITION. *An ideal I in a commutative ring contains a prime ideal if and only if, for every n,*

(A) $$a_1 a_2 \dots a_n = 0 \quad \textit{implies that some } a_k \in I.$$

PROOF. The necessity is clear. Conversely, if (A) holds, consider the set S of all products $b_1 b_2 \dots b_n$, for $b_k \notin I$. Then S is closed under multiplication, and, by (A), $0 \notin S$. It follows from the maximal principle that there exists a prime ideal disjoint from S, and hence contained in I (see, e.g., [1, 0.16]).

3.4. It is easily seen that the intersection of any chain of prime ideals is prime. Likewise, intersections of chains of pseudoprime ideals are pseudoprime.

3.5. Suppose, now, that A is a lattice-ordered ring and that the formula $a^2 = |a|^2$ holds in A, i.e.,

$$(a - |a|)(a + |a|) = 0$$

for all a. (In particular, $C(X)$ is such a ring.) If I is a pseudoprime ideal, then $a - |a| \in I$ or $a + |a| \in I$. Thus, every *convex* ideal J containing a pseudoprime ideal is pseudoprime and *absolutely* convex, and A/J is *totally* ordered.

It follows further that if a principal ideal (a) is an intersection of pseudoprime ideals, then $|a| \in (a)$; similarly, if $(|a|)$ is such an intersection, then $a \in (|a|)$.

3.6. We have remarked that every *prime* ideal in $C(X)$ is absolutely convex. It will now be shown that, in contrast, a pseudoprime ideal need not be convex. A consequence of this result is that the totally ordered valuation rings C/P (P a nonmaximal, prime z-ideal) studied in [3, § 3] are not representative of all rings of the form C/P.

THEOREM[3]). *If a point $p \in X$ is the limit of a sequence of distinct points, then there exists a prime ideal $P \subset \boldsymbol{M}_p$ such that*

(a) *for each $g \in \boldsymbol{M}_p - P$, the pseudoprime ideal (P, g) is nonconvex — or, equivalently,*

(b) *every nonzero principal ideal in $C(X)/P$ is nonconvex.*

PROOF. Define $S = \{s_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, where $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ is the postulated sequence converging to p. Express S as the union of disjoint infinite sets $A_k (k \in \mathbf{N})$. Let $\mathscr{F}$ denote the filter of all subsets of S that include all but a finite number of points of A_k for all but finitely many k. Let $\mathscr{U}$ be any ultrafilter containing $\mathscr{F}$. Then

(B) *If $U \in \mathscr{U}$, then $U \cap A_k$ is infinite for infinitely many k.*

Next, define

$$P = \{f \in C(X) : \boldsymbol{Z}(f) \cap S \in \mathscr{U}\}. \tag{C}$$

It is easily seen that P is a prime z-ideal in $C(X)$; and $P \subset \boldsymbol{M}_p$. (Cf. [4, 3.1 and 3.2] and [1, 4.12].)

Consider, now, any function $g \in \boldsymbol{M}_p - P$. Since $g \notin P$, and P is a z-ideal, we have $\boldsymbol{Z}(g) \cap S \notin \mathscr{U}$. Therefore

$$S - \boldsymbol{Z}(g) \in \mathscr{U}. \tag{D}$$

Now choose $f \in C(X)$ such that

$$f(s_n) = g(s_n)/k \quad \text{for} \quad s_n \in A_k. \tag{E}$$

(Define $f(p) = 0$, and extend from the compact set $S \cup \{p\}$. More generally, see [1, 3L.2].) Then $0 \leqq f(s_n) \leqq |g(s_n)|$, and so we may assume that $\mathbf{0} \leqq f \leqq |g|$. Consequently, if (P, g) were convex, and hence absolutely convex, we should have $f \in (P, g)$. We now prove that this is impossible.

If $f \in (P, g)$, then there exists $h \in C(X)$ such that $f \equiv hg \pmod{P}$, i.e.,

$$\{s_n : f(s_n) = h(s_n)\, g(s_n)\}$$

is a member of $\mathscr{U}$. Then by (D), the set

$$U = \{s_n \notin \boldsymbol{Z}(g) : f(s_n) = h(s_n)\, g(s_n)\}$$

belongs to $\mathscr{U}$. Consider any $k \in \mathbf{N}$. For $s_n \in U \cap A_k$, we have, from (E),

$$g(s_n) \neq 0, \quad \text{and} \quad g(s_n)/k = h(s_n)\, g(s_n),$$

whence $h(s_n) = 1/k$. Thus by (B), there exist distinct integers k_1 and k_2 such that h assumes each of the values $1/k_1$ and $1/k_2$ infinitely often on S. But then h cannot be continuous at p.

[3]) By [3, 3.4] (or [1, 14.24]), any ring C/P of the type exhibited in the theorem possesses an ideal that is finitely generated but not principal. We have shown that the ideals with a minimal basis of two elements are never convex either; but the proof is quite involved and will be omitted.

3.7. If, in the above construction, we express each A_k as a union of disjoint infinite sets $A_{k,n}$ $(n \in \mathbf{N})$, and define $B_n = \bigcup_k A_{k,n}$, then each B_n meets every member of $\mathscr{F}$, so that $\mathscr{F} \cup \{B_n\}$ is contained in some ultrafilter; since the sets B_n $(n \in \mathbf{N})$ are disjoint, the ultrafilters are distinct for distinct n. Thus, $\mathscr{F}$ is contained in infinitely many ultrafilters. It follows that $\mathscr{F}$ is contained in $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafilters (see, e.g., [*1*, 9H.*2*]). Now, in many special cases, the correspondence $\mathscr{U} \to P$ defined by (C) is one-one [*1*, 14G, H, I]. Hence, in such cases, we can conclude that $\boldsymbol{M}_p$ contains $2^{\mathfrak{c}}$ prime ideals P satisfying the conclusions of the theorem.

4. The main results

4.1. We shall now show that the various concepts discussed so far are closely related in $C(X)$, indicating that $C(X)$ possesses a rather special structure as a lattice-ordered ring.

The radical of an ideal I is denoted by $\mathrm{R}(I)$:

$$\mathrm{R}(I) = \textit{intersection of all prime ideals containing } I.$$

THEOREM. *For any ideal I in $C(X)$, the following statements are equivalent.*

(1) *I contains a prime ideal.*

(2) *I is pseudoprime.*

(3) *For every convex ideal $J > I$, C/J is a totally ordered ring.*

(4) *$C/\mathrm{c}(I)$ is a totally ordered ring.*

(5) *The convex ideals containing I form a chain.*

(6) *The prime ideals containing I form a chain.*

(7) *$\mathrm{R}(I)$ is prime.*

(8) *$C/\mathrm{R}(I)$ is a totally ordered ring.*

PROOF. (1) *implies* (2). This was noted in 3.1.

(2) *implies* (3). This was noted in 3.5.

(3) *implies* (4). Trivial.

(4) *implies* (5). As in any totally ordered ring, the convex ideals in $C/\mathrm{c}(I)$, being symmetric intervals, form a chain. By 2.2, the convex ideals containing $\mathrm{c}(I)$ form a chain. But these latter are the same as the convex ideals containing I.

(5) *implies* (6). As already noted, every prime ideal in C is convex.

(6) *implies* (7). As already noted, the intersection of any chain of prime ideals is prime.

(7) *implies* (1). Let Q be a prime z-ideal contained in the prime ideal $\mathrm{R}(I)$ [*1*, 14.7]. We prove that $Q \subset I$. Let $f \in Q$. To show that $f \in I$, we may assume that $|f| \leqq \mathbf{1}$ [*1*, 2A]. Put

$$h = \sum_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{2}^{-n} |f|^{1/n} \tag{F}$$

Then h is defined as a continuous function (because of the uniform convergence), and, obviously, $\boldsymbol{Z}(h) = \boldsymbol{Z}(f)$. So h belongs to the z-ideal Q, and, therefore,

$h \in \mathrm{R}(I)$. As is well known, this means that $h^n \in I$ for some n. But we have

$$2^{-2n}|f|^{1/2^n} \leqq h,$$

so that

$$2^{-2n^2}|f|^{\frac{1}{n}} \leqq h^n. \tag{G}$$

By [*1*, 1 D.*3*], f is a multiple of h^n. Therefore $f \in I$.

This establishes the equivalence of propositions (1)–(7). Since $\mathrm{R}(I) = \mathrm{c}(\mathrm{R}(I)) = \mathrm{R}(\mathrm{R}(I))$, the equivalence of (4) with (7) yields their equivalence with (8).

4.2. A number of additional propositions may be deduced immediately from Theorem 4.1: (a) A pseudoprime ideal in C is prime if and only if it coincides with its radical. (b) If I is an intersection of prime ideals in C, then I is prime if and only if C/I is a totally ordered ring. (c) A convex ideal I in C is pseudoprime if and only if C/I is a totally ordered ring. (d) If I is a convex ideal in C, and C/I is a totally ordered ring, then C/I has a prime radical. (This last statement generalizes the result that (5) implies (4) in [*3*, 2.20].)

4.3. Since a convex pseudoprime ideal in $C(X)$ is absolutely convex, we get:

(H) *If I is a convex ideal in $C(X)$ such that C/I is a totally ordered ring, then I is absolutely convex*

— in other words, the canonical homomorphism of C onto a totally ordered ring is always a lattice homomorphism.

This need not hold in a general ring, as is shown by the example given in [*1*, 5 B.*4*]: A is the direct sum of $\mathbf{R}$ with itself, with

$$\{(x, y): 0 \leqq y \leqq x\}$$

as the set of elements $\geqq 0$, and $I = \{(0, y): y \in \mathbf{R}\}$; then I is convex but not absolutely convex, yet A/I is totally ordered.

From (H) and 2.10, we deduce that if $\{I_\alpha\}$ is a chain of convex ideals in C, with each C/I_α a totally ordered ring, then $C/\bigcap I_\alpha$ is a totally ordered ring. It does not seem easy to obtain this result directly, since the functions selected as in 2.1 are not known to be independent of α.

4.4. From the equivalence of (1) with (6), one can deduce various facts about the lattice of ideals in C. For instance, an ideal cannot be contained in precisely the prime ideals in one chain without also containing a prime ideal. This implies, in particular, that an ideal contained properly in a minimal prime ideal is contained in at least two noncomparable prime ideals.

4.5. Recall that an ideal Q in a commutative ring A is *primary* provided that for $a, b \in A$, $ab \in Q$ implies that $a \in Q$ or some power of b belongs to Q. It is a well known fact that the radical of a primary ideal is prime. Thus, by Theorem 4.1, every primary ideal in $C(X)$ is pseudoprime. In contrast, we have:

THEOREM. *Let $p \in X$, let P be a nonmaximal, prime z-ideal contained in $\boldsymbol{M}_p$, and let $f \in \boldsymbol{M}_p - P$; then the pseudoprime ideal (P, f) in $C(X)$ is not primary.*

PROOF. We begin with the following observation:

(I) $$\text{If } Z \in \boldsymbol{Z}[P], \text{ then } p \in \operatorname{cl}\big(Z - \boldsymbol{Z}(f)\big).$$

For if the conclusion is false, then there exists a zero-set-neighborhood V of p disjoint from $Z - \boldsymbol{Z}(f)$. Since P is prime, $V \in \boldsymbol{Z}[P]$ [*1*, 4I.4]. We then have $\boldsymbol{Z}(f) > V \cap Z \in \boldsymbol{Z}[P]$, whence f belongs to the z-ideal P, contrary to hypothesis.

In considering the ideal (P, f), we may assume, as before, that $|f| \leqq \mathbf{1}$ [*1*, 2A]. Define h by (F); then $\boldsymbol{Z}(h) = \boldsymbol{Z}(f)$. Since $f \in \boldsymbol{M}_p$, we have $f(p) = 0 = h(p)$. Next, define g as follows:

$$g(x) = f(x)/h(x) \quad \text{for } x \notin \boldsymbol{Z}(h),$$
$$g(x) = 0 \quad \text{for } x \in \boldsymbol{Z}(h).$$

From (G) (with $n = 1$), we see that $|g(x)| \leqq 4\,|f(x)|^{\frac{1}{2}}$ for each $x \in X$; this implies that g is continuous everywhere on X. Evidently, $gh = f \in (P, f)$. We prove that (P, f) is not primary by showing that $g \notin (P, f)$ and that $h^n \notin (P, f)$ $(n \in \mathbf{N})$.

If $g \in (P, f)$, then there exists $k \in C(X)$ such that $g \equiv kf \pmod{P}$, whence there exists $Z \in \boldsymbol{Z}[P]$ with $g(x) = k(x)\, f(x)$ for all $x \in Z$. For $x \in Z - \boldsymbol{Z}(f)$, then, $k(x)\, h(x) = 1$. By (I), $k(p)\, h(p) = 1$, contradicting $h(p) = 0$.

If $h^n \in (P, f)$, then, as above, there exists $l \in C(X)$ and $W \in \boldsymbol{Z}[P]$ such that for all $x \in W$, $h^n(x) = l(x)\, f(x)$; by (G), $l(x)\, f(x) \geqq 2^{-2n^2} |f(x)|^{\frac{1}{2}}$. For $x \in W - \boldsymbol{Z}(f)$ this becomes $|l(x)| \cdot |f(x)|^{\frac{1}{2}} \geqq 2^{-2n^2}$, yielding a contradiction as before.

4.6. On the other hand, there exist primary ideals in C (or in C/P) that are not prime. Let a be any positive non-unit in C/P (P a prime ideal in C), and consider the set

$$I = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \{b \in C/P\colon\ |b| < a^{1 - 1/n}\}.$$

It is easy to see that I is an ideal in C/P and that I is not prime. But I is primary. For, suppose that $bc \in I$, while $b \notin I$. Then $|b| \geqq a^{1 - 1/m}$ for some m. But for all n, we have $|bc| < a^{1 - 1/mn}$ and hence $|c| < a^{1/m - 1/mn}$. Therefore $c^m \in I$.

4.7. We have quoted (in § 1) the theorem that an ideal in $C(X)$ is a z-ideal if and only if it is an intersection of prime z-ideals. Now, we know that any intersection of (absolutely) convex pseudoprime ideals in $C(X)$ is absolutely convex. Thus, we are led to ask whether the converse to this last assertion s also true. That it is indeed true is the content of the next theorem[4]).

THEOREM. *An ideal I in $C(X)$ is absolutely convex if and only if it is an intersection of (absolutely) convex pseudoprime ideals.*

---

[4]) This and Corollary 4.8 can also be proved by combining 4.1 with Theorems 12 and 14 of BIRKHOFF and PIERCE: Lattice-ordered rings, An. Acad. Brasil. Ci. **28**, 41–69 (1956).

PROOF. We are to prove the necessity: given that I is absolutely convex, and given any $f \notin I$, we have to show that there exists a convex pseudoprime ideal containing I but not f. By the maximal principle, there exists an ideal P that is maximal in the class of absolutely convex ideals containing I but not f. We shall prove that P is pseudoprime. Suppose, on the contrary, that there exist $g \notin P$ and $h \notin P$ such that $gh = 0$. Then $f \in \operatorname{ac}((P,g))$ and $f \in \operatorname{ac}((P,h))$. By 2.5, there exist $p_i \in P$ and $s_i \in C$ such that

$$|f| \leqq \sum |p_i + s_i g|,$$

and there exist $q_j \in P$ and $t_j \in C$ such that

$$|f| \leqq \sum |q_j + t_j h|.$$

Now, for each $x \in X$, either $g(x) = 0$ or $h(x) = 0$. Consequently, for each $x \in X$,

$$|f(x)| \leqq \sum |p_i(x)| \quad \text{or} \quad |f(x)| \leqq \sum |q_j(x)|.$$

Therefore

$$|f| \leqq \sum |p_i| + \sum |q_j|.$$

Since P is absolutely convex, this implies $f \in P$, a contradiction.

4.8. From Theorem 4.1 (or from 3.5), we obtain:

COROLLARY. *If I is an absolutely convex ideal in $C(X)$, so that C/I is a lattice-homomorphic image of C, then C/I is a subdirect sum of totally ordered rings*[5]).

4.9. COROLLARY. *Let I be an absolutely convex ideal in $C(X)$, and let $f \notin I$. There exists a prime ideal Q such that $Q(|f|) > Q(g)$ for every $g \in I$.*

PROOF. By Theorem 4.7, there exists a pseudoprime ideal P containing I but not f; and by Theorem 4.1, P contains a prime ideal Q. The ideal (I, Q) is convex (2.6), and so its image modulo Q is an interval in the totally ordered ring C/Q (2.2). Since $f \notin (I, Q)$, $Q(f)$ lies outside this interval.

4.10. In connection with Theorem 4.1, we notice that not every ideal in $C(X)$ is an intersection of pseudoprime ideals. In fact, we have:

PROPOSITION. *Let A be a lattice-ordered ring in which the formula $a^2 = |a|^2$ holds. If an ideal I is an intersection of pseudoprime ideals, then $\mathrm{c}(I) = \mathrm{ac}(I)$.*

PROOF. Let $a \in \mathrm{c}(I)$, so that, by 2.5, $b \leqq a \leqq c$ for some $b, c \in I$. Then $b \vee 0 \leqq a \vee 0 \leqq c \vee 0$. From 3.5, it follows that $2(b \vee 0) = b + |b| \in I$, and, similarly, $2(c \vee 0) \in I$. Thus, by 2.5 again, we have $2(a \vee 0) \in \mathrm{c}(I)$, whence $|a| \in \mathrm{c}(I)$. Therefore $\mathrm{c}(I)$ is absolutely convex (2.3) and hence, by definition, coincides with $\mathrm{ac}(I)$.

In particular, a convex ideal that is not absolutely convex cannot be an intersection of pseudoprime ideals. (An example is the ideal (i) in $C(\mathbf{R})$ [*1*, 5E.*2*].)

[5]) When I is a z-ideal, the totally ordered summands can be chosen to be *integral domains* ([*1*, 2.8] and [*3*, 2.2]).

For $f \in C(X)$, we have $\operatorname{ac}(|f|) = \operatorname{c}(|f|)$, as follows directly from 2.3 and 2.5. Hence the above proposition leaves open the question of when $(|f|)$ can be an intersection of pseudoprime ideals. However, we can obtain a criterion from 3.5: it is necessary that $f \in (|f|)$; in other words, it is necessary that for each point $x \in \mathbf{Z}(f)$, there exist a neighborhood of x on which f does not change sign.

5. Ideals contained in a unique maximal ideal

5.1. According to [*1*, 7.13], an ideal I in $C(X)$ is contained in a unique maximal ideal $\boldsymbol{M}^p$ if and only if I contains $\boldsymbol{O}^p$. It follows that for any I, if $I \subset \boldsymbol{M}^p$, then $\boldsymbol{M}^p$ is the only maximal ideal containing $(I, \boldsymbol{O}^p)$; and if $I \not\subset \boldsymbol{M}^p$, then $(I, \boldsymbol{O}^p)$ is the entire ring $C(X)$.

Every prime ideal in $C(X)$ is contained in a unique maximal ideal; more generally, every pseudoprime ideal has this property, as follows from the proof of [*1*, 7.15] or from Theorem 4.1. Hence Theorem 4.7 implies that every absolutely convex ideal in C is an intersection of ideals contained in unique maximal ideals. We prove next that the same is true for an arbitrary ideal in $C(X)$.

5.2. THEOREM. *Every ideal I in $C(X)$ is an intersection of ideals each of which is contained in a unique maximal ideal; specifically,*

$$I = \bigcap_{p \in \beta X} (I, \boldsymbol{O}^p).$$

PROOF. Denote the intersection in question by I'. Obviously, $I' \supset I$. To show that $I' \subset I$, consider any $f \in I'$. We may assume that f is bounded [*1*, 2A]. For each $p \in \beta X$, there exists a bounded function $g_p \in I$ such that $f - g_p \in \boldsymbol{O}^p$. By definition of $\boldsymbol{O}^p$ [*1*, 7.12], the set $\operatorname{cl}_{\beta X} Z_{g_p}$, where $Z_{g_p} = \mathbf{Z}(f - g_p)$, is a neighborhood of p. Since βX is compact, it is covered by some finite collection

$$\{\operatorname{int} \operatorname{cl} Z_{g_{p_1}}, \ldots, \operatorname{int} \operatorname{cl} Z_{g_{p_n}}\}.$$

Let $\{h_i^\beta\}_{i \le n}$ be a partition of unity subordinate to this cover [*2*, 5W]. Since $f^\beta(p) = g_{p_i}^\beta(p)$ whenever $p \in \operatorname{int} \operatorname{cl} Z_{g_{p_i}}$, we have

$$f^\beta = \sum h_i^\beta g_{p_i}^\beta.$$

Therefore $f = \sum h_i g_{p_i}$, and so $f \in I$.

5.3. Theorem 4.7 shows, in fact, that every absolutely convex ideal is an intersection of *absolutely convex* ideals contained in unique maximal ideals. The same conclusion follows from 2.6 and Theorem 5.2.

6. *P*-spaces and *F*-spaces

6.1. The foregoing results lead to a new characterization of F-spaces, in further analogy with known results about P-spaces [*1*, 14.25 and 14.29]. We recall that the following statements are equivalent:

(P_1) *X is a P-space, i.e., every prime ideal in $C(X)$ is maximal.*

(P_2) *Every ideal in $C(X)$ is an intersection of prime ideals.*

(P_3) *Every principal ideal in $C(X)$ is an intersection of prime ideals.*

The equivalence of (P_1) with (P_2) is explicitly asserted in [1, 4J], and the equivalence of (P_1) and (P_2) with (P_3) is implicit.

Correspondingly, we have:

6.2. THEOREM. *The following statements are equivalent.*

(F_1) *X is an F-space, i.e., every Finitely generated ideal in $C(X)$ is principal.*

(F_2) *Every ideal in $C(X)$ is an intersection of pseudoprime ideals.*

(F_3) *Every principal ideal in $C(X)$ is an intersection of pseudoprime ideals.*

PROOF. (F_1) *implies* (F_2). We give two proofs. If X is an F-space, then every ideal in $C(X)$ is absolutely convex [1, 14.26]; hence the result follows from Theorem 4.7. Alternatively, if X is an F-space, then every ideal $\boldsymbol{O}^p$ is prime [1, 14.25], whence any ideal $(I, \boldsymbol{O}^p)$ is pseudoprime; the result now follows from Theorem 5.2.

(F_2) *implies* (F_3). Trivial.

(F_3) *implies* (F_1). This follows from 3.5 and the fact that if $|f| \in (f)$ for all f, then X is an F-space [1, 14.25].

Another equivalent formulation is that X is an F-space if and only if every ideal in $C(X)$ is an intersection of *convex* pseudoprime ideals.

References

[1] GILLMAN, L., and M. JERISON: Rings of Continuous Functions. Van Nostrand 1960. — [2] KELLEY, J. L.: General Topology. Van Nostrand 1955. — [3] KOHLS, C. W.: Prime ideals in rings of continuous functions. Illinois J. Math. **2**, 505—536 (1958). — [4] KOHLS, C. W.: Prime ideals in rings of continuous functions. II. Duke Math. J. **25**, 447—458 (1958).

Institute for Advanced Study and University of Illinois

(Eingegangen am 27. April 1959)

DEMBOWSKI, P.
Math. Zeitschr. 72, 410–438 (1960)

Freie und offene projektive Ebenen

Von
PETER DEMBOWSKI

Einleitung

Die freien projektiven Ebenen (Definition auf S. 416) sind 1943 von M. HALL eingeführt und – allerdings nur für den Fall endlicher Erzeugbarkeit – zuerst eingehend untersucht worden [2, § 4]. Später hat L. I. KOPEJKINA einige der Hallschen Sätze auf den allgemeinen Fall übertragen und für andere gezeigt, daß ihre Gültigkeit auf die endlich erzeugten freien projektiven Ebenen beschränkt ist [4]. Außerdem deckte KOPEJKINA eine auch schon von HALL bemerkte weitgehende Analogie zu den freien Gruppen auf; einige der hierher gehörigen Sätze von KOPEJKINA finden sich auch in einer leichter zugänglichen Arbeit von SKORNYAKOV [8, S. 10–17].

Den Ausgangspunkt für die vorliegende Untersuchung bildete die Frage nach dem Transitivitätsverhalten der Kollineationsgruppe einer freien projektiven Ebene. Nennt man zwei Elemente einer projektiven Ebene *konjugiert*, wenn sie durch Kollineationen aufeinander abbildbar sind, so läßt sich das Hauptresultat dieser Arbeit folgendermaßen aussprechen: *Jede freie projektive Ebene hat die Eigenschaften:*

(I) *Zu jedem Element gibt es unendlich viele Konjugierte.*

(II) *Es gibt unendlich viele Elemente, von denen keine zwei konjugiert sind.*

Dieses Ergebnis läßt sich in verschiedenen Richtungen verallgemeinern und verschärfen. Zunächst wird die Eigenschaft (I) nicht nur für die freien projektiven Ebenen bewiesen, sondern außerdem für eine Klasse von freien Ebenenerweiterungen (wir schließen uns hier wie auch im folgenden der Terminologie des Buches [7] von PICKERT an) hinreichend „homogener" unendlicher Inzidenzstrukturen (vgl. Lemma 2.1, S. 419 und Folgerung (b), S. 420). Natürlich ist die Klasse der projektiven Ebenen mit der Eigenschaft (I) damit nicht erschöpft, denn alle unendlichen desarguesschen projektiven Ebenen haben diese Eigenschaft ja auch.

Die Gültigkeit der Eigenschaft (II) ist ebenfalls nicht auf die freien projektiven Ebenen beschränkt; sie wird hier für die größere Klasse der offenen projektiven Ebenen (Definition S. 416) bewiesen, welche sich (Satz 1.2) auch durch die Eigenschaft charakterisieren lassen, daß in ihnen jede endliche Teilmenge eine freie Unterebene erzeugt, und die deshalb auch „lokal frei" genannt werden. Daß die freien projektiven Ebenen offen sind, hat HALL gezeigt [2, theorem 4.8]; die tieferliegende Tatsache der Existenz offener projektiver Ebenen, die nicht frei sind, wurde zuerst von KOPEJKINA bewiesen [4, § 5]. Die Gültigkeit von (II) für offene projektive Ebenen ist

nun insofern überraschend, als man zwei in einer freien projektiven Ebene nicht konjugierte Elemente oft durch Einbettung dieser Ebene in eine offene doch zu Konjugierten machen kann. [Das ergibt sich aus Satz 1.3, S. 418, den man aus einem tiefliegenden Satz von B. H. NEUMANN [6] gewinnen könnte, der hier aber aus einem anderen (in einem Anhang bewiesenen) Einbettungssatz gefolgert wird.] Es ist deshalb vermutet worden, es gäbe vielleicht offene projektive Ebenen mit transitiver Kollineationsgruppe; hier zeigt sich nun aber, daß (II) für offene projektive Ebenen auch dann noch richtig bleibt — gerade wegen dieser Einbettungsmöglichkeit —, wenn man die Definition des Konjugiertseins von der Abbildbarkeit durch Kollineationen der ganzen Ebene auf Abbildbarkeit durch Isomorphismen gewisser Unterebenen abschwächt (Näheres in 3.3).

Die freie Ebenenerweiterung einer aus unendlich vielen disjunkten unendlichen, paarweise nichtisomorphen desarguesschen projektiven Ebenen bestehenden Inzidenzstruktur hat nach Lemma 2.1 die Eigenschaften (I) und (II); diese Eigenschaften sind also auch zusammengenommen für die freien projektiven Ebenen nicht charakteristisch. Das oben formulierte Hauptresultat läßt sich aber nicht einmal auf die offenen projektiven Ebenen verallgemeinern: in 3.4 wird ein Beispiel einer offenen projektiven Ebene angegeben, die einen bei allen Kollineationen festbleibenden Punkt besitzt; diese Ebene kann natürlich nicht die Eigenschaft (I) haben. Auch die Frage, ob die freien wenigstens innerhalb der offenen projektiven Ebenen durch (I) und (II) charakterisiert sind, ist zu verneinen; das zeigt ein weiteres Beispiel in 3.5.

Die Abschnitte 2 und 3 enthalten mehrere abseits von der allgemeinen Fragestellung dieser Arbeit liegende Ergebnisse, die ein unabhängiges Interesse verdienen; hier sei nur die Existenz nicht endlich erzeugbarer Unterebenen von endlich erzeugten freien projektiven Ebenen erwähnt (Lemma 2.3), ein neues Beispiel für die schon erwähnte enge Analogie zwischen freien projektiven Ebenen und freien Gruppen (vgl. hierzu etwa KUROSCH [5, S. 274]).

BEZEICHNUNGEN

Ebene bedeutet immer *projektive Ebene* (Definition [7, S. 7]). Gelegentlich wird der Deutlichkeit halber von *nichtausgearteten* Ebenen gesprochen werden; die von HALL [2, S. 232] "degenerate planes" genannten Strukturen werden als *ausgeartete Ebenen* bezeichnet (vgl. [7, S. 13]).

Die *Elemente* einer Ebene sind ihre Punkte und ihre Geraden, sie werden durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet. Es wird fast nie darauf ankommen, ob ein willkürlich ausgewähltes Element einer Ebene ein Punkt oder eine Gerade ist; aber durch die Angabe, daß die Elemente x und y *inzident* sind (bezeichnet durch $x\,\mathrm{I}\,y$ oder $y\,\mathrm{I}\,x$) wird natürlich ihre Verschiedenartigkeit ausgedrückt. Auch sonst wird die Gleich- oder Verschiedenartigkeit zweier Elemente manchmal ausdrücklich festgestellt werden.

Sind x und y zwei verschiedene, aber gleichartige Elemente, so bezeichnet $xy = yx$ das eindeutig bestimmte mit ihnen beiden inzidente andersartige Element, d.h. ihren Schnittpunkt oder ihre Verbindungsgerade.

Mengen von Elementen einer Ebene werden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, projektive Ebenen selbst i.a. durch den Buchstaben E. Eine Menge von vier zu je dreien nichtkollinearen Punkten heißt ein *Viereck*, Bezeichnung meist durch den Buchstaben Q. Die Mächtigkeit einer Menge X wird mit $|X|$ bezeichnet.

Von einem *Homomorphismus* einer Ebene E auf eine andere E' wird nur Erhaltung der Inzidenzen, nicht Erhaltung von Punkten und Geraden gefordert. In Analogie zum üblichen algebraischen Sprachgebrauch nennen wir einen Homomorphismus *Endomorphismus*, wenn $E' \subseteq E$, insbesondere *Epimorphismus*, wenn $E' = E$ ist, *Isomorphismus*, wenn er umkehrbar eindeutig ist, und ein *Monomorphismus* ist gleichzeitig Endomorphismus und Isomorphismus, ein *Automorphismus* gleichzeitig Epimorphismus und Monomorphismus. Die Automorphismengruppe einer Ebene besteht aus deren Kollineationen und Korrelationen und ist genau dann gleich der Kollineationsgruppe, wenn die Ebene nicht selbstdual ist; im allgemeinen ist die Kollineationsgruppe in der Automorphismengruppe ein Normalteiler vom Index zwei.

Kleine griechische Buchstaben bezeichnen Abbildungen, meist Automorphismen von Ebenen. Mengen (meist Gruppen) solcher Abbildungen werden durch große griechische Buchstaben bezeichnet. Wir schreiben die Abbildungen als Rechtsmultiplikatoren, $x\pi$ bedeutet also das Bildelement von x unter der Abbildung π, und $x\Pi$ ist die Menge aller $x\pi$ mit $\pi \in \Pi$. Ist Π eine Gruppe, so ist $x\Pi$ eines der Transitivitätsgebiete von E bezüglich Π, diese Transitivitätsgebiete nennen wir auch die *Π-Klassen* von E.

1. Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die später benötigten Tatsachen über freie Ebenen und verwandte Begriffsbildungen zusammengestellt. Die Resultate sind teils wohlbekannt, teils in der hier gewählten Darstellungsweise unveröffentlicht. Bei den ohne Beweis übernommenen bekannten Resultaten berufen wir uns in erster Linie auf das Buch [7] von PICKERT, außerdem auf die Arbeiten [4] und [8] von KOPEJKINA und SKORNYAKOV.

1.1. ERZEUGUNG PROJEKTIVER EBENEN. Unter der von einer Teilmenge M der Ebene E *erzeugten Unterebene* wird der Durchschnitt $[M]$ aller (einschließlich der ausgearteten) M enthaltenden Unterebenen von E verstanden. Man überzeugt sich leicht, daß man $[M]$ auch auf die folgende Weise erklären kann: Bezeichnet X^+ die Menge aller derjenigen Elemente von E, welche mit wenigstens zwei Elementen der Teilmenge X von E inzidieren, aber selbst nicht zu X gehören, so ist $[M]$ die Vereinigungsmenge der folgendermaßen definierten aufsteigenden Folge $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots$ von Teilmengen von E:

$$M_0 = M, \quad M_{n+1} = M_n \cup M_n^+ \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Jedem Element $x \in [M]$ wird als seine *M-Stufe* $s_M(x)$ die durch M und x eindeutig bestimmte kleinste ganze Zahl n mit $x \in M_n$ zugeordnet. Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, sagen wir „Stufe" statt „M-Stufe" und schreiben $s(x)$ statt $s_M(x)$.

Lemma 1.1. *Jedem Element der Unterebene E einer projektiven Ebene sei eine nichtnegative Zahl $s(x)$ als ihre „Stufe" zugeordnet, und M sei die Menge der $x \in E$ mit $s(x)=0$. Genau dann ist M_n gleich der Menge aller $x \in E$ mit $s(x) \leqq n$ $(n=0, 1, \ldots)$, also insbesondere $E=[M]$, wenn die Stufenzahlen die folgenden Eigenschaften haben:*

(s 1) *Ist $s(x)>0$, so gibt es mindestens zwei mit x inzidente Elemente niedrigerer Stufe.*

(s 2) *Ist $s(x)>0$, so hat höchstens ein mit x inzidentes Element eine Stufe $<s(x)-1$.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der obigen Definition (1).

Das Element $x \in [M]$ heiße *M-früher* als das Element $y \in [M]$, wenn es eine Folge $U=(u_0, \ldots, u_k)$ von Elementen in $[M]$ gibt derart, daß $u_0=x$, $u_k=y$ ist und $u_i \mathrm{I}\, u_{i+1}$, $s_M(u_i)<s_M(u_{i+1})$ gilt für $i=0, \ldots, k-1$. Unter dem *M-Sockel* eines Elementes $x \in [M]$ wird nun diejenige Menge $M(x)$ verstanden, welche aus x und allen M-früheren als x besteht.

Lemma 1.2. *Es sei z ein Element der M-Stufe m in der Ebene $E=[M]$. Dann hat der M-Sockel $S=M(z)$ die folgenden Eigenschaften:*

(S 1) *Aus $x \in S$ folgt $M(x) \subseteqq S$, also insbesondere $s_M(x) \leqq m$.*

(S 2) *Zu jedem n mit $0 \leqq n \leqq m$ enthält S ein Element der M-Stufe n.*

(S 3) *Jedes $x \in S$ mit $0<s_M(x)<m$ inzidiert mit mindestens drei verschiedenen Elementen von S.*

(S 4) *Ist $S \cap M$ endlich, so auch S selbst.*

Beweis. (S 1) ergibt sich sofort aus der Definition von „M-früher". (S 2) folgt aus (s 1) und (s 2) und der Sockeldefinition. Erfüllt x die Voraussetzungen von (S 3), so inzidiert x mit zwei Elementen kleinerer Stufe [wegen (s 1)] und einem größerer Stufe [da $x \neq z$], also mit mindestens drei Elementen von S. Ist $M'=S \cap M$ endlich, so ist $s_{M'}(x)=s_M(x)$ für alle $x \in S$, also ist $S \subseteqq (M')_m$. Nun ist aber mit X sicher auch X^* endlich, also folgt, daß alle $(M')_n$ endlich sein müssen, und also ist auch S endlich. Damit ist Lemma 1.2 bewiesen.

Ein Element $u \in [M]$ mit $s_M(u)>0$ heißt *M-unfrei*, wenn es mit mehr als zwei Elementen mit M-Stufe $\leqq s_M(u)$ inzidiert (mindestens zwei solche Elemente gibt es nach (s 1) immer, und aus (s 1) folgt weiter, daß u sicher dann M-unfrei ist, wenn u mit einem M-gleichstufigen Element inzidiert.) Die folgenden Überlegungen führen zu einer Abschätzung der Anzahl der M-unfreien Elemente für den Fall, daß M endlich ist.

Unter dem *Rang* einer endlichen Inzidenzstruktur K mit i Inzidenzen (d.h. zweielementigen Teilmengen $\{x, y\}$ mit $x \mathrm{I}\, y$, vgl. [7, S. 22–23]) wird die Zahl

$$r(K)=2|K|-i$$

verstanden. Entsteht die Inzidenzstruktur K' aus K durch Hinzunahme eines neuen Elementes x, so heißt der Übergang von K zu K' *Erweiterung* von K durch x, und statt K' wird auch $K+x$ geschrieben. Die umgekehrte Operation, also das Weglassen eines Elementes x aus K, heißt *Kürzung* von K

durch x, und ihr Ergebnis wird auch mit $K-x$ bezeichnet. Inzidiert x mit genau n Elementen von K und ist K wieder endlich, so gilt, wie man sofort nachrechnet:

$$(2)\qquad \begin{cases} r(K+x)=r(K)-(n-2) & \text{für} \quad x\notin K, \\ r(K-x)=r(K)+(n-2) & \text{für} \quad x\in K. \end{cases}$$

Insbesondere gilt also $r(K+x)=r(K)$ genau dann, wenn $n=2$ ist. In diesem Falle wird von *freier* Erweiterung [und im Falle $r(K-x)=r(K)$ von *freier* Kürzung] gesprochen; natürlich bleiben diese Definitionen auch im Falle unendlicher K sinnvoll.

Lemma 1.3. *Ist K eine endliche Teilmenge einer projektiven Ebene, so ist die Anzahl der in K_n^+ liegenden K-unfreien Elemente höchstens gleich $d_n=r(K_n)-r(K_{n+1})$, $(n=0, 1, \ldots)$, und $d_n=0$ ist gleichbedeutend mit Abwesenheit solcher Elemente.*

Beweis. Die Anzahl der in K_n^+ liegenden K-unfreien Elemente sei j_n. Ist $j_n=0$, so inzidiert jedes Element von K_n^+ mit genau zwei Elementen von K_n, und aus (2) folgt, daß sukzessive Erweiterungen von K_n mit den (endlich vielen) Elementen von K_n^+ den Rang von K_n unverändert lassen. Also ist $r(K_n)=r(K_n\cup K_n^+)=r(K_{n+1})$, und es folgt $d_n=0$. Es bleibt $j_n\leqq d_n$ zu beweisen. Ist x ein in K_n^+ liegendes K-unfreies, also mit mindestens drei Elementen von K_n inzidentes Element, so ergibt (2), daß $r(K_n+x)\leqq r(K_n)-1$ sein muß. Ist y ein weiteres K-unfreies Element in K_n^+, so folgt ebenso $r(K_n+x+y)\leqq r(K_n+x)-1\leqq r(K_n)-2$, und sukzessive Erweiterungen durch alle K-unfreien in K_n^+ ergibt nun

$$r(K_{n+1})=r(K_n\cup K_n^+)\leqq r(K_n)-j_n \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

woraus die Behauptung $j_n\leqq d_n$ folgt. Damit ist Lemma 1.3 bewiesen.

Folgerungen. (a) *Die Folge $r(K)$, $r(K_1)$, $r(K_2)$, ... ist monoton fallend.*
(b) *Genau dann gibt es keine K-unfreien Elemente, wenn alle $r(K_n)=r(K)$ sind.*
(c) *Die Anzahl der K-unfreien Elemente in K_n ist höchstens $r(K)-r(K_n)$.*

Denn nach Lemma 1.3 sind alle $d_n\geqq 0$, und Gleichheit für alle n gilt genau bei Abwesenheit K-unfreier Elemente. Damit sind (a) und (b) bewiesen. Die Anzahl der K-unfreien Elemente in K_n ist wegen (1) gleich $\sum_{i=0}^{n-1} j_i \leqq \sum_{i=0}^{n-1} d_i = r(K)-r(K_n)$, und das ist die Behauptung von (c).

1.2. FREIE EBENENERWEITERUNGEN. Die projektive Ebene E heißt *freie Ebenenerweiterung* ihrer Teilmenge M, wenn $E=[M]$ ist und es keine M-unfreien Elemente gibt; die freie Ebenenerweiterung von M wird stets durch $F(M)$ bezeichnet. Natürlich ist $E=F(E)$ für jede Ebene E; weniger trivial ist die Tatsache, daß es zu jeder Inzidenzstruktur M eine (und bis auf isomorphe nur eine) M enthaltende, möglicherweise ausgeartete, Ebene gibt, die gleich $F(M)$ ist. $F(M)$ ist genau dann nichtausgeartet, wenn M nichtausgeartet ist (vgl. [7, S. 14–15]).

Wir beweisen zwei Eigenschaften von freien Ebenenerweiterungen:

Lemma 1.4. *Für jedes $x \in F(M)$ gilt $|M(x)| < 2^{s_M(x)+1}$.*

Ist $x \in F(M)$ von der M-Stufe k, so folgt aus der Abwesenheit M-unfreier Elemente, daß $M(x)$ höchstens 2^j Elemente der M-Stufe $k-j$ enthält ($j = 0, \ldots, k$). Also enthält $M(x)$ höchstens $\sum_{j=0}^{k} 2^j = 2^{k+1} - 1$ Elemente, und die Behauptung folgt.

Lemma 1.5. *Jedes Element maximaler M-Stufe einer nicht in M enthaltenen Teilmenge K von $F(M)$ inzidiert mit höchstens zwei Elementen von K.*

Beweis. Ist x ein Element maximaler M-Stufe in K, so kann es höchstens dann drei verschiedene mit x inzidente Elemente in K geben, wenn x in M liegt, denn sonst wäre x, da diese drei Elemente keine höhere M-Stufe als x haben, M-unfrei (nach Definition von S. 413). Wäre aber $x \in M$, so würde aus der Maximaleigenschaft von x sogar $K \subseteq M$ folgen. Dieser Widerspruch zur Voraussetzung beweist Lemma 1.5.

Unter einer *geschlossenen Konfiguration* wird eine endliche Inzidenzstruktur verstanden, welche zu jedem ihrer Elemente mindestens drei mit ihm inzidente enthält.

Folgerung. *Jede in $F(M)$ enthaltene geschlossene Konfiguration liegt schon in M selbst.*

Das ergibt sich mit Lemma 1.5 sofort aus der Tatsache, daß jede endliche Teilmenge von $F(M)$ ein Element maximaler Stufe enthält.

Das folgende Lemma wird später mehrfach gebraucht werden; es gestattet eine Übersicht über die Beziehungen zwischen den Stufenzahlen bezüglich verschiedener Erzeugendensysteme einer freien Ebenenerweiterung.

Lemma 1.6. *Es sei L eine beliebige Teilmenge der freien Ebenenerweiterung $F(M)$. Dann gibt es zu jedem Paar x, y inzidenter Elemente in $[L]$ mit $s_M(x) < s_M(y)$ und $s_L(x) > s_L(y)$ ein Element $z \in L \cap L(y)$ mit $y \in M(z)$.*

Beweis. Nach der Definition des Sockels (S. 413) genügt es offenbar, die Existenz einer Folge $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ($n \geqq 2$) von Elementen in $[L]$ mit folgenden Eigenschaften zu beweisen:

$$(3) \quad \begin{cases} u_1 = x,\ u_2 = y,\ u_i \mathrel{\mathrm{I}} u_{i+1},\ s_M(u_i) < s_M(u_{i+1}),\ s_L(u_i) > s_L(u_{i+1}) \\ \text{für} \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad \text{und} \quad s_L(u_n) = 0. \end{cases}$$

Das gesuchte Element z ist dann das Element u_n. Nach den Voraussetzungen des Lemmas können wir $u_1, \ldots, u_j$ mit $j \geqq 2$ als schon konstruiert annehmen. Ist dann $s_L(u_j) = 0$, so ist $n = j$ und wir sind fertig. Ist aber $s_L(u_j) > 0$, so gibt es nach (s 1) mindestens zwei mit u_j inzidente Elemente v, v' niedrigerer L-Stufe als u_j. Von diesen beiden Elementen muß mindestens eines höhere M-Stufe als u_j haben, denn es gibt genau zwei mit u_j inzidente Elemente niedrigerer M-Stufe [wegen $j > 1$ ist $s_M(u_j) > 0$], von denen eines, nämlich u_{j-1}, höhere L-Stufe als u_j hat. O.B.d.A. sei $s_M(v) > s_M(u_j)$, dann setzen wir $v = u_{j+1}$

und haben die gesuchte Folge um ein Glied fortgesetzt. Nach endlich vielen Schritten muß ein u_n die L-Stufe Null haben; damit ist alles bewiesen.

Folgerung. *Ist* $[L]=F(L)\subsetneqq[M]$ *und haben alle Elemente von* L *eine* M*-Stufe* $\leqq n$, *so folgt aus* $x, y\in[L]$, $x\,\mathrm{I}\,y$ *und* $n\leqq s_M(x)<s_M(y)$ *stets* $s_L(x)<s_L(y)$.

Wäre nämlich $s_L(x)\geqq s_L(y)$, so müßte sogar $s_L(x)>s_L(y)$ gelten, denn sonst wäre das wegen $s_M(y)>n$ sicher nicht in L liegende Element y mit einem L-gleichstufigen inzident, also L-unfrei, im Widerspruch zu $[L]=F(L)$. Also ist Lemma 1.6 anwendbar, und es folgt die Existenz eines $z\in L$ mit $y\in M(z)$. Das ist aber unmöglich, denn aus $z\in L$ folgt $s_M(z)\leqq n$, aus $y\in M(z)$ aber $s_M(z)\geqq s_M(y)>n$.

Wir kommen nun zu einer besonders wichtigen Klasse von freien Ebenenerweiterungen. Eine projektive Ebene heißt *freie Ebene*, wenn sie die freie Ebenenerweiterung einer Inzidenzstruktur B von folgender Art ist: B besteht aus einer Geraden c, zwei nicht mit c inzidenten Punkten a, b und einer Menge C von mindestens zwei mit c inzidenten Punkten. Eine solche Menge $B=\{a, b, c\}\cup C$ mit $E=F(B)$ heißt eine *Basis* der freien Ebene E. Die Menge C braucht nicht endlich zu sein; ist sie aber endlich und $|C|=n-2$, enthält B also genau n Punkte, so schreiben wir statt $F(B)$ auch F_n; die Berechtigung zu dieser Schreibweise ergibt sich aus dem unten zitierten Satz (F 1). Ist $|C|=2$, so ist $E=F(B)$ auch gleich der freien Ebenenerweiterung des Vierecks $Q=B-c$; jedes solche eine F_4 frei erzeugende Viereck heißt ein *Basisviereck* dieser F_4.

Für das spätere werden die folgenden wohlbekannten Sätze über freie Ebenen gebraucht, die wir hier ohne Beweis zitieren:

(F 1) (HALL) *Die freie Ebenenerweiterung* $F(K)$ *einer endlichen Inzidenzstruktur* K *ist genau dann eine* F_n, *wenn* K *keine geschlossenen Konfigurationen enthält und* $r(K)=n+4$ *ist. Insbesondere sind* F_m *und* F_n *genau dann isomorph, wenn* $m=n$ *ist, und* $F(K)$ *ist ausgeartet, wenn* $r(K)<8$ *ist* [7, S. 18–23].

(F 2) (HALL) *Jede* F_n *enthält eine* F_{n+1} *als Unterebene* ($n=4, 5, \ldots$) [7, S. 25].

(F 3) (KOPEJKINA) *Unterebenen freier Ebenen sind frei* [8, S. 15–16].

1.3. OFFENE EBENEN. Eine Inzidenzstruktur heißt *offen*, wenn sie keine geschlossenen Konfigurationen (Definition S. 415) enthält. Im Gegensatz zu [7, S. 19] wird hier zugelassen, daß eine offene Inzidenzstruktur unendlich ist, und im folgenden werden wir uns sogar hauptsächlich mit unendlichen offenen Inzidenzstrukturen befassen, nämlich mit offenen projektiven Ebenen. Aus der Folgerung von Lemma 1.5 ergibt sich, daß jede freie Ebene offen ist, denn eine Basis kann natürlich keine geschlossenen Konfigurationen enthalten. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht allgemein, wie später gezeigt werden wird (in 3.4), jedoch ist sie richtig, wenn die Ebene endlich erzeugbar ist [7, S. 23].

Eine Inzidenzstruktur heiße *nichtausgeartet* (vgl. [7, S. 13]), wenn sie (ein Viereck oder) eine Inzidenzstruktur enthält, die zu einer aus einem Viereck durch endlich viele freie Erweiterungen und Kürzungen hervorgehenden Inzidenzstruktur isomorph ist.

Lemma 1.7. *Ist E eine offene Ebene und K eine nichtausgeartete Unterstruktur von E mit dem Rang r, so ist die Anzahl der K-unfreien Elemente in E höchstens $r-8$.*

Beweis. Mit $K=K_0$ sind auch alle K_j ($j=0, 1, \ldots$, vgl. Definition (1) von S. 412) endlich und nichtausgeartet; außerdem sind alle K_j als Teilmengen einer offenen Ebene offen, haben also nach (F 1) sämtlich einen Rang $\geqq 8$. Wäre die Anzahl der K-unfreien Elemente in E nun größer als $r-8$, so gäbe es auch schon in einer K_n mehr als $r-8$ solche Elemente. Die Folgerung (c) von Lemma 1.3 würde dann aber $r-8<r(K)-r(K_n)$ ergeben, woraus $r(K_n)<8$ folgen würde, im Widerspruch zu der oben festgestellten Tatsache $r(K_j)\geqq 8$ für alle j. Damit ist Lemma 1.7 bewiesen.

Lemma 1.7 hat zwei interessante Konsequenzen. Zunächst folgt unmittelbar:

Satz 1.1. *Hat die nichtausgeartete Teilstruktur K der offenen Ebene E den Rang 8, so ist $[K]$ gleich der freien Ebenenerweiterung $F(K)$ in E.*

Insbesondere ist also jede von einem Viereck Q erzeugte offene Ebene eine F_4 mit Q als Basisviereck. Einfachste Beispiele zeigen, daß es in jeder offenen Ebene zu jeder natürlichen Zahl $n>8$ nichtausgeartete Teilstrukturen K des Ranges n derart gibt, daß $[K]$ nicht die freie Ebenenerweiterung von K ist. Satz 1.1 ist also ein bestmögliches Resultat.

Es sei angemerkt, daß die Behauptungen von Lemma 1.7 und Satz 1.1 richtig bleiben, wenn man die Voraussetzungen folgendermaßen abändert: K sei eine nicht in M enthaltene Teilmenge der freien Ebenenerweiterung $E=F(M)$. Diese Sätze sind von unabhängigem Interesse, da es nichtoffene freie Ebenenerweiterungen gibt; hier interessieren sie uns jedoch nur am Rande.

Eine projektive Ebene heiße *lokal frei*, wenn jede ihrer nichtausgearteten endlichen Teilmengen eine freie Unterebene erzeugt.

Satz 1.2. *Eine projektive Ebene ist genau dann offen, wenn sie lokal frei ist.*

Beweis. Zunächst sei die lokale Freiheit der projektiven Ebene E vorausgesetzt. Ist K eine endliche Teilmenge von E, so kann sie keine geschlossene Konfiguration sein, da sie sonst nichtausgeartet wäre und deshalb eine freie Unterebene erzeugte; im Widerspruch zu der am Beginn dieses Paragraphen gemachten Bemerkung, daß freie Ebenen offen sind. Also ist E offen. Wird umgekehrt Offenheit von E vorausgesetzt, und ist K wieder eine endliche nichtausgeartete Teilmenge von E, so muß auch K offen sein, und aus Lemma 1.7 folgt, daß E nur endlich viele K-unfreie Elemente enthält. Diese müssen alle in einer K_n liegen, und es folgt $[K]=[K_n]=F(K_n)$. Da K_n natürlich endlich ist, und $r(K_n)\geqq 8$, ergibt sich schließlich aus (F 1), daß $[K]=F(K_n)$ eine F_m mit $m+4=r(K_n)$ ist. Also ist $[K]$ eine freie Unterebene von E, d.h. E ist lokal frei. Damit ist Satz 1.2 bewiesen.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist das Wort „lokal" in Satz 1.2 unentbehrlich: Es gibt offene Ebenen, die nicht frei sind, wie zuerst KOPEJKINA gezeigt hat [4, §5]. Die von KOPEJKINA angegebenen offenen, nicht freien Ebenen sind für uns aus anderen Gründen von Interesse, wir geben sie daher

hier unter leichter Verallgemeinerung nochmals an, ohne den KOPEJKINAschen Beweis ihrer Nicht-Freiheit zu reproduzieren. In 3.4 und 3.5 wird die Nicht-Freiheit gewisser solcher Ebenen auf andere Weise bewiesen werden; wir werden so die Existenz von offenen, nicht freien Ebenen unabhängig von den KOPEJKINAschen Überlegungen ebenfalls nachweisen.

Es sei $E_1, E_2, \ldots$ eine Folge von (endlich erzeugten) freien Ebenen $F_{n_i} = E_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Da jede F_n nach (F 2) Unterebenen F_k mit beliebig hohem k besitzt, kann man zu jeder Ebenen E_i eine isomorphe E_i' finden, die echt in E_{i+1} enthalten ist. Durch die Identifizierungen $E_i = E_{i1}'$ $(i = 1, 2, \ldots)$ werden die E_i also echt ineinander eingebettet: $E_1 < E_2 < \ldots$. Es ist klar, daß die Vereinigungsmenge $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ eine projektive Ebene ist, die als Vereinigungsmenge offener Inzidenzstrukturen natürlich ebenfalls offen sein muß.

Jede projektive Ebene, die sich in der soeben beschriebenen Weise als Vereinigung unendlich vieler endlich erzeugter freier Ebenen E_i $(i = 1, 2, \ldots)$ darstellen läßt, nennen wir *von unendlicher Höhe*, die E_i ihre *Glieder*. (Die Glieder brauchen durch die Ebene natürlich nicht eindeutig bestimmt zu sein.) Unter den offenen Ebenen von unendlicher Höhe gibt es freie Ebenen; z. B. ist die freie Ebene $F(B)$ mit abzählbar-unendlicher Basis $B = \{a, b, c\} \cup C$, wo $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$, von unendlicher Höhe, mit den Gliedern $E_i = F(B_i)$, wo $B_i = \{a, b, c\} \cup C_i$ und $C_i = \{c_1, \ldots, c_i\}$, $i > 1$. Aber eine große Klasse offener Ebenen von unendlicher Höhe besteht nur aus nichtfreien Ebenen: *Keine offene Ebene von unendlicher Höhe mit unendlich vielen zur F_4 isomorphen Gliedern ist frei.* Das ist der oben erwähnte Satz von KOPEJKINA; wir werden später nie von ihm Gebrauch machen.

Es sei E eine F_n mit der Basis $B = \{a, b, c\} \cup C$, wo $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$, $n > 1$. Dann gibt es, wie man leicht aus (F 2) herleitet, eine echte Unterebene E' von E, die ebenfalls eine F_n ist. Sei $E' = F(B')$, $B' = \{a', b', c'\} \cup C'$, $C' = \{c_1', \ldots, c_n'\}$. Durch die Abbildungsvorschriften $a \to a'$, $b \to b'$, $c \to c'$, $c_i \to c_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$ wird nun ein Isomorphismus π von E auf E' definiert, der ein Monomorphismus, aber wegen $E \neq E'$ kein Automorphismus von E ist. Sind $E_1, E_2, \ldots$ abzählbar-unendlich viele zu $E = F_n$ isomorphe Ebenen und $\pi_1, \pi_2, \ldots$ die π entsprechenden Monomorphismen von $E_1, E_2, \ldots$, so liefert die Identifizierungsvorschrift $E_i = E_{i+1}\pi_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ eine Einbettung der E_i ineinander. Jede offene Ebene unendlicher Höhe, deren Glieder alle isomorph und auf die angegebene Art mittels eines Monomorphismus π ineinander eingebettet sind, heißt *uniform* bezüglich π. Im Anhang zu dieser Arbeit wird ein Einbettungssatz über allgemeine Algebren bewiesen, der auf projektive Ebenen anwendbar ist. Aus diesem Satz ergibt sich unmittelbar der folgende für das spätere wichtige Satz:

Satz 1.3. *Zu jedem Monomorphismus π einer F_n, der kein Automorphismus ist, gibt es eine diese F_n enthaltende, bezüglich π uniforme offene Ebene unendlicher Höhe, welche einen π in der vorgegebenen F_n induzierenden Automorphismus π' besitzt.*

Für den Fall $n=4$ ergibt sich insbesondere:

Folgerung. *Ist V ein beliebiges Viereck einer F_4 mit dem Basisviereck Q, so gibt es eine $F(Q)$ enthaltende offene Ebene, in welcher Q durch einen Automorphismus auf V abbildbar ist.*

Denn nach Satz 1.1 ist $[V]=F(V)$ in $F(Q)$, also läßt sich Q in $F(Q)$ durch einen Monomorphismus π auf V abbilden; das weitere folgt aus Satz 1.3. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Folgerung richtig bleibt, wenn man unter einem „Viereck" ein *geordnetes* Punktquadrupel in allgemeiner Lage versteht, nicht nur eine (ungeordnete) Menge von vier Punkten in allgemeiner Lage.

2. Automorphismen freier Ebenenerweiterungen

Das Thema dieses Abschnittes ist der Nachweis der in der Einleitung formulierten Eigenschaft (I) für freie Ebenen. Die wesentlichen Hilfsmittel beim Beweis sind Lemma 2.1 für unendliche und Lemma 2.5 für endliche Basis. Lemma 2.1 gestattet den Nachweis von (I) sogar für eine die freien Ebenen mit unendlicher Basis echt enthaltende Klasse freier Ebenenerweiterungen. Interessante Nebenresultate sind die Sätze 2.1 und 2.2 sowie die Folgerung aus Lemma 2.4.

2.1. Stationäre Automorphismen. Ist E eine beliebige projektive Ebene und Λ eine Gruppe von Automorphismen von E, so heißen zwei Elemente von E immer dann *Λ-konjugiert*, wenn eines von ihnen durch einen zu Λ gehörigen Automorphismus von E auf das andere abgebildet werden kann. Die zu dieser Äquivalenzrelation in E gehörigen Äquivalenzklassen heißen die *Λ-Klassen* von E.

Lemma 2.1. *Es sei E eine von der Inzidenzstruktur M (nicht notwendig frei) erzeugte projektive Ebene mit einer Gruppe Λ von M auf sich abbildenden Automorphismen. Enthält sodann M eine unendliche Λ-Klasse T, so ist auch jede Λ-Klasse unendlich, die ein Element x mit endlichem nichtleerem Durchschnitt $M(x)\cap T$ enthält.*

Beweis. Da T unendlich, aber $M(x)\cap T$ endlich und nicht leer ist, gibt es unendlich viele verschiedene $U(\lambda)=[M(x)\cap T]\,\lambda$ mit $\lambda\in\Lambda$. Aus $U(\lambda)\neq U(\lambda')$ folgt $x\lambda\neq x\lambda'$ wegen $U(\lambda)=M(x\lambda)\cap T$. Also gibt es auch unendlich viele verschiedene $x\lambda$, d.h. die Λ-Klasse $x\Lambda$ ist unendlich, wie behauptet.

Es sei M eine Inzidenzstruktur, die keine projektive Ebene ist, und E ihre (dann von M verschiedene) freie Ebenenerweiterung $F(M)$. Sodann heißt ein Automorphismus π von E, durch den M auf sich abgebildet wird, *M-stationär* oder, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, einfach *stationär*. Jeder M-stationäre Automorphismus von E induziert einen Automorphismus in M, und umgekehrt läßt sich jeder Automorphismus π' von M auf genau eine Weise zu einem Automorphismus π von $F(M)=E$ ausdehnen: Ist $s_M(x)=0$ (also $x\in M$), so $x\pi=x\pi'$; ist aber $s_M(x)>0$ und sind u, v die beiden wohlbestimmten mit x inzidenten Elemente niedrigerer M-Stufe, so kann man $u\pi$ und $v\pi$ induktiv als schon bestimmt annehmen, und es ist dann $x\pi=(u\pi)(v\pi)$. Die M-stationären Automorphismen von $E=F(M)$

bilden also eine im wesentlichen mit der Automorphismengruppe von M identische Gruppe, die wir mit $\Sigma_M(E)$ bezeichnen.

Folgerungen aus Lemma 2.1. (a) *Ist Σ eine Gruppe M-stationärer Automorphismen der freien Ebenenerweiterung $E=F(M)$, mit einer unendlichen in M enthaltenen Σ-Klasse T, so ist die von einem $x\in E$ mit nichtleerem Durchschnitt $M(x)\cap T$ aufgespannte Σ-Klasse $x\Sigma$ unendlich.*

(b) *Hat die Automorphismengruppe Σ der Inzidenzstruktur M lauter unendliche Σ-Klassen, so gilt das gleiche für die von Σ in $F(M)$ erzeugte Gruppe von M-stationären Automorphismen.*

(c) *Ist $E=F(B)$ eine freie Ebene mit unendlicher Basis $B=\{a, b, c\}\cup C$, so sind der Punkt $(ab)c$ und die Geraden c, ab Fixelemente aller Automorphismen von $\Sigma_B(E)$, die Punkte a, b bilden eine $\Sigma_B(E)$-Klasse für sich, und alle anderen $\Sigma_B(E)$-Klassen sind unendlich.*

Um Lemma 2.1 im Falle (a) anwenden zu können, braucht man nur zu wissen, daß alle M-Sockel in $F(M)$ endlich sind; das folgt sofort aus Lemma 1.4. Die Folgerung (b) ist eine unmittelbare Konsequenz von (a).

Beweis von (c). Aus der Definition der Basis (S. 416) folgt, daß die mit $\Sigma_B(E)$ im wesentlichen identische Automorphismengruppe von B gleich dem direkten Produkt der folgenden Gruppen Π und $[\lambda]$ ist: Π ist die von den Permutationen von C erzeugte Kollineationsgruppe, und $[\lambda]$ ist die Gruppe der Ordnung zwei, die von der Vertauschung λ von a und b erzeugt wird, wobei $x\lambda=x$ für alle $x\in C$. Also ist C eine unendliche $\Sigma_B(E)$-Klasse T in B, und die Richtigkeit von (c) ergibt sich aus (a) wegen der sofort zu verifizierenden Tatsache, daß alle Elemente von E, die nicht in einer der genannten vier endlichen Klassen liegen [diese nennen wir in Zukunft die *B-Ausnahmeklassen* von $E=F(B)$], einen B-Sockel haben, der mit C einen nichtleeren Durchschnitt besitzt.

Folgerung (b) garantiert die Gültigkeit der Eigenschaft (I) aus der Einleitung in vielen freien Ebenenerweiterungen, die keine freien Ebenen sind; z. B. hat die freie (projektive) Ebenenerweiterung einer unendlichen desarguesschen affinen Ebene diese Eigenschaft. Für freie Ebenen mit unendlicher Basis wird die Eigenschaft (I) wegen (c) dann bewiesen sein, wenn gezeigt wird, daß jedes Element einer Ausnahmeklasse zu einem nicht in einer Ausnahmeklasse liegenden Element konjugiert ist. Dieser Nachweis wird in 2.4 geführt werden.

Wir wenden uns nun den freien Ebenenerweiterungen $F(M)$ mit solchen M zu, deren Automorphismengruppen nur endliche $\Sigma_B(E)$-Klassen haben. Insbesondere ist das bei endlichem M der Fall.

Lemma 2.2. *Es sei Σ eine Gruppe M-stationärer Automorphismen der freien Ebenenerweiterung $E=F(M)$, und seien U, V zwei endliche Σ-Klassen mit zwei Elementen $u\in U$, $v\in V$, für die $u\,\mathrm{I}\,v$ und $s_M(u)<s_M(v)$ gilt; ferner sei u' das wohlbestimmte von u verschiedene und mit v inzidente Element niedrigerer M-Stufe. Ist sodann $|U|$ ungerade oder u nicht Σ-konjugiert zu u', so ist $|U|$ ein Teiler von $|V|$; sonst ist $|U|/2$ ein Teiler von $|V|$.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß ein M-stationärer Automorphismus von E natürlich die M-Stufe jedes Elementes von E erhält; alle Elemente von U haben also die gleiche M-Stufe wie u, und alle Elemente von V die gleiche M-Stufe wie v. Aus $u\,\mathrm{I}\,v$ folgt die Existenz zweier natürlicher Zahlen j, k mit folgenden Eigenschaften: Jedes Element von U inzidiert mit genau j Elementen von V, und jedes Element von V inzidiert mit genau k Elementen von U. (Für den einfachen Beweis dieser Behauptung sei auf [*1*, Satz 1] verwiesen; der dort gegebene Beweis für endliche Inzidenzstrukturen überträgt sich wörtlich auf den hier vorliegenden Fall.) Man kann nun die Anzahl der Paare (x, y) mit $x \in U$, $y \in V$, $x\,\mathrm{I}\,y$ auf zwei verschiedene Weisen abzählen, woraus sich die Gleichung

$$j|U| = k|V|$$

ergibt (vgl. [*1*, S. 62]). Nun ist $k > 0$ wegen der Voraussetzung $u\,\mathrm{I}\,v$, und $k < 3$, da sonst jedes Element von V mit mindestens drei Elementen niedrigerer M-Stufe inzident wäre, im Widerspruch zur Definition der freien Ebenenerweiterung. Also ist $k = 1$ oder $k = 2$, und aus der Definition von u' folgt, daß genau dann $k = 1$ gilt, wenn u und u' nicht Σ-konjugiert sind. Die Behauptung des Lemmas ergibt sich nun sofort aus der obigen Gleichung.

Folgerungen. (a) *Es sei $E = F(B)$ eine freie Ebene mit endlicher Basis $B = \{a, b, c\} \cup C$ und q der größte ungerade Teiler von $|C|$ $(|C| - 1)$. Dann gilt: Die von a b verschiedenen Geraden der B-Stufe Eins bilden eine volle $\Sigma_B(E)$-Klasse K mit $2|C|$ Elementen; für jede von den B-Ausnahmeklassen und den $\Sigma_B(E)$-Klassen C, K verschiedene $\Sigma_B(E)$-Klasse X ist $|X|$ ein Vielfaches von q.*

Die zweite Behauptung ist natürlich nur für $|C| > 2$ interessant.

(b) *Ist B eine (endliche) Basis einer F_n mit $n > 4$, so bleiben genau die Elemente a b, c, $(a\,b)$ c bei allen B-stationären Automorphismen fest. Ist Q ein Basisviereck einer F_4, so gibt es keine bei allen Q-stationären Automorphismen festbleibenden Elemente.*

Beweis. Daß C eine volle $\Sigma_B(E)$-Klasse ist, ist klar, und man verifiziert leicht, daß auch die beschriebene Menge K eine Σ-Klasse von $2|C|$ Elementen ist $[\Sigma = \Sigma_B(E)]$. Ebenso leicht ist zu sehen, daß genau $|C|$ $(|C| - 1)$ der Schnittpunkte dieser Geraden von der B-Stufe 2 sind und eine Σ-Klasse L für sich bilden. Nach Voraussetzung ist q der größte ungerade Teiler von $|L|$. Jede Gerade g von der B-Stufe 3 muß nun mit einem Punkt von L inzidieren, denn sonst wäre von den beiden mit g inzidenten Punkten niedrigerer Stufe einer gleich $(a\,b)\,c$ und der andere in B, also würde $g = ab$ oder $g = c$ folgen, im Widerspruch zu $s_B(g) = 3$. Also inzidiert g mit einem Punkt von L, und Lemma 2.2 wird mit $U = L$ und $V = g\Sigma$ anwendbar. Folglich ist q auch ein Teiler von $|g\Sigma|$, und damit ist (a) für alle von C, K und den Ausnahmeklassen verschiedenen Σ-Klassen bewiesen, deren Elemente von einer B-Stufe $\leqq 3$ sind.

Sei nun $k > 3$ und (a) für alle Σ-Klassen von Elementen mit B-Stufe $< k$ bewiesen, die von C, K und den Ausnahmeklassen verschieden sind. Ist sodann V eine Σ-Klasse von Elementen der B-Stufe k, und ist $v \in V$, so existiert

ein mit v inzidentes Element u mit $s_B(u) = k-1 \geqq 3$. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Anzahl der Elemente der Σ-Klasse $U = u\Sigma$ ein Vielfaches von q, und Anwendung von Lemma 2.2 ergibt wieder, daß q auch $|V|$ teilt. Damit ist die Folgerung (a) von Lemma 2.2 bewiesen.

(b) Daß a b, c und $(a\ b)\ c$ bei allen B-stationären Automorphismen einer freien Ebene $E = F(B)$ festbleiben, haben wir schon früher gesehen. Ist nun B endlich und $F(B)$ eine F_n mit $n > 4$, so ist $|C| > 2$, und $|C|\,(|C|-1)$ besitzt einen ungeraden Teiler $\geqq 3$. Also ergibt Folgerung (a), daß außer den genannten Fixelementen höchstens noch Elemente der Ausnahmeklasse $\{a, b\}$ oder Elemente von C oder K bei allen B-stationären Automorphismen festbleiben könnten; das ist aber natürlich nicht der Fall.

Für $n = 4$ versagt der eben durchgeführte Schluß, da sodann $|C|\,(|C|-1) = 2$ ist, also keine ungeraden Teiler > 1 enthält. Im nächsten Paragraphen wird gezeigt, daß die Behauptung (b) in diesem Falle sogar tatsächlich falsch wird. Aber im Falle $n = 4$ ist E ja auch als freie Ebenenerweiterung $F(Q)$ eines Basisvierecks Q darstellbar, und die Gruppe $\Sigma = \Sigma_Q(E)$ der Q-stationären Automorphismen von E (isomorph zur symmetrischen Gruppe vom Grad vier) hat keine Fixelemente: Zunächst ist Q selbst eine volle Σ-Klasse, und das gleiche gilt für die Menge Q_1 der Geraden der Q-Stufe Eins. Wegen $|Q_1| = 6$ ist die Primzahl 3 Teiler von $|Q_1|$. Wir zeigen, daß 3 auch alle anderen $|x\Sigma|$ teilt ($x \in E$): Ist das für alle Σ-Klassen mit Elementen der Q-Stufe $< k$ schon bewiesen ($k > 1$), so sei v ein Element der Q-Stufe k, u ein mit v inzidentes der Q-Stufe $k-1 \geqq 1$ und $U = u\Sigma$, $V = v\Sigma$. Nach Induktionsvoraussetzung ist 3 ein Teiler von $|U|$, und Lemma 2.2 ergibt wieder, daß 3 auch ein Teiler von $|V|$ sein muß. Damit ist die Folgerung (b) von Lemma 2.2 bewiesen.

2.2. UNTEREBENEN FREIER EBENEN. Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz 2.1. *Jede Unterebene einer freien Ebene $E = F(B)$ ist eine freie Ebene $E' = F(B')$, deren Basis B' eine Mächtigkeit m mit $5 \leqq m \leqq \aleph_0 |B|$ hat. Umgekehrt gibt es zu jeder solchen Mächtigkeit m Unterebenen $F(B')$ von E mit $|B'| = m$.*

Ist $B = \{a, b, c\} \cup C$ unendlich, so ist $\aleph_0 |B| = |B|$, und man erhält Unterebenen $F(B')$ mit jeder Mächtigkeit $5 \leqq m = |B'| \leqq |B|$ einfach durch Auswahl von Teilmengen $C' \in C$ mit $|C'| = m-3$; ist $B' = \{a, b, c\} \cup C'$ mit $C' \subseteqq C$, so folgt natürlich leicht $[B'] = F(B')$ in E. Daß andere Typen von Unterebenen nicht auftreten können, folgt aus (F 3) (S. 416) und der aus der Definition der freien Ebenenerweiterung sich ergebenden Tatsache, daß $|E| = \aleph_0 |B| = |B|$ ist.

Ist B endlich, so enthält E zunächst eine F_4 (mit $m = 5$; nach Satz 1.1 erzeugt jedes Viereck in E eine F_4) und deshalb nach (F 2) auch Unterebenen F_n für jedes natürliche n. Da nach (F 3) andere als freie Unterebenen nicht auftreten können, bleibt zum Beweis von Satz 2.1 als einzige nichttriviale Aufgabe nur der Nachweis der Tatsache übrig, daß die F_4 nicht endlich erzeugbare Unterebenen besitzt. Das geschieht durch das folgende Lemma.

Lemma 2.3. *Es sei $E = F(B)$ eine F_4 mit der Basis $B = \{a, b, c\} \cup C$, $C = \{c_1, c_2\}$. Dann ist die Menge der bei allen B-stationären Automorphismen*

von E festbleibenden Elemente von E eine nicht endlich erzeugbare freie Unterebene von E.

Dieses Lemma liefert ein Analogon zu dem geläufigen Satz, daß eine Untergruppe einer endlich erzeugten freien Gruppe nicht endlich erzeugbar zu sein braucht (man vgl. z.B. KUROSCH [5, S. 274]).

Wir führen den etwas langwierigen Beweis von Lemma 2.3 in mehreren Schritten. Dabei wird der Kürze wegen „Stufe" statt „B-Stufe" gesagt und s statt s_B geschrieben. Die Gruppe $\Sigma=\Sigma_B(E)$ der B-stationären Automorphismen von E ist das direkte Produkt von zwei zyklischen Gruppen der Ordnung zwei, nämlich der von der Vertauschung λ von a und b (S. 420) und der Vertauschung π von c_1 und c_2 erzeugten. Σ ist also eine KLEINsche Vierergruppe; alle ihre Elemente sind involutorische Kollineationen, und jede Σ-Klasse hat 1, 2 oder 4 Elemente. Statt „Σ-Klasse" sagen wir einfach „Klasse", ohne Mißverständnisse befürchten zu müssen, und ebenso reden wir von „Fixelementen" statt „Σ-Fixelementen". Die Menge aller Fixelemente nennen wir E'.

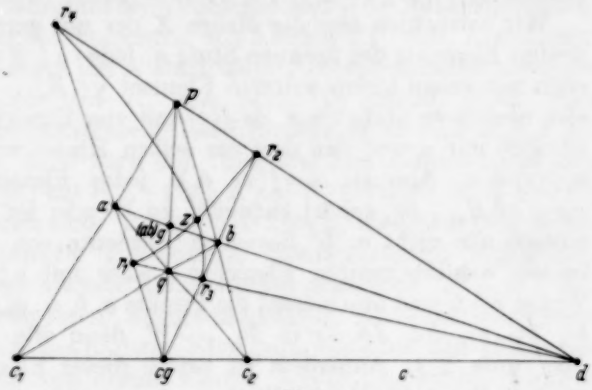


Fig. 1

(i) Wir zeigen zuerst, daß E' eine nichtausgeartete projektive Ebene ist. Dazu braucht natürlich nur ein Viereck in E' angegeben zu werden. Setzt man $p=(ac_1)(bc_2)$, $q=(ac_2)(bc_1)$, $g=pq$, so sieht man leicht, daß g eine Fixgerade ist (vgl. Fig. 1); also sind $d=(ab)c$, cg und $(ab)g$ bereits drei nichtkollineare Punkte in E', und wir brauchen nur noch einen auf keiner Seite des von d, cg und $(ab)g$ gebildeten Dreiecks liegenden Fixpunkt z anzugeben. Nun bilden, wie man ohne Mühe einsieht, die Schnittpunkte r_i $(i=1, \ldots, 4)$ der Geraden dp, dq der Stufe 3 mit den Geraden $a(cg)$, $b(cg)$ der Stufe 5 eine Klasse für sich, und das gleiche gilt von den beiden Geraden r_1r_2 und r_3r_4 der Stufe 7. Ihr Schnittpunkt z ist sicher ein Fixpunkt, und läge er auf einer der Seiten von d, cg, $(ab)g$, so wäre er mit drei Geraden niedrigerer Stufe inzident, im Widerspruch zur Definition der freien Ebenenerweiterung. Damit ist gezeigt, daß E' nichtausgeartet ist.

(ii) Der Hauptteil des Beweises besteht im Nachweis der Richtigkeit von

(*) *Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine aus vier Elementen in allgemeiner Lage bestehende Klasse, deren Elemente eine Stufe $\geqq n$ haben.*

Beweis. Wäre (*) falsch, so müßte es ein minimales n geben, für welches keine Klasse mit den behaupteten Eigenschaften existiert; da die in (i) angegebene Klasse $\{r_1, \ldots, r_4\}$ aus Punkten in allgemeiner Lage besteht, ist $n>6$.

Nun gibt es nach Auswahl von n sicher eine aus vier in allgemeiner Lage befindlichen Elementen der Stufe $n-1$ bestehende Klasse W. Jedes mit einem $w \in W$ inzidente Element x höherer Stufe gehört zu einer aus vier nicht in allgemeiner Lage befindlichen oder aus nur zwei Elementen bestehenden Klasse, denn da die Elemente von W in allgemeiner Lage sind, kann x kein Fixelement sein. Da die von x erzeugte Klasse höchstens dann nur zwei Elemente enthält, wenn x außer mit w noch mit einem zweiten Element von W inzidiert, so folgt, daß jedes nur mit w und keinem anderen Element von W inzidente x mit $s(x) \geqq n$ zu einer aus vier Elementen bestehenden Klasse gehört, welche nicht in allgemeiner Lage sind und daher mit ein und demselben Fixelement inzidieren. Jedes solche x inzidiert also mit genau einem Fixelement $f(x)$, und die von x erzeugte Klasse besteht aus den vier Elementen $w_i f(x)$, $i = 1, \ldots, 4$, wo $W = \{w_1, \ldots, w_4\}$.

Wir betrachten nun die Menge X der mit genau einem $w_i = w \in W$ inzidenten Elemente der genauen Stufe n; jedes $x \in X$ inzidiert also außer mit w noch mit genau einem weiteren Element $y \in B_{n-1}$. Nun hat aber $f(x)$ sicher eine niedrigere Stufe als x, da $f(x)$ mit vier Elementen der Stufe n inzidiert, nämlich mit x und den drei zur selben Klasse wie x gehörigen Elementen $w_i f(x) \neq x$. Also ist $y = f(x)$, d.h. jedes Element $y \in B_{n-1}$, für welches $wy = x \notin B_{n-1}$ ist, gehört entweder zu W oder ist ein Fixelement. Folglich müssen alle nicht in E' liegenden Elemente von $B_{n-1} - W$ mit einem der beiden wohlbestimmten Elemente $u, v \mathrel{\mathrm{I}} w$ mit $s(u)$, $s(v) < s(w)$ inzidieren. Wegen $n > 6$ sind nun sowohl die Punkte a, b, c_1, c_2, p, q als auch die Geraden $ac_1, bc_1, ac_2, bc_2, dp, dq$ in $B_{n-1} - W$, denn alle diese 12 Elemente haben eine Stufe $\leqq 3$. Außerdem ist keines dieser Elemente ein Fixelement; es müßten also entweder die Punkte $a, \ldots, q$ auf zwei Geraden u, v liegen oder die Geraden $ac_1, \ldots, dq$ durch zwei Punkte u, v gehen. Beides ist aber nicht der Fall, es ergibt sich also ein Widerspruch, und (*) ist bewiesen.

(iii) Mit Hilfe von Lemma 1.6 können wir jetzt den Beweis von Lemma 2.3 zu Ende führen. Wegen (i) ist E' eine nichtausgeartete Unterebene der freien Ebene $E = F_4$; nach (F 3) ist also auch E' frei. Sei $B' = \{a', b', c'\} \cup C'$ eine Basis von E'; wir müssen zeigen, daß C' nicht endlich sein kann. Wäre C' endlich, so gäbe es eine natürliche Zahl m mit $s(x) \leqq m$ für alle $x \in B'$. Nach der in (ii) bewiesenen Aussage (*) gibt es nun eine aus vier in allgemeiner Lage befindlichen Elementen derselben Stufe $\geqq m$ bestehende Klasse $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Da alle Kollineationen von Q involutorisch sind, zerfallen die sechs Elemente $v_i v_j$ $(i \neq j)$ in drei Klassen zu je zweien, wie man leicht einsieht, und mindestens eine davon o.B.d.A. $\{v_1 v_2, v_3 v_4\}$, besteht aus Elementen einer Stufe $> m$, da sonst jedes v_i mit drei Elementen kleineren Grades inzident wäre. Das Element $f = (v_1 v_2)(v_3 v_4)$ ist sodann ein Fixelement noch höherer Stufe, da sonst $v_1 v_2$ mit drei niedrigerstufigen Elementen inzidierte. Damit haben wir in E' ein Element f mit $s(f) > m$ gefunden, welches mit zwei nicht zu E' gehörigen Elementen u, v niedrigerer Stufe (nämlich $v_1 v_2$ und $v_3 v_4$) inzidiert. Wegen $s(f) > m$ kann f nicht zu B' gehören, d.h. $s'(f) > 0$ (die B'-Stufe der Elemente von E' wird mit s' bezeichnet). Also inzidiert f mit zwei

Elementen u', v' kleineren B'-Grades, die natürlich zu E' gehören und deshalb von u, v verschieden sind. Also folgt $m < s(f) < s(u')$ und $s'(f) > s'(u')$; das ist aber ein Widerspruch zu der Folgerung von Lemma 1.6 (S. 416), nach welcher aus $m < s(f) < s(u')$ auch $s'(f) < s'(u')$ folgen müßte. Dieser Widerspruch beweist Lemma 2.3, und damit ist auch Satz 2.1 bewiesen.

2.3. Projektive Ebenen ohne Automorphismen. In diesem Paragraphen wird folgender Satz bewiesen:

Satz 2.2. *Es gibt unendlich viele nichtisomorphe projektive Ebenen, die nur den identischen Automorphismus zulassen.*

Zum Beweis wird eine Klasse freier Ebenenerweiterungen $F(K)$ mit folgenden Eigenschaften konstruiert: (a) K ist eine geschlossene Konfiguration, (b) K besitzt nur den identischen Automorphismus. Es ist klar, daß jede solche $F(K)$ automorphismenfrei sein muß, denn zunächst muß jeder Automorphismus K auf sich abbilden (nach der Folgerung von Lemma 1.5), d.h. K-stationär sein, andererseits ist die Gruppe der K-stationären Automorphismen isomorph zur Automorphismengruppe von K, also nach (b) trivial. Sind aber K, K' zwei nichtisomorphe geschlossene Konfigurationen, so sind auch $F(K)$ und $F(K')$ nichtisomorph, denn nach der Folgerung von Lemma 1.5 müßte ein Isomorphismus von $F(K)$ auf $F(K')$ auch K auf K' abbilden, da K und K' geschlossene Konfigurationen sind. Es bleibt also übrig, unendlich viele nichtisomorphe automorphismenfreie geschlossene Konfigurationen anzugeben. Hall hat ein Beispiel einer solchen Konfiguration angegeben [3, p. 46]; das folgende (dem Verfasser von Herrn André mitgeteilte) Konstruktionsprinzip liefert gleich unendlich viele geschlossene Konfigurationen mit den verlangten Eigenschaften. P sei eine von einem Viereck $V = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ erzeugte endliche projektive Ebene mit mindestens sechs Punkten auf jeder Geraden. Jede endliche Ebene ohne echte Unterebenen wird von einem Viereck erzeugt; für P kann also z.B. jede desarguessche Ebene einer Primzahlordnung $\geqq 5$ genommen werden, d.h. es gibt unendlich viele Möglichkeiten der Auswahl für P. Sodann sei g eine durch p_1, aber keinen anderen Punkt von V gehende Gerade von P, und $S = V \cup \{g, p_1 p_2, p_1 p_3, p_3 p_4\}$.

Man überzeugt sich nun ohne Schwierigkeit, daß keine nichtidentische Kollineation und keine Korrelation von P die Menge S auf sich abbildet, so daß $K = P - S$ nur den identischen Automorphismus zuläßt, denn jeder Automorphismus von K wird natürlich von einem Automorphismus von P induziert. Also erfüllt K die Bedingung (b), und da jedes Element von P nach Voraussetzung mit mindestens 6 andersartigen inzidiert, ist K noch eine geschlossene Konfiguration, erfüllt also auch die Bedingung (a). Damit ist alles bewiesen.

2.4. Beweis von (I) für freie Ebenen. Es sei wieder $E = F(B)$ eine freie Ebene mit der Basis $B = \{a, b, c\} \cup C$, ferner seien c_1, c_2 zwei Punkte von C. Dann wird durch

$$a' = a\,c_1, \quad b' = a\,c_2, \quad c' = b, \quad x' = b\,x \quad \text{für alle } x \in C \tag{4}$$

eine zu B (dual-)isomorphe Menge $B' = \{a', b', c'\} \cup C'$ definiert, von der man leicht einsieht, daß sie die ganze Ebene E erzeugt (da $B \subset [B']$). Wir zeigen,

daß $[B']=F(B')$ ist. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es B'-unfreie Elemente in E; sei x ein solches. Von den wenigstens drei mit x inzidenten Elementen niedrigerer B'-Stufe muß mindestens eines wegen $E=F(B)$ höhere B-Stufe als x haben; sei y ein solches Element. Aus $s_B(x)<s_B(y)$ und $s_{B'}(x)>s_{B'}(y)$ folgt nun aber mit der Folgerung von Lemma 1.6, da die Elemente von B' nach (4) alle eine Stufe $\leqq 1$ haben, daß $s_B(x)<1$, also $x\in B$ sein müßte. Das ist ein Widerspruch, denn man sieht sofort, daß in B kein B'-unfreies Element vorhanden ist. Also ist $E=[B']=F(B')$, und es ist bewiesen:

Lemma 2.4. *Die durch* (4) *erklärte Abbildung* $a\to a'$, $b\to b'$, $c\to c'$, $x\to x'$ *für* $x\in C$ *von* B *auf* B' *definiert eine Korrelation von* $E=F(B)=F(B')$.

Diese Korrelation nennen wir δ. Wegen Lemma 2.4 gilt natürlich die

Folgerung. *Jede freie Ebene ist selbstdual.*

Nun sei $\Gamma=\Gamma_B(E)$ die von δ und der Gruppe $\Sigma=\Sigma_B(E)$ erzeugte Automorphismengruppe von $E=F(B)$. Das Hauptresultat dieses Paragraphen lautet:

Lemma 2.5. *Zu jedem* $x\in E$ *existiert ein* $\gamma\in\Gamma$ *mit* $s_B(x\gamma)>s_B(x)$.

Beweis. (i) Wie früher bezeichne $s(x)$ die B-Stufe, $s'(x)$ die B'-Stufe von $x\in E$. Natürlich ist $s_B(x)=s_{B\delta}(x\delta)$, und das bedeutet $s(x)=s'(x\delta)$ oder $s'(x)=s(x\delta^{-1})$. Da nach (4) alle Elemente von B' eine B-Stufe $\leqq 1$ haben, ergibt nun die Folgerung von Lemma 1.6 (S. 416):

Aus $x\,\mathrm{I}\,y$, $s(x)<s(y)$ *und* $s(x\delta^{-1})>s(y\delta^{-1})$ *folgt* $x\in B$.

(ii) Ist $x=c$, so hat die Kollineation δ^2 die in Lemma 2.5 behauptete Eigenschaft, denn aus (4) folgt sofort $c\delta^2=ac_2$. Um also das Lemma zu beweisen, genügt es jetzt, zu zeigen:

(**) *Ist* $c\neq x\in E$, *so hat entweder* $x\delta^{-1}$ *oder ein* $x\sigma\delta$ *mit* $\sigma\in\Sigma=\Sigma_B(E)$ *eine B-Stufe* $>s(x)$.

Den Beweis von (**) führen wir in mehreren Schritten. Wie früher (vgl. Fig. 1, S. 423) setzen wir $p=(ac_1)(bc_2)$ und $q=(ac_2)(bc_1)$.

(iii) Beweis für $s(x)\leqq 1$: Ist $s(x)=0$, also $c\neq x\in B$, so folgt die Richtigkeit von (**), mit $\sigma=1$, aus (4). Ist $s(x)=1$, so sind drei Fälle zu unterscheiden:

(a) $x=ab$, dann ist $s(x\delta^{-1})=s[(ab)c]=2$, nach (4).

(b) $x=c_1b$, dann ist $s(x\delta)=s(q)=2$ nach (4), also $\sigma=1$.

(c) $x\notin\{ab, c_1b\}$, dann ist x von der Form ay oder by, mit $y\in C$. In diesem Fall enthält Σ ein σ mit $x\sigma=c_1b$, und es folgt $s(x\sigma\delta)=s(q)=2$.

(iv) Wäre nun (**) nicht allgemein richtig, so gäbe es ein Element z niedrigster B-Stufe m, für welches die Behauptung von (**) nicht gilt, für das also die Menge $\{z\delta^{-1}\}\cup z\Sigma\delta$ keine Elemente einer B-Stufe $>m$ enthält. Aus (iii) folgt sofort, daß $m>1$ sein muß. Mit z inzidiert ein Element u der Stufe $m-1$. Wegen der Minimaleigenschaft von m gibt es ein $\gamma\in\Gamma$, welches entweder gleich δ^{-1} oder von der Form $\sigma\delta$ mit $\sigma\in\Sigma$ ist, mit $s(u\gamma)\geqq m$. Da $z\gamma$ als mit $u\gamma$ inzidentes Element nicht dieselbe B-Stufe wie $u\gamma$ haben kann und außerdem z durch γ nach unserer Annahme sicher nicht auf ein Element höherer Stufe abgebildet wird, ergibt sich $u\,\mathrm{I}\,z$, $s(u)<s(z)$ und $s(u\gamma)>s(z\gamma)$. Daraus folgt,

daß γ nicht gleich δ^{-1} sein kann, denn das würde $u \in B$ bedeuten [wegen (i)], d.h. $m = s(u) + 1 = 1$, im Widerspruch zu (iii). Also muß $\gamma = \sigma\delta$ mit B-stationärem σ sein.

(v) Wie in (iv) gezeigt, gilt $s(z\sigma\delta) < s(u\sigma\delta)$; andererseits ist aber auch, da σ ein B-stationärer Automorphismus ist,

$$s[(z\sigma\delta)\delta^{-1}] = s(z\sigma) = s(z) > s(u) = s(u\sigma) = s[(u\sigma\delta)\delta^{-1}].$$

Nun ergibt (i) mit $x = z\sigma\delta$ und $y = u\sigma\delta$, daß $z\sigma\delta \in B$ sein muß, also $z\sigma \in B\delta^{-1}$. Außerdem muß $z\sigma$ wie z die B-Stufe $m > 1$ haben. Man leitet nun leicht aus (4) her, daß $z\sigma$ dann nur der Punkt p oder eine Gerade px mit $c_1, c_2 \neq x \in C$ sein kann. Um den gewünschten Widerspruch zu erhalten, müssen wir also nur noch diese beiden Möglichkeiten ad absurdum führen. Da $q = p\lambda$ ist (die Kollineation $\lambda \in \Sigma$ wurde auf S. 420 definiert), und $q\delta = pq$ nach (4), ist $s(p\lambda\delta) = s(pq) = 3 > s(p)$. Es folgt $z\sigma \neq p$, also bleibt nur $z\sigma = px$ mit $c_1, c_2 \neq x \in C$, d.h. $m = s(z) = s(z\sigma) = 3$. Aus (4) folgt aber nun, mit $\sigma' = \sigma\lambda$, daß $s(z\sigma'\delta) = s[(px)\lambda\delta] = s[(pq)(bx)] = 4$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme über z, und damit ist Lemma 2.5 bewiesen.

Aus Lemma 2.5 ergibt sich nun sofort das Ziel dieses Abschnittes, nämlich der Beweis der in der Einleitung genannten Eigenschaft (I) für freie Ebenen:

Satz 2.3. *Jede freie Ebene besitzt eine Kollineationsgruppe, deren Transitivitätsklassen alle unendlich sind.*

Natürlich hat jede Γ-Klasse von $E = F(B)$ wegen Lemma 2.5 unendlich viele Elemente. Die in Γ enthaltenen Kollineationen bilden einen Normalteiler Λ vom Index zwei in Γ; wäre eine Λ-Klasse $x\Lambda$ endlich, so auch die entsprechende Γ-Klasse $x\Gamma$, denn es gilt $|x\Gamma| = 2|x\Lambda|$. Also hat Λ nur unendliche Transitivitätsklassen, d.h. E hat die Eigenschaft (I) schon bezüglich der Λ-Konjugiertheit (vgl. S. 419), und Satz 2.3 ist bewiesen.

3. Isomorphismen in offenen Ebenen

In diesem Abschnitt wird eine Verschärfung der in der Einleitung genannten Eigenschaft (II) für offene Ebenen bewiesen. In 3.4 und 3.5 werden Beispiele von offenen nicht freien Ebenen gebracht, welche zeigen, daß nicht alle offenen Ebenen auch die Eigenschaft (I) haben und daß (I) und (II) zusammen die freien Ebenen nicht charakterisieren, auch nicht innerhalb der offenen Ebenen.

3.1. Fastgeschlossene Konfigurationen. Der folgende Begriff ist grundlegend für diesen ganzen Abschnitt: Unter einer *fastgeschlossenen Konfiguration* verstehen wir eine endliche Inzidenzstruktur K, die ein Element $u = u(K)$ (ihr *Scheitelelement*) mit den folgenden Eigenschaften enthält:

(u 1) *u inzidiert mit genau zwei Elementen von K (den „Trägerelementen").*

(u 2) *Jedes $x \neq u$ von K inzidiert mit mindestens drei Elementen von K.*

Zu jeder fastgeschlossenen Konfiguration definieren wir die *abgeleiteten* Konfigurationen $K', K'', \ldots$ durch

$$K' = K - u(K), \qquad K^{(i+1)} = [K^{(i)}]', \qquad i = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Wegen der Endlichkeit von K bricht die Folge der $K^{(i)}$ nach endlich vielen Schritten ab: $K^{(i+1)}$ ist nur dann definiert, wenn $K^{(i)}$ noch eine fastgeschlossene Konfiguration ist, was i. a. nicht der Fall zu sein braucht. Ist $K^{(n)}$ die letzte fastgeschlossene Konfiguration in der Reihe der abgeleiteten Konfigurationen von K, so heißt n die *Ordnung* von K. Es ist klar, daß $n-i$ die Ordnung von $K^{(i)}$ ist.

Aus der Definition (5) der $K^{(i)}$ folgt, daß für $0 \leqq i < n$ einer der Träger von $K^{(i)}$ gleich dem Scheitel von $K^{(i+1)}$ sein muß. Dieses Element nennen wir $u_{i+1}(K)$, der andere Träger heißt $v_{i+1}(K)$. Die Elemente $u(K), u_1(K), \ldots, u_n(K)$ sind natürlich alle verschieden, während unter den $v_i(K)$, $i = 1, \ldots, n$, sowohl mehrere Male dasselbe Element als auch gewisse $u_j(K)$ auftreten können.

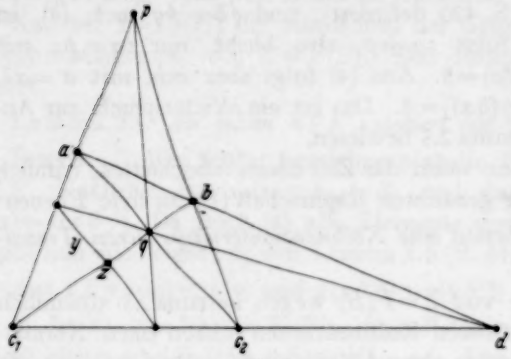


Fig. 2

In diesem Abschnitt betrachten wir nun ausschließlich solche fastgeschlossenen Konfigurationen, die sich als Teilmengen von offenen Ebenen auffassen lassen, also selbst offen sind. Im folgenden sei also E stets eine offene Ebene, und alle fastgeschlossenen Konfigurationen seien als in E enthalten angenommen.

Wir erledigen zuerst die Frage nach der Existenz von fastgeschlossenen Konfigurationen in E. Nach (S 3) von Lemma 1.2 (S. 413) ist der B-Sockel eines Elementes $x \in E$ genau dann eine fastgeschlossene Konfiguration mit Scheitel x, wenn jedes Element von $B \cap B(x)$ mit mindestens drei Elementen von $B(x)$ inzidiert; dabei kann B ein beliebiges freies Erzeugendensystem einer x enthaltenden Unterebene von E sein. Fig. 2 zeigt zwei besonders einfache Beispiele: B ist hier ein Basisviereck $Q = \{a, b, c_1, c_2\}$ der von Q frei erzeugten Unter-F_4 von E (vgl. Satz 1.1, S. 417), und die beiden Sockel $Q(y)$, $Q(z)$ (vgl. Fig. 2) sind fastgeschlossene Konfigurationen der Ordnungen 0 bzw. 1. Der Übergang von $Q(y)$ nach $Q(z)$ stellt ein einfaches Beispiel für das in dem folgenden Lemma ausgesprochene Konstruktionsprinzip für fastgeschlossene Konfigurationen beliebig hoher Ordnung in E dar:

Lemma 3.1. *Ist K eine fastgeschlossene Konfiguration in E mit dem Scheitel u, so gibt es ein mit u gleichartiges Element $v \in K$ derart, daß $K + uv$ eine fastgeschlossene Konfiguration ist, deren Ordnung die von K um Eins übertrifft.*

Beweis. Natürlich erfüllt jedes $v \in K$ mit $uv \notin K$ diese Bedingung, man braucht also nur die Existenz eines solchen v nachzuweisen. Diese ergibt sich aber sofort aus (u 1) und der aus der Definition der fastgeschlossenen Konfiguration leicht folgenden Tatsache, daß K ein zu u verschiedenartiges

und mit u nicht inzidentes Element w enthält: eines der drei mit w inzidenten Elemente x muß die Eigenschaft $ux \notin K$ haben.

3.2. Die Scheitelmenge einer offenen Ebene. Die Menge aller derjenigen Elemente einer offenen Ebene E, welche Scheitelelemente von fastgeschlossenen Konfigurationen in E sind, heiße die *Scheitelmenge* von E, sie wird durch $S(E)$ bezeichnet. Ist $y \in S(E)$, also $y = u(K)$ für eine fastgeschlossene Konfiguration K in E, und ist x einer der beiden Träger von y in K, so heißt x im Falle $x \in S(E)$ ein *Vorgänger* von y und y ein *Nachfolger* von x. Allgemein heißt das Element $x \in S(E)$ *früher* als das Element $y \in S(E)$, oder y *später* als x, wenn es eine Folge $x = u_0, u_1, \ldots, u_k = y$ $(k > 0)$ gibt derart, daß u_i Vorgänger von u_{i+1} ist $(i = 0, \ldots, k-1)$.

Lemma 3.2. *Die Früher-Relation in der Scheitelmenge $S(E)$ einer offenen Ebene E definiert eine teilweise Ordnung in $S(E)$, die bei jedem Automorphismus von E erhalten bleibt.*

Beweis. Das Vorgänger- und Nachfolgersein von Elementen in $S(E)$ ist nach Definition eine bei allen Automorphismen erhalten bleibende Eigenschaft; also bleibt auch die Früher-Relation erhalten. Zum Beweis des Lemmas muß daher nur noch gezeigt werden, daß $S(E)$ durch die Früher-Relation teilweise geordnet wird. Da die Transitivität der Früher-Relation trivial ist, beweisen wir nur ihre Antisymmetrie: Angenommen $u \neq u'$, und jedes der Elemente u, u' sei früher als das andere. Dann existieren nach Definition Elemente $u = u_0, \ldots, u_k = u', \ldots, u_n = u$ mit folgenden Eigenschaften: $u_i = u(K_i)$ für fastgeschlossene Konfigurationen K_i in E, $i = 0, \ldots, k, \ldots, n$; u_i ist einer der Träger von K_{i+1}. Dann aber sieht man sofort, daß $K = \bigcup_{i=0}^{n} K_i$ eine geschlossene Konfiguration in E sein müßte; dieser Widerspruch zur Offenheit von E beweist Lemma 3.2.

Eine genauere Untersuchung der Früher-Relation in der Scheitelmenge $S(E)$ einer offenen Ebene E liefert ein Verfahren zum Beweis der Eigenschaft (II) in jeder offenen Ebene. Das wird im nächsten Paragraphen 3.3 geschehen; vorher soll aber noch gezeigt werden, daß stets $S(E) \neq E$ gilt für den Fall, daß E eine freie Ebene ist.

Lemma 3.3. *Eine in der freien Ebenenerweiterung $F(M)$ enthaltene fastgeschlossene Konfiguration mit dem Scheitel u liegt in $M \cup M(u)$.*

Beweis. Angenommen, die fastgeschlossene Konfiguration $K \subseteq F(M)$ mit $u(K) = u$ enthielte Elemente, die weder in M noch in $M(u)$ liegen; dann sei z unter diesen eines mit maximaler M-Stufe m. Natürlich ist $m > 0$, da $z \notin M$, und es folgt, daß von den mindestens drei mit z inzidenten Elementen von K wenigstens eines höhere M-Stufe hat als z. Ist w ein solches Element, so muß w wegen der Maximaleigenschaft von z in $M(u)$ liegen. Dann aber würde auch $z \in M(u)$ folgen, entgegen unserer Annahme. Damit ist Lemma 3.3 bewiesen.

Satz 3.1. *Ist $E = F(B)$ eine freie Ebene mit der Basis B, so ist der Durchschnitt von B_3 und $S(E)$ leer. Ist E eine F_4 mit dem Basisviereck Q (vgl. S. 416), so ist sogar der Durchschnitt von Q_4 und $S(E)$ leer.*

Beweis. Zunächst folgt aus der Basisdefinition von S. 416, daß $B=\{a, b, c\}\cup C$ keine fastgeschlossenen Konfigurationen enthalten kann. Also muß nach Lemma 3.3 jedes in einer fastgeschlossenen Konfiguration K von E enthaltene Element von B mit drei verschiedenen Elementen von K inzidieren. Sodann ergibt Lemma 3.3, daß K schon in $B(u)\cup\{c\}$ enthalten sein muß [$u=u(K)$], und für den Fall $E=F_4$ sogar in $Q(u)$. Man muß sich also nur noch davon überzeugen, daß $B(x)\cup\{c\}$ für kein $x\in B_3$, bzw. $Q(x)$ für kein $x\in Q_4$, eine fastgeschlossene Konfiguration enthält; das aber kann man den — noch sehr einfach gebauten — Sockeln $B(x)$ bzw. $Q(x)$ dieser Art direkt ansehen.

Daß B_4 im Falle $E\neq F_4$ sehr wohl Scheitelelemente enthalten kann, zeigt folgendes Beispiel: Sei $B=\{a, b, c\}\cup C$ mit $|C|>2$, und seien c_1, c_2, c_3 drei verschiedene Elemente von C. Ist dann $p_i=(ac_{i+1})(bc_{i+2})$ und $q_i=(ac_{i+2})(bc_{i+1})$, wobei die Indizes modulo 3 zu nehmen sind, so ist mit $u_i=(p_{i+1}q_{i+1})(p_{i+2}q_{i+2})$ jede der Mengen $B(u_i)+c$ $(i=1, 2, 3)$ eine fastgeschlossene Konfiguration mit Scheitel u_i. Dieses Beispiel, zusammen mit dem von Fig. 2 (wo $s_Q(y)=5$) zeigt, daß Satz 3.1 nicht verbessert werden kann.

Satz 3.1 erlaubt es, schnell die Existenz von offenen, nicht freien Ebenen nachzuweisen. Man kann nämlich leicht offene Ebenen unendlicher Höhe konstruieren, für welche $S(E)=E$ gilt. Ein Beispiel einer solchen Ebene findet sich in 3.5.

3.3. TRÄGERFOLGEN. Lemma 3.4. *Haben zwei fastgeschlossene Konfigurationen in einer offenen Ebene denselben Scheitel, so haben sie auch dieselben Träger.*

Beweis. Wären K und L zwei fastgeschlossene Konfigurationen in der offenen Ebene E mit gleichem Scheitel u, für welche die Behauptung nicht zutrifft, so wäre u also mit mindestens drei Elementen von $K\cup L$ inzident, und es würde folgen, daß diese (natürlich endliche) Teilmenge von E eine geschlossene Konfiguration wäre, im Widerspruch zur Offenheit von E.

Lemma 3.5. *Haben zwei fastgeschlossene Konfigurationen K, L in der offenen Ebene E von Null verschiedene Ordnung und denselben Scheitel u, so ist $u_1(K)=u_1(L)$ und $v_1(K)=v_1(L)$.*

Beweis. Wegen Lemma 3.4 besteht zu der Behauptung höchstens die Alternative $u_1(K)=v_1(L)$, $v_1(K)=u_1(L)$; diese führt aber auf einen Widerspruch: Da L von Null verschiedene Ordnung hat, ist L' noch eine fastgeschlossene Konfiguration. Also inzidiert das vom Scheitel $u_1(L)$ von L' verschiedene Element $v_1(L)$ mit mindestens drei verschiedenen Elementen von L', und ebenso folgert man, daß $v_1(K)$ mit mindestens drei Elementen von K' inzidiert. Wären nun, wie oben angenommen, $v_1(K)$ und $v_1(L)$ verschiedene Elemente, so würde sich ergeben, daß $K\cup L-u$ eine geschlossene Konfiguration wäre, wieder im Widerspruch zur Offenheit von E.

Die beiden soeben bewiesenen Lemmata bilden das wesentliche Hilfsmittel für den Beweis des folgenden Satzes:

Satz 3.2. *Zu jedem Element x der Scheitelmenge $S(E)$ einer offenen Ebene E existiert eine (und nur eine) Folge von Elementen $u_i(x), v_i(x)$ aus E $(i=1, 2, \ldots)$*

derart, daß für jede fastgeschlossene Konfiguration K in E mit Scheitel x und mit beliebiger Ordnung n gilt: $u_i(K)=u_i(x)$, $v_i(K)=v_i(x)$, $i=1,\ldots,n$.

Beweis. Offenbar genügt es, folgendes zu zeigen: Ist n das Minimum der Ordnungen zweier fastgeschlossener Konfigurationen K und L in E mit demselben Scheitel x, so ist $u_i(K)=u_i(L)$ und $v_i(K)=v_i(L)$ für $i=1,\ldots,n$. Ist $n=0$, so ist nichts zu beweisen. Ist aber $n>0$, so besagt Lemma 3.5 gerade die Richtigkeit dieser Behauptung für $i=1$, und für $1<i\leqq n$ folgt ihre Richtigkeit für i aus der für $i-1$ durch Anwendung von Lemma 3.5 auf die fastgeschlossenen Konfigurationen $K^{(i-1)}$ und $L^{(i-1)}$, die ja sodann (nach dem bei der Definition der Ordnung einer fastgeschlossenen Konfiguration bemerkten) sicher noch von Null verschiedene Ordnung haben.

Die nach Satz 3.2 durch x eindeutig bestimmte Folge $T(x)=[u_1(x), v_1(x), u_2(x),\ldots]$ nennen wir die *Trägerfolge*, die von ihren $2n$ ersten Elementen gebildete endliche Teilfolge $T_n(x)=[u_1(x), v_1(x),\ldots, u_n(x), v_n(x)]$ die *n-te Trägerfolge* von x. Die Folge $T(x)$ kann gleich einer der $T_n(x)$ sein; ist z.B. z das in Fig. 2 abgebildete Element der von $Q=\{a, b, c_1, c_2\}$ frei erzeugten F_4, so ist $T(z)=[y, bc_1]=T_1(z)$, denn nach Satz 3.1 ist $y=u_1(z)$ wegen $s_B(y)=5$ zwar noch in $S(E)$, aber jede fastgeschlossene Konfiguration mit Scheitel y hat die Ordnung Null. Wie in 3.5 gezeigt werden wird, gibt es offene Ebenen E, bei denen $T(x)$ für jedes $x\in E$ unendlich ist. Mit $\{T(x)\}$ bzw. $\{T_n(x)\}$ werden die (ungeordneten) *Mengen* der Elemente von $T(x)$ bzw. $T_n(x)$ bezeichnet.

Das Element $x\in E$ heiße nun *n-konjugiert* zu $y\in E$ ($n=0, 1,\ldots$), wenn es eine $T_n(x)$ enthaltende Unterebene E' von E gibt, welche sich auf eine $T_n(y)$ enthaltende Unterebene E'' derart isomorph abbilden läßt, daß bei diesem Isomorphismus x in y, $u_i(x)$ in $u_i(y)$ und $v_i(x)$ in $v_i(y)$ übergeht ($i=1,\ldots,n$). Es ist klar, daß das n-Konjugiertsein für jedes n eine Äquivalenzrelation ist. Sind x und y durch Automorphismen von E ineinander überführbar, so sind sie natürlich n-konjugiert für jedes n. Zwei beliebige Elemente $x, y\in E$ sind stets 0-konjugiert, wie man aus den Sätzen 1.1 und 3.1 leicht herleitet.

Satz 3.3. *In jeder offenen projektiven Ebene existiert eine unendliche Menge Z von Elementen mit folgender Eigenschaft: Sind z, z' zwei verschiedene Elemente von Z, so gibt es ein $n>0$ derart, daß z und z' nicht zueinander n-konjugiert sind.*

Da nach den obigen Bemerkungen das n-Konjugiertsein eine Abschwächung des in der Einleitung definierten Begriffes der Konjugiertheit ist (auch wenn man dort das Wort „Kollineationen" durch „Automorphismen" ersetzt; vgl. S. 412), wird mit dem Beweis des Satzes 3.3 auch der Nachweis der Gültigkeit von (II) für die offenen Ebenen erbracht sein.

Beweis. Da eine notwendige Folge der n-Konjugiertheit von x und y natürlich die Isomorphie der Inzidenzstrukturen $\{T_n(x)\}$ und $\{T_n(y)\}$ ist, genügt es, eine Folge $Z=(z_1, z_2,\ldots)$ von Elementen in E derart zu konstruieren, daß $\{T_n(z_i)\}$ und $\{T_n(z_j)\}$ bei $i\neq j$ für hinreichend hohes n nichtisomorph sind. Wir werden Z als eine Folge von kollinearen Punkten konstruieren.

Wir beginnen mit einem Viereck $Q=\{a, b, c_1, c_2\}$ in der vorgegebenen offenen Ebene E und konstruieren zunächst die Elemente y und z wie in Fig. 2 (S. 428). Sodann sei $x_0=(az)(qd)$ und $x_1=(c_1x_0)(pq)$. Damit haben wir die beiden ersten Punkte einer Folge $X=(x_0, x_1, \ldots)$ von Punkten aus $[Q]$ $(=F(Q)$ nach Satz 1.1) mit folgenden Eigenschaften konstruiert:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{(a) } Q(x_0) \text{ ist eine } Q(z) \text{ enthaltende fastgeschlossene Konfiguration.} \\ \text{(b) } Q(x_n) < Q(x_{n+1});\ u_1(x_{n+1}) = x_n x_{n+1} \\ \text{(c) } x_n \neq d, p, q,\ y(dq),\ y(pq) \\ \text{(d) } x_{2k} \mathrel{I} dq, \quad x_{2k+1} \mathrel{I} pq, \quad k=0, 1, \ldots. \end{array}\right\} n = 0, 1, \ldots.$$

Ist x_n mit diesen Eigenschaften schon gefunden, so liegt eine der Verbindungsgeraden von x_n mit den Punkten von Q wegen $x_n \neq d, p, q$ nicht in $Q(x_n)$ und schneidet diejenige der Geraden dq, pq, welche nicht mit x_n inzidiert, in einem nicht zu $Q(x_n)$ gehörigen Punkt, den wir x_{n+1} nennen können, da er, wie man leicht einsieht, wieder den Bedingungen (6) genügt.

Nachdem wir also eine Folge $X=(x_0, x_1, \ldots)$ mit den Eigenschaften (6) konstruiert haben, definieren wir jetzt $z_n=y(x_n x_{n-1})$ für $n=1, 2, \ldots$ (in Fig. 3 sind die x_n und die z_n bis $n=2$ eingezeichnet). Da x_n und z_n gleiche Q-Stufe haben und andererseits $s_Q(x_n)=2n+8 \neq s_Q(x_m)$ für $m \neq n$ ist, müssen die z_n alle verschieden sein. Ferner unterscheiden sich die Sockel $Q(x_n)$ und $Q(z_n)$ nach Konstruktion nur durch die Elemente x_n bzw. z_n selbst, und es folgt:

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{(a)} \quad v_1(z_n) = y \\ \text{(b) } u_{2k-1}(z_n) = x_{n-k} x_{n-k+1},\ u_{2k}(z_n) = x_{n-k},\ k = 1, \ldots, n \\ \text{(c) } u_{2n+1}(z_n) = az,\ u_{2n+2}(z_n) = z,\ u_{2n+3}(z_n) = y. \end{array}\right\} n = 1, 2, \ldots$$

Nun sei $m<n$. Dann ist $u_{2m+3}(z_m)=y=v_1(z_m)$, nach (7). Wären z_m und z_n zueinander $(2m+3)$-konjugiert, so müßte $u_{2m+3}=v_1$ auch für die Trägerfolge von z_n gelten; es ist aber $u_{2m-3}(z_n)$ entweder gleich az oder gleich $x_{n-m-2} x_{n-m-1}$ (je nachdem ob m gleich oder kleiner als $n-1$ ist), also immer von $v_1(z_n)=y$ verschieden. Also sind z_m und z_n nicht $(2m+3)$-konjugiert, und Satz 3.3 ist bewiesen.

3.4. EINE OFFENE EBENE MIT FIXELEMENT. In diesem Paragraphen wird durch ein Beispiel gezeigt, daß die offenen Ebenen die im zweiten Abschnitt für freie Ebenen bewiesene Eigenschaft (I) im allgemeinen nicht zu haben brauchen. Bei der zu konstruierenden Ebene ist eine Konjugiertenklasse (im Sinne von S. 419, mit A gleich der vollen Automorphismengruppe) nicht nur endlich, sondern besteht sogar nur aus einem einzigen Element.

Es sei wieder $Q=\{a, b, c_1, c_2\}$ ein Viereck und $E=F(Q)$ die von Q frei den Eigenschaften (6) wie in 3.3 (vgl. Fig. 3). Alle diese Punkte sind erzeugte F_r. Dann konstruieren wir wieder die Punkte $z, x_1, x_2, \ldots$ mit Scheitelelementen von fastgeschlossenen Konfigurationen, nämlich ihren Q-Sockeln, und daher Elemente von $S(E)$. Also ergibt Satz 3.1, daß die von dem

Viereck $V=\{z, x_0, x_1, c_2\}$ erzeugte Unterebene $[V]$ von E verschieden ist. Da andererseits $[V]=F(V)$ ist (nach Satz 1.1), wird durch die Abbildungsvorschrift $a\to z$, $b\to x_0$, $c_1\to x_1$, $c_2\to c_2$ ein Isomorphismus π von E auf $[V]$ erklärt, welcher ein Monomorphismus, aber kein Automorphismus von E ist. Also läßt sich E nach Satz 1.3 in eine bezüglich π uniforme offene Ebene E' unendlicher Höhe einbetten. Wir zeigen, daß *der Punkt* $c_2\in E\subset E'$ *Fixpunkt jedes Automorphismus von* E' *ist.*

Um das zu beweisen, brauchen wir nur $S(E')=E'-c_2$ nachzuweisen, denn $S(E')$ geht natürlich bei jedem Automorphismus von E' in sich über. Jede fastgeschlossene Konfiguration in E' liegt nun wegen ihrer Endlichkeit schon in einem der Glieder E_n von E' (vgl. S. 418); also kann ihr Scheitel nach

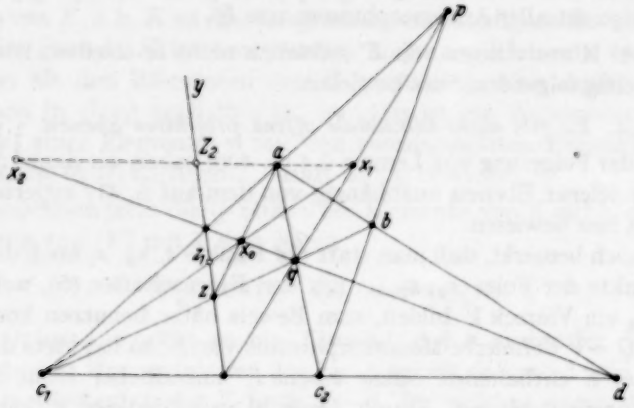


Fig. 3

Satz 3.1 nicht gleich c_2 sein, und es folgt $c_2\notin S(E')$. Es bleibt zu zeigen, daß alle $x\neq c_2$ von E' zu $S(E')$ gehören. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es ein Element $v\in E'$ mit $c_2\neq v\notin S(E')$. Dieses Element müßte bereits in einem Glied E_n liegen, also läge $w=v\pi'^{n+1}$ in der von V erzeugten Unterebene $E\pi$ von E, und da π' ein Automorphismus (nämlich der π in E induzierende, vgl. Satz 1.3) von E' ist, wäre auch $w\notin S(E')$, und wir hätten mit w ein von c_2 verschiedenes und nicht in $S(E')$ liegendes Element in $[V]$ gefunden.

Wir betrachten jetzt die Menge $K=Q(x_1)\cup V(w)$ (in Fig. 3 sind die Elemente von $Q(x_1)$ stärker gezeichnet als die anderen). Höchstens die Elemente x_1 und w von K inzidieren mit weniger als drei Elementen von K, denn $Q(x_1)$ ist nach Konstruktion eine fastgeschlossene Konfiguration, welche die zu $V(w)$ gehörigen und möglicherweise mit weniger als drei Elementen von $V(w)$ inzidenten Elemente z, x_0, c_2 enthält. Da K keine geschlossene Konfiguration sein kann, inzidiert wenigstens eines der Elemente x_1, w mit nur zwei Elementen von K, und wegen $w\notin S(E')$ ist das für x_1 sogar bestimmt der Fall. Also sind x_0x_1 und qx_1 genau die beiden zu K gehörigen mit x_1 inzidenten Geraden. Nun ist $qx_1\notin[V]$, denn sonst wäre $s_Q(qx_1)<s_Q(x_1)$ und $s_V(qx_1)>s_V(x_1)$,

so daß nach Lemma 1.6 ein $u \in V$ mit $x_1 \in Q(u)$ existieren würde; das ist aber nicht möglich, denn dann müßte $u \neq x_1$, also $s_Q(u) > s_Q(x_1)$ sein, im Widerspruch zu der Tatsache, daß nach Konstruktion x_1 maximale Q-Stufe in V hat. Also ist $q\,x_1$ auch nicht in $V(w)$ enthalten, und es folgt, daß $V(w)$ höchstens eine Gerade durch $x_1 \in V$ enthält, nämlich die Gerade $x_0 x_1$. Aus der Sockeldefinition (S. 413) ergibt sich daraus aber sofort, daß die V-Stufe von w höchstens gleich 1 ist. Also müßte w einer der Punkte von V oder eine der Verbindungsgeraden dieser Punkte sein. Die Q-Sockel der von $c_2$verschiedenen unter diesen Elementen sind nun aber, wie man sofort der Fig. 3 entnimmt, fastgeschlossene Konfigurationen mit diesen Elementen als Scheiteln. Wegen $w \notin S(E')$ würde nun $w = c_2$ folgen, im Widerspruch zu unserer Annahme. Also ist c_2 tatsächlich das einzige nicht in $S(E')$ liegende Element von E' und deshalb Fixpunkt aller Automorphismen von E'.

Da c_2 bei Korrelationen von E' natürlich nicht festbleiben könnte, haben wir gleichzeitig folgenden Satz bewiesen:

Satz 3.4. *Es gibt nicht-selbstduale offene projektive Ebenen.*

Wegen der Folgerung von Lemma 2.4 (S. 426) haben wir damit die Existenz nicht-freier offener Ebenen unabhängig von dem auf S. 417 zitierten Satz von KOPEJKINA neu bewiesen.

Es sei noch bemerkt, daß man statt der Punkte z, x_0, x_1 auch drei beliebige andere Punkte der Folge $x_0, x_1, \ldots$ mit den Eigenschaften (6), welche zusammen mit c_2 ein Viereck V bilden, zum Beweis hätte benutzen können. Ist π der durch $Q \to V$ definierte Monomorphismus von E, so hat stets die bezüglich π uniforme, E enthaltende offene Ebene E' unendlicher Höhe nur c_2 festlassende Automorphismen. Durch Auswahl verschiedener V kann man auf diese Weise verhältnismäßig einfach zeigen, daß es unendlich viele nichtisomorphe offene Ebenen mit Fixelement gibt.

3.5. EINE OFFENE, NICHT-FREIE EBENE MIT DER EIGENSCHAFT (I). In diesem letzen Paragraphen wird an einem weiteren Beispiel gezeigt, daß die freien Ebenen nicht die einzigen offenen Ebenen mit der Eigenschaft (I) sind, was man nach 3.4 vermuten könnte. Das jetzt zu konstruierende Beispiel lehnt sich eng an das des vorigen Paragraphen an; es wird eine offene, aber nicht freie Ebene angegeben, welche eine zyklische Gruppe von Kollineationen mit lauter unendlichen Transitivitätsgebieten besitzt.

Es sei wieder $E = F(Q)$ die von $Q = \{a, b, c_1, c_2\}$ frei erzeugte F_4, und $z, x_1, x_2, \ldots$ mit den Eigenschaften (6) wie in 3.3. Wieder ergibt Satz 3.1, daß die von $V = \{z, x_0, x_1, x_2\}$ erzeugte Unterebene $[V]$ von E verschieden ist (man beachte, daß das Symbol V jetzt ein anderes Viereck bezeichnet als in 3.4). Den durch die Vorschrift $a \to z$, $b \to x_0$, $c_1 \to x_1$, $c_2 \to x_2$ definierten Monomorphismus von E mit der Bildebene $[V]$ bezeichnen wir wieder mit π, und E' sei die bezüglich π uniforme E enthaltende offene Ebene unendlicher Höhe mit dem π in E induzierenden Automorphismus π'. Wir wollen beweisen: *E' ist keine freie Ebene*, und *die von π' erzeugte zyklische Automorphismengruppe von E' hat nur unendliche Transitivitätsgebiete.*

Die erste dieser Behauptungen ist wegen Satz 3.1 bewiesen, wenn $S(E')=E'$ gezeigt wird. Das kann man aber leicht ebenso einsehen wie in 3.4 die Tatsache, daß dort der Punkt c_2 das einzige nicht in $S(E')$ gelegene Element von E' war. Dieser Beweis soll daher jetzt nicht ausgeführt werden. Es bleibt übrig zu zeigen, daß die von π' erzeugte Kollineationsgruppe von E' lauter unendliche Transitivitätsgebiete hat. Dazu beweisen wir zunächst:

$$Q(x_2)\cap[V]=V\cup\{x_0x_1,\ x_1x_2,\ x_2x_0,\ x_0z,\ a\}. \tag{8}$$

[Die Elemente von $Q(x_2)$ sind genau die von z_1, z_2 verschiedenen der Fig. 3.] Wäre (8) falsch, so müßte es Elemente in $Q(x_2)\cap[V]$ geben, welche weder zu V noch zu $\{x_0x_1, x_1x_2, x_2x_0, x_0z, a\}$ gehören. Sei w ein solches Element, und $K=Q(x_2)\cup V(w)$. Da $x_2\neq w\in Q(x_2)$ ist, inzidiert w mit mindestens drei Elementen von K, d.h. K ist eine fastgeschlossene Konfiguration mit Scheitel x_2 (nach Definition von K können nämlich höchstens Elemente von Q oder V mit weniger als drei Elementen von K inzidieren). Nun ergibt Lemma 3.3, daß K schon in $Q(x_2)$ enthalten ist, und das ist ein Widerspruch, denn der Sockel $V(w)$ eines Elementes w mit den vorausgesetzten Eigenschaften kann natürlich nicht in $Q(x_2)$ liegen. Damit ist (8) bewiesen.

Wir bezeichnen jetzt die Q-Stufen der Elemente von E mit s, die V-Stufen der Elemente von $[V]$ mit s' und zeigen:

$$s'(x)<s(x)\quad\text{für}\quad a\neq x\in[V]. \tag{9}$$

Wäre das falsch, so gäbe es ein Element $w\neq a$ minimaler V-Stufe mit $s(w)\leqq s'(w)=m$. Man entnimmt der Fig. 3 sofort, daß $m>1$ sein muß. Mit w inzidiert ein Element u der V-Stufe $m-1$, für welches wegen der Minimaleigenschaft von m natürlich $m-1<s(u)$ gilt. Da $s(w)-s'(w)\equiv 0 \bmod 2$ ist, folgt sogar $s(u)>m$, und damit haben wir ein Elementepaar u, w mit $s(w)<s(u)$ und $s'(w)>s'(u)$ gefunden. Nach Lemma 1.6 existiert nun ein Element $v\in V$ mit $u\in Q(v)$. Das Element w müßte dann aber auch in $Q(v)$ liegen, und da nach Konstruktion $Q(x_2)=\bigcup_{v\in V}Q(v)$ ist, folgt $w\in Q(x_2)$. Da w natürlich in $[Q]$ liegt, ergibt nun (8), daß w eines der neun Elemente $a, z, x_0, x_1, x_2, x_0x_1, x_1x_2, x_2x_0, x_0z$ sein müßte. Aber a ist das einzige dieser Elemente, dessen Q'-Stufe höher als seine Q-Stufe ist, wie man direkt nachprüft. Also würde jetzt $w=a$ folgen, im Widerspruch zu unserer Annahme $w\neq a$. Damit ist (9) bewiesen.

Nun ist natürlich $s(x)=s_Q(x)=s_{Q\pi}(x\pi)=s'(x\pi)$ für alle $x\in E$, wobei π den oben durch die Abbildungsvorschrift $Q\to V$ erklärten Monomorphismus von E auf $[V]$ bedeutet. Also ist $s'(y)=s(y\pi^{-1})$ für alle $y\in[V]$, und aus (9) folgt $s(y\pi^{-1})<s(y)$ für alle $y\neq a$ von $[V]$. Wegen $d\pi=a$ (vgl. Fig. 3) bedeutet das:

$$s(x)<s(x\pi)\quad\text{für}\quad d\neq x\in E. \tag{10}$$

Mit Hilfe von (10) läßt sich nun die zweite der oben aufgestellten Behauptungen leicht beweisen: Gäbe es eine endliche Transitivitätsklasse T der von

π' erzeugten zyklischen Kollineationsgruppe von E', so müßte T schon in einem der Glieder E_n von E' liegen (vgl. S. 418), und folglich wäre $T = T\pi'^n$ in E selbst enthalten. Wegen (10) könnte T nur aus Elementen mit Q-Stufe $\leqq 2$ bestehen; aber aus der Definition von π ergibt sich sofort, daß alle von d verschiedenen Elemente von Q_2 durch π auf Elemente mit Q-Stufe > 2 abgebildet werden, insbesondere das Element $a = d\pi$ auf das Element z der Q-Stufe 6. Dieser Widerspruch beweist die Nichtexistenz endlicher π'-Klassen, und damit ist alles bewiesen.

Wie bei dem Beispiel von 3.4 hätte man auch hier V anders definieren können; mit jedem Viereck V von Punkten der Folge $z, x_0, x_1, \ldots$ hätte man ebenfalls die Eigenschaft (I) für E' beweisen können. Auf diese Weise erhält man das Resultat, daß es sogar unendlich viele nichtisomorphe offene, aber nicht freie Ebenen mit der Eigenschaft (I) gibt.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß der auf S. 417 zitierte Satz von KOPEJKINA auch in 3.5 nirgends benutzt worden ist. Will man diesen Satz benutzen, so kann man noch einfachere Beispiele offener nicht-freier Ebenen mit der Eigenschaft (I) angeben.

Anhang: Ein Einbettungssatz

Das Thema dieses Anhanges ist ein Satz, der eigentlich schon auf S. 418 (bei Satz 1.3) hätte bewiesen werden müssen, der aber deshalb auf später verschoben wurde, weil seine Gültigkeit sich auf einen viel größeren Bereich erstreckt als den der projektiven Ebenen.

Unter einer *allgemeinen Algebra* versteht man eine Menge A zusammen mit einer Folge $R = (r_j)$ [$j \in J$ = beliebige Indexmenge] von Relationen; r_j ist eine Untermenge einer Produktmenge A^{n_j}. Zu jeder allgemeinen Algebra gehört also eine Folge $N = (n_j)_{j \in J}$ von natürlichen Zahlen. Jede Gruppe G ist eine allgemeine Algebra: R besteht aus einer einzigen (ternären) Relation $r \subseteq G^3$, und $(x, y, z) \in r$ gilt genau dann, wenn $xy = z$ ist. Jede projektive Ebene E ist eine allgemeine Algebra: R besteht aus einer einzigen (binären) Relation $i \subseteq E^2$, und $(x, y) \in i$ gilt genau dann, wenn $x \mathrm{I} y$ ist.

Zwei allgemeine Algebren A und A' heißen *vergleichbar*, wenn sie gleiche Indexmenge J und gleiche Folge N besitzen. Alle Gruppen sind also vergleichbar, und dasselbe gilt für alle projektive Ebenen; aber keine Gruppe ist mit einer projektiven Ebene vergleichbar. Eine Abbildung π einer allgemeinen Algebra A auf eine vergleichbare A' heißt nun ein *Homomorphismus*, wenn für jedes $j \in J$ aus $(x_1, \ldots, x_{n_j}) \in r_j$ stets $(x_1\pi, \ldots, x_{n_j}\pi) \in r_j'$ folgt. Im allgemeinen kann man für die Relation r_j' von A' wieder r_j schreiben, ohne Mißverständnisse befürchten zu müssen.

Ebenso wie auf S. 412 für projektive Ebenen werden nun spezielle Homomorphismen von allgemeinen Algebren Endo-, Epi-, Iso-, Mono- und Automorphismen genannt. Wie üblich ist das Produkt $\pi\lambda$ zweier Endomorphismen π, λ von A durch $x(\pi\lambda) = (x\pi)\lambda$ für alle $x \in A$ definiert; π und λ heißen *vertauschbar*, wenn $\pi\lambda = \lambda\pi$ ist. Die Menge aller mit π vertauschbaren Endomorphismen wird mit $\Phi(\pi)$ bezeichnet.

Der erwähnte Einbettungssatz lautet nun:

Satz. *Es sei A eine allgemeine Algebra mit einem Monomorphismus π. Dann gibt es eine mit A vergleichbare Algebra A' mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *A' ist die Vereinigungsmenge einer Folge von zu A isomorphen Unteralgebren $A=A_0\subseteq A_1\subseteq\ldots$ (also ist A in A' eingebettet).*

(b) *A' besitzt einen π in A induzierenden Automorphismus π'.*

(c) *Zu jedem $\lambda\in\Phi(\pi)$ existiert ein λ in A induzierender Endomorphismus λ' von A'.*

(d) *Alle diese λ' sind mit π' vertauschbar.*

(e) *Ist $\lambda\in\Phi(\pi)$ und $A\pi^k\subseteq A\lambda$ für eine natürliche Zahl k, so ist λ' ein Epimorphismus.*

(f) *Ist $\lambda\in\Phi(\pi)$ ein Monomorphismus, so auch das entsprechende λ'.*

Beweis. Ist $A\pi=A$, so ist π ein Automorphismus, und wir sind fertig: $A'=A$, $\pi'=\pi$, $\lambda'=\lambda$ für alle $\lambda\in\Phi(\pi)$. Also kann $A\pi\neq A$ angenommen werden. Dann betrachten wir eine abzählbar-unendliche Folge $A_0, A_1, \ldots$ von zu A isomorphen Algebren und in jeder A_n die π und den $\lambda\in\varphi(\pi)$ entsprechenden Endomorphismen π_n und λ_n $(n=0, 1, \ldots)$. Durch die Identifizierungen $A_0=A$, $A_n=A_{n+1}\pi_{n+1}$ werden die A_n ineinander echt eingebettet: $A=A_0=A_1\pi_1\subset A_1=A_2\pi_2\subset\ldots$; wir zeigen, daß die Vereinigungsmenge $A'=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$ die behaupteten Eigenschaften hat.

Es ist klar, daß A' eine mit A vergleichbare allgemeine Algebra ist: jeder Relation r von A wird folgendermaßen umkehrbar eindeutig eine Relation r' von A' zugeordnet: Sind $x_1, \ldots, x_n\in A'$, so gibt es ein k mit $x_1, \ldots, x_n\in A_k$, und nun soll $(x_1, \ldots, x_n)\in r'$ genau dann gelten, wenn $(x_1, \ldots, x_n)\in r_k$ gilt, wobei r_k die r entsprechende Relation von A_k ist.

Ist λ ein beliebiger Endomorphismus von A und λ_n der entsprechende Endomorphismus von A_n, so ist also das π_{n+1}-Urbild des λ_n-Bildes eines Elementes $x\in A_n\subset A_{n+1}$ gleich dem λ_{n+1}-Bild seines π_{n+1}-Urbildes, das heißt

$$\lambda_n=\pi_{n+1}^{-1}\lambda_{n+1}\pi_{n+1}\qquad(n=0, 1, \ldots).$$

Ist nun $\lambda\in\Phi(\pi)$, so sind λ_{n+1} und π_{n+1} vertauschbar, und es ergibt sich $x\lambda_n=x\lambda_{n+1}$ für alle $x\in A_n$, d. h. jedes λ_n wird von λ_{n+1} induziert. Also haben alle λ_n eine gemeinsame Fortsetzung λ', welche ein Endomorphismus von A' sein muß. Wegen $\pi\in\Phi(\pi)$ wird auch π durch ein π' von A' induziert, und man sieht sofort, daß alle λ' [wo $\lambda\in\Phi(\pi)$] mit π' vertauschbar sind. Ist λ umkehrbar, so auch alle λ_n, und λ' ist ein Monomorphismus. Wegen

$$A'\pi'=\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n\Big)\pi'=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n\pi_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{n-1}\cup A_0\pi_0=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n=A'$$

ergibt sich, daß π' sogar ein Automorphismus ist. Folglich sind auch alle π'^k Automorphismen von A', und ist $A\pi^k\subseteq A\lambda$ für ein $\lambda\in\Phi(\pi)$, so folgt

$$A_n\pi_n^k=A_n\pi'^k\subseteq A_n\lambda_n=A_n\lambda',$$

und daraus

$$A' = A'\pi'^k = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \pi'^k \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \lambda' = A'\lambda',$$

also $A'\lambda' = A'$, und λ' ist ein Epimorphismus. Damit ist alles bewiesen.

Für den Fall, daß A eine freie projektive Ebene ist, ergibt der Beweis, daß A' die bezüglich π uniforme A enthaltende offene projektive Ebene unendlicher Höhe ist. Aus dieser Bemerkung ergibt sich sofort die Richtigkeit von Satz 1.3.

Wir bemerken zum Schluß, daß man den Satz 1.3 auch aus einem viel tiefer liegenden Satz von B. H. NEUMANN [6] hätte herleiten können; jedoch hätte eine solche Herleitung nicht weniger Platz in Anspruch genommen als der Beweis des Satzes von S. 437.

Zusatz bei der Korrektur: Herr B. H. NEUMANN hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß Teile des Satzes von S. 437 in einer Fußnote der Arbeit *Extending partial endomorphisms of groups* von B. H. NEUMANN und HANNA NEUMANN [Proc. London Math. Soc. (3) **2**, 338—348 (1952)] bewiesen worden sind.

Literatur

[1] DEMBOWSKI, P.: Verallgemeinerungen von Transitivitätsklassen endlicher projektiver Ebenen. Math. Z. **69**, 59—89 (1958). — [2] HALL, M.: Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943). — [3] HALL, M.: Projective planes and related topics. Calif. Inst. Techn. 1954. — [4] KOPEJKINA, L. I.: Freie Zerlegungen von projektiven Ebenen. Isv. Akad. Nauk SSSR. **9**, 495—526 (1945). — [5] KUROSCH, A.: Gruppentheorie. Berlin 1953. — [6] NEUMANN, B. H.: An embedding theorem for algebraic systems. Proc. London Math. Soc. **4**, 138—153 (1954). — [7] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin 1955. — [8] SKORNYAKOV, L. A.: Projective planes. Translation 99 Amer. Math. Soc. [von Usp. Akad. Nauk. SSSR. **6**, 112—154 (1951)], Providence 1953.

Frankfurt a. M., Mathematisches Seminar der Universität

(Eingegangen am 4. Mai 1959)

FLEISCHER, I.
Math. Zeitschr. 72, 439–445 (1960)

Über Dualität in lineartopologischen Moduln

Von
ISIDORE FLEISCHER

1. Topologien auf abelschen Gruppen, die durch Angabe eines Nullfundamentalsystems von Untergruppen definiert werden können, sind schon häufig und von verschiedenen Gesichtspunkten aus untersucht worden (in letzter Zeit z.B. in den Arbeiten [5]—[10]; für eine Beschreibung der älteren Literatur, s. [6] und [8]). Sie liefern einerseits neue Beispiele topologischer Gruppen, die sich besonders leicht handhaben, andererseits ein wertvolles Hilfsmittel zur Strukturuntersuchung unendlicher Gruppen.

Die vorliegende Arbeit will sich mit einer einheitlichen Auseinandersetzung der besonders anziehenden Dualitätstheorie solcher Gruppen beschäftigen. Über die bekannten Arbeiten hinaus ist die vorliegende Fassung eine streng abstrakte: sie arbeitet mit einem im allgemeinen nichtkommutativen Operatorenbereich und versucht durch schrittweise Hinzufügung von Postulaten die wesentlichen Eigenschaften unter möglichst weittragenden Voraussetzungen festzustellen. Es wird erwartet, daß die folgende Entwicklung nicht nur eine Erweiterung des Gültigkeitsbereiches der Theorie bewirkt, sondern auch einen kurzen und durchsichtigen Zugang zu den bekannten Sätzen liefert.

Als wesentliches Werkzeug bedienen wir uns der Begriffsbildungen und Beweismethoden aus der Theorie der topologischen Vektorräume[1]); so wird u.a. der Begriff der schwachen Topologie verwendet, ein Analogon des Hahn-Banachschen Satzes eine entscheidende Annahme sein und ein Struktursatz nach dem Muster des Satzes von MACKEY aufgestellt.

Eine erste Niederschrift dieser Arbeit (ohne Kenntnis von [8] und [9]) war im Sommer 1955 abgeschlossen, während eines wertvollen und angenehmen Aufenthaltes des Verfassers an der Universität Bonn.

2. Wir werden es mit topologischen Moduln besonderer Art zu tun haben. Unter einem topologischen Modul M verstehen wir eine topologische abelsche Gruppe, die mit einem stetig wirkenden (Ring-)Operatorenbereich R versehen wird. Vorläufig wird auf R keine Topologie erklärt. Ein Untermodul ist wie gewöhnlich eine Untergruppe, die hinsichtlich R abgeschlossen ist.

Wie in jeder topologischen Gruppe, ist die Topologie durch jedes Fundamentalsystem von Umgebungen des Nullelements vollständig festgelegt. Gibt es ein solches Fundamentalsystem, das ausschließlich aus Untermoduln besteht,

[1]) Siehe [2]. Auf eine gemeinsame Verallgemeinerung, die den Grund dieses Zusammenhangs klar macht, wird an anderer Stelle eingegangen.

so heißt M *lineartopologisch*. Da ein offener Untermodul sogar abgeschlossen ist, kommt man durch topologische Quotientenbildung zu einer trennenden Menge stetiger R-Homomorphismen von M auf diskrete Moduln M/U: die Topologie von M ist die gröbste, für die diese Homomorphismen noch stetig sind [2]).

3. Nun führen wir den Grundmodul M^0 ein. Er wird im Mittelpunkt der folgenden Betrachtungen stehen und bleibe ein für allemal fest. Er sei immer mit der diskreten Topologie versehen.

Mit $\overline{R}$ sei der R-Endomorphismenring von M^0 bezeichnet, mit $\overline{R}$ sein $\overline{R}$-Endomorphismenring.

Ist M irgendein R-Modul, so bedeute M^* den $\overline{R}$-Modul aller Homomorphismen von M in M^0; ist M sogar topologisch, so heiße der Untermodul N der stetigen Homomorphismen der *Dualmodul*.

Auf M^* kann man eine besondere Topologie, die *schwache* erklären: Es ist die Topologie der Konvergenz in den Punkten von M: sie besitzt die charakteristische Eigenschaft, daß sie die gröbste ist, für die die Elemente aus M noch stetige Homomorphismen auf M^* induzieren. Wegen der Diskretheit von M^0 erhält man ein schwaches Fundamentalsystem der Nullumgebungen in M^* in den Annullatoren der endlichen Untermengen (oder, was auf dasselbe hinauskommt, der endlicherzeugbaren Untermoduln) von M: Die schwache Topologie ist also eine lineare.

Nun ist ein schwacher Cauchy-Filter auf M^* nichts anders als die widerspruchsfreie Angabe eines M^0-wertigen Homomorphismus auf jedem endlicherzeugbaren Untermodul von M. Ein solcher bestimmt aber ein Element aus M^*. Somit ist M^* *schwachvollständig*. Dasselbe gilt natürlich auch von dem Annullator jeder Untermenge in M. Deshalb hat jede schwachdichte Untermenge in M^* denselben Annullator in M wie M^*.

4. Von nun ab wird M^0 als *injektiv* vorausgesetzt. Das bedeutet: Ein M^0-wertiger Homomorphismus läßt sich von seinem Definitionsbereich zu einem beliebigen Obermodul erweitern.

Damit gleichwertig ist: Für jeden Untermodul S eines Moduls M, mit Annullator S' in M^*, ist S^* mit M^*/S' kanonisch isomorph. Bei dieser Isomorphie stimmt außerdem das Bild des Annullators eines weiteren Untermoduls U mit dem in S^* gebildeten Annullator des Durchschnitts $U \cap S$ überein. Denn die Erweiterung eines auf $S/U \cap S$ definierten M^0-wertigen Homomorphismus kann ja durch vorhergehendes Annullieren von $U/U \cap S$ vollgezogen werden.

Daraus erschließt man die „topologische Injektivität" von M^0: stetige Homomorphismen auf S können zu stetigen auf M erweitert werden, oder auch: Der Dualmodul von S ist Bild mod S' des Dualmoduls von M.

---

[2]) Wegen des Trennungsaxiom erweist sich M somit als dichter Untermodul des projektiven Limes der M/U, der seine vollständige Hülle ist.

5. Nun habe der Modul M^0 die weitere Eigenschaft: Er enthalte ein nichtverschwindendes homormophes Bild jedes zyklischen Moduls [3]).

Im Zusammenhang mit der soeben gemachten Voraussetzung folgt: M^* hat einen in M trivialen Annullator; oder, in gleichwertiger Redeweise: M^* *trennt* auf M. Durch Anwendung auf die diskreten Quotientenmoduln des lineartopologischen Moduls M gewinnt man die Verallgemeinerung: Auch N trennt auf M. Noch allgemeiner schließt man durch Quotientenbildung weiter: Ist U abgeschlossener Untermodul von M, so stimmt der Annullator in M des Annullators in N von U mit U überein [4]).

Wendet man dies auf die Nullumgebungen U an, deren Annullatoren U' N zur Vereinigung haben, so folgt aus diesen Aussagen: Die Darstellung von M als M^0-wertiger Homomorphismenmodul auf N ist eine eineindeutige, und die Topologie auf M ist mit der Funktionentopologie der gleichmäßigen Konvergenz in den Annullatoren der Nullumgebungen identisch.

Geht man von M zu einem Quotientenmodul über, so ist die Quotiententopologie die der gleichmäßigen Konvergenz auf den Durchschnitten der U' mit dem Annullator des Kernes; die auf einem Untermodul S von M induzierte Topologie stimmt mit der der gleichmäßigen Konvergenz auf den Bildern der $U' \bmod S'$ überein, wie aus der vorhergehenden Nummer folgt.

Das letzterwähnte Ergebnis, das im wesentlichen besagt, daß die Summe zweier in M^* gebildeter Annullatoren wieder ein solcher Annullator ist, sichert nun, daß die Topologie auf M der gleichmäßigen Konvergenz auf allen in M^* gebildeten und in N liegenden Annullatoren noch N zum Dualmodul hat. Sie ist offenbar die feinste Topologie mit dieser Eigenschaft und wird hier die durch N definierte *starke Topologie* genannt. Dagegen erhält M als Untermodul von N^* die N-schwache als Relativtopologie, die ja die gröbste ist, die N zum Dualmodul hat. Topologien auf M zwischen diesen, und nur solche, haben N als Dualmodul. Untermodul- und Quotiententopologien starker oder schwacher Topologien sind von derselben Art.

6. In dieser Nummer soll M^0 alle vorausgesetzten Eigenschaften auch als $\overline{R}$-Modul besitzen.

Nach Definition ist $M^{0*} = \overline{R}$. Da der Eins-Endomorphismus zu $\overline{R}$ gehört, ist auch $\overline{R}^* = M^0$. Stehen aber zwei Moduln derart in Beziehung, daß jeder der volle Homomorphismenmodul des anderen ist, so haben ihre linearen Topologien nur einen einzigen Dualmodul, denn jeder Untermodul ist Annullator. Überdies gelten dieselben Eigenschaften für Untermoduln, Quotientenmoduln und endliche direkte Summen solcher Moduln.

Daraus schließt man einerseits die Willkür des trennenden Untermoduls N von M^* als Dualmodul einer Topologie auf M, z. B. die N-schwache. Denn

[3]) Enthält R den Einsoperator, so genügt es, wenn dies für die einfachen zyklischen Moduln gilt.

[4]) Da der Annullator in M einer Menge aus N dem Durchschnitt ihres (schwachvollständigen) Annullators in N^* mit M gleich ist, folgt: Jeder abgeschlossene Untermodul ist auch schwachabgeschlossen; die abgeschlossenen Untermoduln hängen lediglich von dem Dualmodul ab.

jeder endlicherzeugbare Untermodul in N ist Annullator in M^* seines in M gebildeten Annullators.

Als Umkehrung der letzten Bemerkung in 3. gewinnt man andererseits: Ein auf N trennender Modul ist schwachdicht in N^*. Denn ein solcher induziert auf jedem endlicherzeugbaren Untermodul in N einen trennenden, also seinen einzigen, Dualmodul.

Daraus folgt nun die Kennzeichnung der Schwachvollständigkeit für Annullatoren in N^*, die innerhalb des Dualmoduls eine Charakterisierung dieser für die Lineartopologien auf N bedeutsamen Untermoduln liefert.

7. Da wir die Gültigkeit des letzten Ergebnisses auch in M^* benötigen, wollen wir $\overline{R} = R$ annehmen.

Wir sind jetzt imstande, den Zusammenhang mit den Formulierungen klar zu stellen, die Linearkompaktheit benutzen. M heißt *linearkompakt*, wenn jeder lineartopologische Modul, der einen (eventuell unechten) Quotientenmodul von M als eineindeutiges stetiges Bild hat, vollständig ist [5]).

Ein schwachlinearkompakter Modul ist also schwachvollständig. Umgekehrt ist M^* in der schwachen Topologie linearkompakt. Denn aus der Tatsache, daß jeder abgeschlossene Untermodul Annullator ist, folgt einerseits, daß jeder Quotientenmodul ein M^* ist, andererseits, daß M^* keine echte gröbere lineare Topologie besitzt.

Die Annullatoren lassen sich also ebensogut durch Linearkompaktheit wie durch Schwachvollständigkeit kennzeichnen.

8. Bisher haben wir eine etwa vorhandene Topologie auf R nicht berücksichtigt. Wie ändert sich nun die vorhergehende Entwicklung, wenn man von allen vorkommenden Topologien noch verlangt: Die natürliche Abbildung von R in einen beliebigen zyklischen Untermodul von M sei stetig [6])?

Wir nehmen an, diese Annahme gelte für M^0. Das heißt: Jedes Element in M^0 habe eine Nullumgebung in R als Ordnungsideal. Untermoduln, die, wie die endlicherzeugbaren, von einer Nullumgebung annulliert werden, nennen wir *beschränkt*. In einem allgemeinen M^* heiße ein Untermodul beschränkt, wenn die Gesamtheit der Werte, die er auf einem Element in M annimmt, einem beschränkten Untermodul in M^0 angehört. Beschränkte Untermoduln gehen bei Durchschnittsbildung mit oder Quotientenbildung nach einem Annullator in sich über.

Dann und nur dann genügt eine Topologie dem neuen Axiom, wenn die Annullatoren der Nullumgebungen beschränkt sind. An der Definition der schwachen Topologie ist also nichts zu ändern; in der der starken dagegen dürfen jetzt nur beschränkte Annullatoren auftreten.

Ein kompakter Modul ist linearkompakt und beschränkt. Ist jeder beschränkte Untermodul von M^0 kompakt (d.h. hier: endlich), so gilt auch umgekehrt die Kompaktheit jedes beschränkten schwachvollständigen Moduls.

[5]) Eine äquivalente Formulierung, in der nur abgeschlossene Untermoduln auftreten, gestattet es zu erkennen, daß der Begriff im wesentlichen von dem Dualmodul abhängt.

[6]) Die Stetigkeit der Ringoperation in beiden Variabeln zeigt sich dann leicht.

9. Es sei $\overline{R}$ derart topologisiert, daß genau die Mengen $\overline{R}$-beschränkte Untermoduln in M^0 erzeugen, die auch R-beschränkte Untermoduln erzeugen[7]).

Wollten wir den Dualmodul N in Einklang mit [2] topologisieren, so hätten wir ihm die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz in den beschränkten Untermoduln von M zu geben. Da endlicherzeugbare Untermoduln beschränkt sind, würde M dann im Bidualmodul enthalten sein. Stimmt dieser mit M algebraisch überein, was mit der Schwachvollständigkeit beschränkter schwachgeschlossener Untermoduln aus M gleichbedeutend ist, so nennt man M in diesem Fall *semi-reflexiv*; fällt weiter die Topologie des Bidualmoduls mit der von M zusammen, so heißt M *reflexiv*.

Im vorliegenden Gebiet aber pflegt man N durch die Annullatoren der schwachvollständigen beschränkten Untermoduln zu topologisieren. Dann ist jeder Modul semi-reflexiv, und genau die stark topologisierten sind reflexiv.

10. Als Beispiel untersuchen wir den meist behandelten Fall eines Bewertungsringes (der natürlich den des Körpers sogleich umfaßt) und zwar sofort in der allgemeinsten Fassung (s. [5]).

Es sei also R Bewertungsring, I sein maximales Ideal, Q sein Quotientenkörper. Der einzige einfache zyklische Modul ist R/I; wir sind also auf die injektive Hülle dieses Moduls als Wahl für M^0 geführt. Besonders einfach werden die Verhältnisse, wenn R fast maximal ist[8]) (was wir jetzt annehmen werden), denn dann ist $M^0 = Q/I$ ([4] Prop. 1). Weiter erkennt man $\overline{R}$ als die vollständige Hülle von R, m.a.W., als den maximalen Bewertungsring, der zu R gehört. Denn Q/I ist isomorph zu $\overline{Q}/\overline{I}$, wo der Strich Vervollständigung bedeutet, und die R- fallen mit den $\overline{R}$-Endomorphismen zusammen. Somit genügt es zu zeigen, daß jeder $\overline{R}$-Homomorphismus von $\overline{Q}$ in $\overline{Q}/\overline{I}$ in den kanonischen durch Multiplikation mit einem Körperelement verwandelt werden kann. Um dies festzustellen[9]), suche man, für eine Menge (gebrochener) Hauptideale, deren Vereinigung ganz $\overline{Q}$ ist, je ein multiplizierendes Element auf, das das Gewünschte für jedes einzelne Hauptideal leistet. Die so entstehenden Elemente bilden eine Cauchy-Folge, deren Limes das gesuchte Element ist.

Wir erwähnen noch die einfach zu bestätigenden Tatsachen: $\overline{\overline{R}} = \overline{R}$, Q/I ist linearkompakt, die Bewertungstopologie auf R ist eine lineare und die zu ihr gehörigen beschränkten Mengen in Q/I sind genau die, deren Urbild in Q beschränkte Werte haben. Ist der Bewertungsring sogar ein diskreter, so sind die beschränkten Untermoduln die zyklischen; ist sein Restklassenkörper auch endlich, was mit der Kompaktheit von $\overline{R}$ bekanntlich äquivalent ist, dann ist jeder beschränkte Untermodul endlich.

11. Nun sind wir imstande, einige Musterbeispiele aus der Literatur von dem hier gewonnenen Standpunkt zu überblicken.

[7]) Dann kann man einen beschränkten Untermodul in M^* dadurch charakterisieren, daß eine beliebige schwache Nullumgebung sein Produkt mit einem geeigneten Nullumgebungsideal aus $\overline{R}$ enthält.

[8]) Das bedeutet bekanntlich keine Einschränkung für diskrete Bewertungsringe.

[9]) Das Resultat ist ein Spezialfall von [5] Theorem 11.

Das Hauptresultat von [6] sagt aus, daß jeder schwachlinearkompakte Modul (über einem diskreten Bewertungsring) voller Homomorphismenmodul ist. Das war in 7. mit der Umkehrung bestätigt.

Auf den ersten Blick scheint der Gegenstand der Arbeiten [8] und [10] in dem hier aufgestellten Rahmen nicht enthalten zu sein, denn die Dualität wird dort hinsichtlich der Gruppe der reellen Zahlen modulo den Ganzen erklärt und die Dualgruppe wird mit Hilfe der kompakten Untermengen topologisiert.

Erstens aber werden nur Gruppen behandelt, in der jedes Element endliche Ordnung modulo einer Nullumgebungsuntergruppe hat, und zwar meistens der Fall, in der diese Ordnung Potenz einer gewissen Primzahl p ist. Dann konvergiert aber $p^n x$ offenbar gegen Null für jedes x und ein *stetiger* Homomorphismus kann x nur auf eine solche Rationalzahl abbilden, deren Nenner eine Potenz von p ist. Außerdem darf man die Menge M^0 dieser Zahlen mit der diskreten Topologie ansehen, da die ursprüngliche Topologie keinen Einfluß auf die Stetigkeit eines Homomorphismus haben kann. Weiter gestattet (s. Anmerkung 2) M selber den Operatorenbereich R der rationalen ganzen p-adischen Zahlen; M^0 erscheint dann als Q/I und jeder stetige Homomorphismus erweist sich als R-Homomorphismus. Damit ist erkannt, daß diese Arbeiten sich wirklich unter den vorliegenden Formalismus subsumieren.

Zweitens wird dort die Vollständigkeit der Abschließung jedes zyklischen Untermoduls vorausgesetzt, was gleichbedeutend ist mit der Möglichkeit der Erweiterung des Operatorenbereiches auf die nichtrationalen ganzen p-adischen Zahlen [10]). Nach dem schon Gezeigten ist nun $\overline{R}=R$ und die beschränkten schwachvollständigen Untermoduln stimmen mit den kompakten überein. Also stimmen auch die formal verschiedenartigen Topologisierungen des Dualmoduls in Wirklichkeit überein.

Nun werden viele in [8]–[10] gemachten Aussagen sehr einleuchtend. In [9] heißt ein Modul lineardiskret, wenn alle Untermoduln abgeschlossen sind, und es wird gezeigt, daß ein solcher in Dualität mit einem linearkompakten Modul steht. Lineardiskretheit ist offenbar die Bedingung dafür, daß die starke Topologie die diskrete ist, woraus sich die Linearkompaktheit des Dualmoduls aus seinem Zusammenfallen mit M^* ergibt. Weiter wird die Übereinstimmung der Topologie des Bidualmoduls mit der Ausgangstopologie an die Bedingung gebunden, daß jeder Untermodul mit lineardiskretem Quotientenmodul Nullumgebung ist. Diese Untermoduln sind aber die Annullatoren der linearkompakten, also ist dies die genaue Bedingung dafür, daß die ursprüngliche Topologie die starke war.

Dagegen ist in [10] Satz 7 ein hinreichendes Kriterium für Reflexivität angegeben, das im wesentlichen besagt, die gegebene Topologie sei die feinste, die auf sämtlichen kompakten Untermoduln die ursprünglichen Topologien

[10]) Denn das Endlichsein der Ordnung eines Elements nach jeder Nullumgebung ist die genaue Bedingung für die Stetigkeit der Abbildung von R auf den von diesem Element erzeugten zyklischen Modul.

induzieren. Nun sind die kompakten (gleich linearkompakten und beschränkten) Untermoduln samt ihren Topologien allein durch den Dualmodul ausgezeichnet; eine feinere Topologie mit demselben Dualmodul gibt es also nicht, woraus sich das Hinreichen der Bedingung ergibt.

Es scheint möglich, die allgemeinen Gruppen der Arbeiten [8] und [10] direkt zu behandeln, statt sie auf den primären Fall zurückzuführen, indem man für R das unbeschränkte Produkt aller p-adischen Ringe, für M^0 das Produkt der zugehörigen Q/I wählt. Die Einzelheiten dieser Entwicklung hat der Verfasser jedoch nicht ausgearbeitet.

Literatur

[1] Bourbaki, N.: Topologie generalé. Paris: Hermann & Cie. 1951. — [2] Bourbaki, N.: Espaces vectoriels topologiques. Paris: Hermann & Cie. 1955. — [3] Cartan, H., and S. Eilenberg: Homological Algebra. Princeton University Press 1956. — [4] Fleischer, I.: Modules of finite rank over Prüfer rings. Ann. Math. **65**, 250–254 (1957). — [5] Fleischer, I.: Unveröffentlichte Dissertation, Chicago 1952. — [6] Kaplansky, I.: Dual modules over a valuation ring. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 213–219 (1953). — [7] Lefschetz, S.: Algebraic Topology. New York 1942. — [8] Leptin, H.: Über eine Klasse linear kompakter abelscher Gruppen, II. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **19**, 221–243 (1955). — [9] Leptin, H.: Linear kompakte Moduln und Ringe, II. Math. Z. **66**, 289–327 (1957). — [10] Schöneborn, H.: Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen, II. Math. Z. **60**, 17–30 (1954).

901 Washington Ave., Brooklyn 25, N.Y. (U.S.A.)

(Eingegangen am 8. Mai 1959)

SABIDUSSI, G.
Math. Zeitschr. 72, 446–457 (1960)

Graph Multiplication[1])

By
GERT SABIDUSSI

1. Introduction, definitions

The purpose of this note is to define three multiplications of graphs (cartesian, strong, and weak). We shall show that every connected graph of *finite type* [cf. (1.5)] has a unique prime factor decomposition with respect to cartesian multiplication, and that the automorphism group of any such graph is isomorphic to the automorphism group of the *sum* of its prime factors.

By a *graph* X we mean an ordered pair $X=(V, E)$, where V is an arbitrary set (the set of *vertices* of X), and E (the set of *edges* of X) is a (possibly empty) set of unordered pairs of *distinct* vertices of X. In order to distinguish between different graphs we shall write $V(X)$ for V, and $E(X)$ for E. We shall indicate unordered pairs by brackets. By $|X|$ we denote the cardinal of the set $V(X)$. Let X and Y be graphs. By $X \cup Y$ and $X \cap Y$ we mean the graphs given by $V(X \cup Y)=V(X) \cup V(Y)$, $E(X \cup Y)=E(X) \cup E(Y)$, and $V(X \cap Y)=V(X) \cap V(Y)$, $E(X \cap Y)=E(X) \cap E(Y)$, respectively.

Let X and Y be graphs. By a *monomorphism* of X into Y we mean a one-one function $\varphi: V(X) \to V(Y)$ such that $[x, y] \in E(X)$ implies $[\varphi x, \varphi y] \in E(Y)$. A one-one function φ of $V(X)$ onto $V(Y)$ is an *isomorphism* if both φ and φ^{-1} are monomorphisms. An *automorphism* of X is an isomorphism of X onto itself. The group of automorphisms of X will be denoted by $G(X)$.

We define *connectedness* as usual in terms of paths. By a *path* of a graph X joining $x, y \in V(X)$ we mean a subgraph P of X such that $V(P)=\{x_i | 1 \leqq i \leqq n\}$, $n \geqq 1$, $x_1=x$, $x_n=y$, all x_i distinct, and $E(P)=\{[x_i, x_{i+1}] | 1 \leqq i \leqq n-1\}$. X is *connected* if any two vertices x, y of X are joined by a path. Let X be a connected graph, $x, y \in V(X)$. By the *distance* $\varrho(x, y)$ is meant $\varrho(x, y)=\min |P|-1$, the minimum taken over all paths P of X joining x and y.

Let $\{X_a | a \in A\}$ be a set of graphs. By $\prod_{a \in A} V(X_a)$ we denote the cartesian product of the sets $V(X_a)$, and by $p_b: \prod_{a \in A} V(X_a) \to V(X_b)$ we mean the usual projection of the product onto its b-th coordinate, $b \in A$.

(1.1) DEFINITION. Let $\{X_a | a \in A\}$ be a set of graphs. By the *cartesian (strong, weak) product* $\prod_{a \in A} X_a \left(\prod_{a \in A}^{*} X_a, \prod_{a \in A}^{w} X_a \right)$ of the graphs X_a is meant the following graph X (X^*, X^w):

$$V(X)=V(X^*)=V(X^w)=\prod_{a \in A} V(X_a); \tag{1}$$

[1]) Written with the support of the National Science Foundation of the United States of America.

(2) given $x, y \in V(X)$ $\left(V(X^*), V(X^\times)\right)$, then $[x, y] \in E(X)$ $\left(E(X^*), E(X^\times)\right)$ if and only if there exists a one-element subset B of A (a non-empty subset B of A, a non-empty finite subset B of A) such that

$$[p_b x, p_b y] \in E(X_b)$$

for all $b \in B$, and

$$p_a x = p_a y$$

for all $a \in A - B$.

Note that X is a spanning subgraph[2]) of $X^\times$ which in turn is a spanning subgraph of X^*. If the index set A is finite, then clearly weak product and strong product coincide.

REMARK. [1] contains a definition of a fourth product of graphs called the *cardinal product*. Using the notation of definition (1.1), and denoting the cardinal product of the graphs X_a by X' the relationship between X, X' and X^* is as follows: $V(X') = V(X) = V(X^*)$, $E(X') = E(X^*) - E(X)$.

(1.2) It is immediate from definition (1.1) that if we identify isomorphic graphs, then both cartesian and strong multiplication are *commutative* and *associative*. Both have a *unit*, for if X is any graph, and U is the *trivial* graph given by $V(U) = \{x\}$, $E(U) = \bigcirc$ (= the empty set), then $X \times U = X * U \cong U \times X = U * X \cong X$. Therefore the set of all non-isomorphic graphs is a commutative semigroup with unit under both cartesian and strong multiplication.

(1.3) A graph X is called *prime* (or *indecomposable*) with respect to cartesian multiplication if X is non-trivial (i.e. if X is not isomorphic to U), and if $X \cong Y \times Z$ implies $Y \cong U$ or $Z \cong U$. Two graphs X and Y are called *relatively prime* with respect to cartesian multiplication if and only if $X \cong X' \times Z$ and $Y \cong Y' \times Z$ imply $Z \cong U$. Analogous definitions can be made for strong multiplication.

(1.4) The cartesian (strong) product of a finite (any) number of connected graphs is connected. The cartesian (strong) product of any graph by a disconnected graph is disconnected. The weak, and hence the cartesian, product of infinitely many non-trivial graphs is disconnected.

(1.5) Let γ be a function from the class of all graphs to the class of all cardinals such that

(i) if $X \cong Y$, then $\gamma(X) = \gamma(Y)$;

(ii) if $X \subset Y$, then $\gamma(X) \leqq \gamma(Y)$;

(iii) if $\gamma(X) < \aleph_0$, $\gamma(Y) < \aleph_0$, and both X and Y are non-trivial, then $\max\left(\gamma(X), \gamma(Y)\right) < \gamma(X \times Y) < \aleph_0$.

We shall say that a connected graph X is of *finite type* if there is a γ satisfying (i) (ii) (iii) for which $\gamma(X) < \aleph_0$.

Examples. (1) $\gamma(X) = \sup d(X; x)$, where $d(X; x)$ is the degree of x in X. The corresponding graphs of finite type are the graphs of bounded finite degree.

[2]) A graph Y *spans* X if Y is a subgraph of X, and $\Gamma(Y) = \Gamma(X)$.

(2) $\gamma(X)=\sup\varrho(x, y)$ if X is connected, $\gamma(X)=\aleph_0$ if X is disconnected. Here X is of finite type if and only if X is a connected graph of finite diameter.

(3) $\gamma(X)=\sup|C|$, the supremum taken over all subgraphs C of X which are isomorphic to a cartesian product of non-trivial complete graphs. X is of finite type if and only if it contains no arbitrarily large complete graphs, and no arbitrarily large "cubes" (i.e. products of edges).

(1.6) Let X be a connected graph. We shall say that X can be *decomposed into prime factors* (in the cartesian sense) if and only if there is a set $\{X_a|a\in A\}$ of prime graphs such that $X\cong\prod_{a\in A} X_a$. It follows from (1.4) that each X_a is connected, and that the index set A is finite.

In this connection it should be pointed out that there is a large class of connected graphs which have no prime factor decomposition in the cartesian sense: These graphs can be obtained as follows. Let $\{X_a|a\in A\}$ be a set of graphs, and let $x_a^{(0)}\in V(X_a)$, $a\in A$. Define the *weak cartesian product* $X=\prod_{a\in A}(X_a, x_a^{(0)})$ of the rooted graphs $(X_a, x_a^{(0)})$ by

$$V(X)=\Big\{x\in\prod_{a\in A}V(X_a)\,\Big|\,p_a x\neq x_a^{(0)} \text{ for at most finitely many } a\in A\Big\},$$

$$E(X)=\big\{[x, y]\,\big|\,x, y\in V(X),\ [p_a x, p_a y]\in E(X_a) \text{ for exactly one } a\in A,\ p_b x=p_b y \text{ for all } b\in A-\{a\}\big\}.$$

Weak cartesian products have the following properties:

(i) If the index set A is finite, then $\prod_{a\in A}(X_a, x_a^{(0)})$ is independent of the vertices $x_a^{(0)}$, and equal to $\prod_{a\in A} X_a$.

(ii) The weak cartesian product of any set of connected graphs is connected. More precisely, $\prod_{a\in A}(X_a, x_a^{(0)})$ is that component of $\prod_{a\in A} X_a$ which contains $x^{(0)}$, where $p_a x^{(0)}=x_a^{(0)}$, $a\in A$.

(iii) If B is a proper non-empty subset of A, then $X=\prod_{a\in A}(X_a, x_a^{(0)})\cong Y_1\times Y_2$, where $Y_1=\prod_{a\in B}(X_a, x_a^{(0)})$, $Y_2=\prod_{a\in A-B}(X_a, x_a^{(0)})$. This is most easily seen by considering the isomorphism $\varphi: V(Y_1\times Y_2)\to V(X)$ given by $p_a\varphi(y_1, y_2)=p_a^{(1)}y_1$, if $a\in B$, $p_a\varphi(y_1, y_2)=p_a^{(2)}y_2$, if $a\in A-B$, where $p_a^{(i)}$ is the projection of $V(Y_i)$ onto $V(X_a)$, $i=1, 2$. It follows that no proper weak cartesian product of connected graphs (i.e. a weak product of infinitely many non-trivial connected graphs) is prime. We shall show below ((2.16)) that if the X_a's are prime graphs of finite type, then the proper weak cartesian product $\prod(X_a, x_a^{(0)})$ has no prime factor decomposition in the cartesian sense.

We can use weak cartesian products to show that there exist non-trivial connected idempotent graphs (i.e. graphs X for which $X\times X\cong X$). For if Y is a non-trivial connected graph, $y^{(0)}\in V(Y)$, and $(X_a, x_a^{(0)})=(Y, y^{(0)})$ for all a in some infinite index set A, then clearly $\prod(X_a, x_a^{(0)})$ is idempotent. Note that even if a connected idempotent graph can be decomposed into prime

factors, the decomposition cannot possibly be unique. It is natural to conjecture that no connected idempotent graph has a prime factor decomposition at all. However, we have not been able to prove or disprove this conjecture.

The situation is different with respect to strong multiplication. For any cardinal $\mathfrak{n} \geqq 1$ let $C(\mathfrak{n})$ be the complete $\mathfrak{n}$-graph given by

$$V(C(\mathfrak{n})) = N,$$

where N is a set of cardinal $\mathfrak{n}$, and

$$E(C(\mathfrak{n})) = \{[\mu, \nu] \mid \mu \neq \nu,\ \mu, \nu \in N\}.$$

It is easily seen that if $\{\mathfrak{n}_a \mid a \in A\}$ is any set of cardinals, then

$$\prod_{a \in A}^{*} C(\mathfrak{n}_a) = C\left(\prod_{a \in A} \mathfrak{n}_a\right).$$

In particular, if $\mathfrak{n} \geqq \aleph_0$, then $C(\mathfrak{n})$ is idempotent (i.e. $C(\mathfrak{n}) * C(\mathfrak{n}) \simeq C(\mathfrak{n})$). Here idempotency does not always preclude the existence of prime factor decompositions. For instance the graph $C(2^{\aleph_\alpha})$ can be decomposed in infinitely many essentially different ways (not arising from each other via idempotency) as follows:

$$C(2^{\aleph_\alpha}) \cong \prod_{a \in A}^{*} C(p_a),$$

where $\{p_a \mid a \in A\}$ is any set of primes, and A has cardinal $\aleph_\alpha$. On the other hand $C(\aleph_0)$ and $C(\aleph_\omega)$ (for instance) are idempotent graphs which have no strong prime factor decomposition. Assuming the generalized continuum hypothesis $C(\aleph_\alpha)$ has a strong prime factor decomposition if and only if α is >0 and not a limit ordinal.

2. Invariant characterization of the cartesian product

Given a connected graph X we shall define an equivalence relation on $E(X)$ such that all edges of X are equivalent if X is a prime graph of finite type, while two edges of a non-prime graph of finite type are equivalent if and only if they belong to the same prime factor of X. The fact that such an equivalence relation can be defined immediately implies the uniqueness of the prime factor decomposition of connected graphs of finite type.

(2.1) Let X be a connected graph such that $E(X) \neq \bigcirc$. We define a set of binary relations on $E(X)$ as follows. Let $e, e' \in E(X)$.

$e \sim^{(0)} e'$ if and only if e and e' are not adjacent, and X contains a 4-circuit C such that $e, e' \in E(C)$.

$e \sim^{(1)} e'$ if and only if e and e' are adjacent, and X contains no 4-circuit C without diagonals such that $e, e' \in E(C)$.

By $\sim_1$ we denote the smallest equivalence relation on $E(X)$ which contains both $\sim^{(0)}$ and $\sim^{(1)}$.

It will be convenient to introduce the following notation. If Y and Y' are subgraphs of X, and if $\sim$ is any binary relation on $E(X)$, then $Y \sim Y'$

will mean that $e \sim e'$ for all $e \in E(Y)$ and $e' \in E(Y')$, while $Y \nsim Y'$ means $e \nsim e'$ for all $e \in E(Y)$ and $e' \in E(Y')$.

Suppose we have already defined $\sim_{r-1}$, $r \geqq 2$. Put $\sim_{r,0} = \sim_{r-1}$. Assuming that $\sim_{r,s-1}$, $s \geqq 1$, has already been defined we construct $\sim_{r,s}$ as follows. Let C be a finite circuit of X. We shall say that $C \in \mathfrak{A}_{r,s}$, $s \geqq 1$, if and only if

$$C = P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_s,$$

where $P_0, \ldots, P_s$ are paths such that

(1) $$P_i \sim_{r-1} P_i, \quad 0 \leqq i \leqq s;$$

and

(2) $$P_0 \nsim_{r,s-1} P_i, \quad 1 \leqq i \leqq s.$$

We now define $\sim^{(r,s)}$, $\sim_{r,s}$, and $\sim_r$, $r \geqq 2$, $s \geqq 1$.

$e \sim^{(r,s)} e'$ if and only if there is a $C = P_0 \cup \cdots \cup P_s \in \mathfrak{A}_{r,s}$ such that $e \in E(P_0)$, $e' \in E(P_i)$, $1 \leqq i \leqq s$. By $\sim_{r,s}$ we denote the smallest equivalence relation on $E(X)$ which contains $\sim_{r,s-1}$ and $\sim^{(r,s)}$, and by $\sim_r$ the smallest equivalence relation which contains all $\sim_{r,s}$, $s \geqq 1$. Finally, we denote by $\sim$ the smallest equivalence relation which contains all $\sim_r$, $r \geqq 1$. Note that for fixed r the relations $\sim_{r,s}$ form a tower. Similarly the $\sim_r$'s form a tower.

(2.2) REMARK. *Let* $C = P_0 \cup \cdots \cup P_s \in \mathfrak{A}_{r,s}$. *Then* $E(P_i \cap P_j) = \bigcirc$ *for all* $i \neq j$, $0 \leqq i \leqq s$, $0 \leqq j \leqq s$.

PROOF. Assume the contrary. Let $P_{k_1}, \ldots, P_{k_m}$, $0 \leqq k_1 < \cdots < k_m \leqq s$, be those paths of C for which $E(P_i \cap P_{k_j}) \neq \bigcirc$, $j = 1, \ldots, m$, $m \geqq 2$. Since C is a circuit, $P = \bigcup \{P_{k_j} | 1 \leqq j \leqq m\}$ is either C or a path of C. Because of (2) the first possibility cannot arise. Note that (1) implies $P \sim_{r-1} P$. Let $P_{h_0}, \ldots, P_{h_p}$, $0 \leqq h_0 < \cdots < h_p \leqq s$, be those paths of C for which $E(P_i \cap P_{h_j}) = \bigcirc$, $j = 0, \ldots, p$. By (2), $h_0 = 0$. Then $P_{h_0}, \ldots, P_{h_p}$, P is a set of $p+2$ paths of C such that (i) $C = P_0 \cup P_{h_1} \cup \ldots \cup P_{h_p} \cup P$; (ii) $P_{h_j} \sim_{r-1} P_{h_j}$, $0 \leqq j \leqq p$, $P \sim_{r-1} P$; (iii) $P_{h_0} \nsim_{r,p} P_{h_j}$, $1 \leqq j \leqq p$, $P_{h_0} \nsim_{r,p} P$, for if $P_{h_0} \sim_{r,p} P_{h_j}$, say, then also $P_{h_0} \sim_{r,s-1} P_{h_j}$, a contradiction against (2). It follows that $C \in \mathfrak{A}_{r,p+1}$. Hence $P_0 \sim^{(r,p+1)} P_{h_j}$, and therefore $P_0 \sim_{r,p+1} P_{h_j}$. But $p+1 < s$, hence $P_0 \sim_{r,s-1} P_{h_j}$, a contradiction against (2).

(2.3) REMARK. All relations defined above are *invariant under isomorphisms*. In particular, if $e \sim e'$ in X, and if φ is an isomorphism of X onto Y, then $\varphi e \sim \varphi e'$ in Y. Because of $\sim^{(1)}$ this is not generally true for monomorphisms.

(2.4) DEFINITION. Let $\{X_a | a \in A\}$ be a set of graphs, and let $X = \prod_{a \in A} X_a$. For each $x \in V(X)$ and $a \in A$ we define $i_a^x : V(X_a) \to V(X)$ by

$$p_b i_a^x x_a = \begin{cases} p_b x & \text{if } b \neq a \\ x_a & \text{if } b = a \end{cases}, \quad x_a \in V(X_a).$$

Clearly i_a^x is a monomorphism, and $p_a i_a^x x_a = x_a$ for all $x_a \in V(X_a)$, and $i_a^x p_a x = x$ for all $x \in V(X)$. By X_a^x we shall denote the graph $i_a^x X_a$. Note that if $[x, y] \in E(X_a^x)$, then $X_a^x = X_a^y$.

(2.5) LEMMA. *Let $X=X_1\times\cdots\times X_n$, where $X_1,\ldots,X_n$ are connected graphs, and let $e, e'\in E(X)$ be such that $e\sim_1 e'$. Then there exist $x, x'\in V(X)$ such that $e\in E(X_a^x)$, $e'\in E(X_a^{x'})$ for some a, $1\leqq a\leqq n$.*

PROOF. Let $e=[x, y]$, $e'=[x', y']$. Assume first that $e\sim^{(0)}e'$. By definition of $\sim^{(0)}$, x, y, y', x' for a 4-circuit if X. There exist a, a', b, b' such that $[x, y]\in E(X_a^x)$, $[x', y']\in E(X_{a'}^{x'})$, and $[x, x']\in E(X_b^x)$, $[y, y']\in E(X_{b'}^y)$. It follows that

$$p_c x = p_c y \Leftrightarrow c\neq a, \tag{3}$$

$$p_c y = p_c y' \Leftrightarrow c\neq b', \tag{4}$$

$$p_c y' = p_c x' \Leftrightarrow c\neq a', \tag{5}$$

$$p_c x' = p_c x \Leftrightarrow c\neq b. \tag{6}$$

By (3) and (6), $p_c x'=p_c y\Leftrightarrow c\neq a, b$; by (4) and (5), $p_c x'=p_c y\Leftrightarrow c\neq a', b'$. Therefore we have the following two possibilities: (i) $a=a'$, $b=b'$, and (ii) $a=b'$, $a'=b$. We have to show that (ii) cannot occur. Assume (ii). Then by (3) and (4), $p_{a'}x=p_{a'}y'$; by (5) and (6), $p_c x=p_c y'$, $c\neq a'$. Hence $p_c x=p_c y'$, $c=1,\ldots,n$, i.e. $x=y'$, a contradiction.

Now assume that $e\sim^{(1)}e'$. Then e and e' are adjacent; without loss of generality $x=x'$. Let $e\in E(X_a^x)$, $e'\in E(X_{a'}^x)$, and suppose that $a\neq a'$. Let z X) be such that $p_a z=p_a y$, $p_c z=p_c y'$, $c\neq a$. Then x, y, z, y' form a 4 .. cuit without diagonal. To show: $[y, z], [z, y']\in E(X)$, $[x, z], [y, y']\notin E(X)$. Note that $[p_{a'}y, p_{a'}z]=[p_{a'}x, p_{a'}y']\in E(X_{a'})$, and $p_c z=p_c y'=p_c x=p_c y$, $c\neq a, a'$, $p_a z=p_a y$. Hence $[y, z]\in E(X)$. $[p_a z, p_a y']=[p_a y, p_a x]\in E(X_a)$, $p_c z=p_c y'$, $c\neq a$, hence $[z, y']\in E(X)$. $p_a z=p_a y\neq p_a x$, $p_{a'}z=p_{a'}y'\neq p_{a'}x$, i.e. x differs from z in more than one coordinate, hence $[x, z]\notin E(X)$; similarly for $[y, y']$.

(2.6) LEMMA. *Let $X=X_1\times\cdots\times X_n$, where $X_1,\ldots,X_n$ are connected graphs, and let $e=[x, y]\in E(X_a^x)$. Then for each $z\in V(X)$, $i_a^z p_a e\sim_1 e$.*

PROOF. Since X is connected it suffices to prove Lemma (2.6) in the case where $[x, z]\in E(X)$. We have to consider two possibilities. (i) $[x, z]\in E(X_a^x)$. In this case $i_a^z p_a e=e$, so that the two edges are trivially equivalent. (ii) $[x, z]\in F(X_b^x)$, $b\neq a$. Here the four edges $[x, y]$, $[y, i_a^z p_a y]$, $[i_a^z p_a y, i_a^z p_a x]$, $[i_a^z p_a x\ x]$ form a 4-circuit, and therefore $i_a^z p_a e\sim^{(0)}e$.

(2.7) LEMMA. *Let $X=X_1\times\cdots\times X_n$, where $X_1,\ldots,X_n$ are connected graphs, and let $e, e'\in E(X)$ be such that $e\sim_r e'$, $r\geqq 2$. Then there exist $x, x'\in V(X)$ such that $e\in E(X_a^x)$, $e'\in E(X_a^{x'})$ for some a, $1\leqq a\leqq n$.*

PROOF. We prove (2.7) by induction on r. We assume that $e\sim_{r-1}e'$ implies $e\in E(X_a^x)$, $e'\in E(X_a^{x'})$ for some a, $1\leqq a\leqq n$. It follows immediately from this assumption that if P is a path of X such that $P\sim_{r-1}P$, then $P\subset X_a^x$ for some $x\in V(X)$ and some a, $1\leqq a\leqq n$. We shall use the induction hypothesis in this second form. To prove (2.7) it clearly suffices to show that for any $s\geqq 1$,

$$e\sim^{(r,s)}e'\Rightarrow e, e'\in E(X_a^x). \tag{7}$$

Let $C = P_0 \cup \ldots \cup P_s \in \mathfrak{A}_{r,s}$. The notation can be so chosen that $V(P_j \cap P_{j+1}) \neq \emptyset$, $j = 0, \ldots, s$ (subscripts to be taken modulo $s+1$). If $s \geqq 2$, then $P_j \cap P_{j+1}$ consists of a single vertex x_j, $0 \leqq j \leqq s$. If $s = 1$, $P_0 \cap P_1$ has exactly two vertices x_0, x_1. By (1), (2.5), and the induction hypothesis

$$P_j \subset X^x_{a_j} \tag{8}$$

for some a_j, $j = 0, \ldots, s$. Now fix a particular j, $0 \leqq j \leqq s$. P_j joins x_{j-1} and x_j. Hence it follows from (8) that

$$p_{a_j} x_{j-1} \neq p_{a_j} x_j. \tag{9}$$

If $a_k \neq a_j$ for all $k \neq j$, then successive application of the same argument to the paths $P_{j+1}, \ldots, P_s, P_0, \ldots, P_{j-1}$ yields $p_{a_j} x_j = p_{a_j} x_{j+1}$, $p_{a_j} x_{j+1} = p_{a_j} x_{j+2}$, $\ldots$, $p_{a_j} x_{j-2} = p_{a_j} x_{j-1}$, and therefore $p_{a_j} x_j = p_{a_j} x_{j-1}$. But this contradicts (9). Hence there is a $k \neq j$, $0 \leqq k \leqq s$, such that $a_k = a_j$. For $s = 1$ this proves that if $e, e' \in E(C)$, then e and e' belong to the same X^x_a.

To prove (7) for $s \geqq 2$ let $e \in E(P_0)$, $e' \in E(P_m)$, where $1 \leqq m \leqq s$, and $a_m \neq a_0$. Let $P_{i_0}, \ldots, P_{i_q}$, $0 = i_0 < \cdots < i_q \leqq s$, be those paths of C for which $a_{i_j} = a_0$, $j = 0, \ldots, q$. By the argument in the preceding paragraph, $q \geqq 1$, and since $a_m \neq a_0$, $q < s$.

Now choose an arbitrary $x \in V(X)$ and consider the graph $Q = Q_0 \cup \ldots \cup Q_q$, where

$$Q_j = i^x_{a_0} p_{a_0} P_{i_j}, \qquad j = 0, \ldots, q.$$

Q is connected. Since $Q = p_{a_0} Q$, it suffices to show that $p_{a_0} Q$ is connected. Note that $p_{a_0} | P_{i_j}$, $0 \leqq j \leqq q$, is a monomorphism. Hence each Q_j is a path of Q and it therefore suffices to show that

$$p_{a_0} x_{i_j} = p_{a_0} x_{i_{j+1}-1}, \qquad j = 0, \ldots, q, \tag{10}$$

where subscripts of subscripts have to be taken modulo $q+1$. But (10) follows immediately from (8).

Since $P_{i_0}, \ldots, P_{i_q}$ are non-overlapping paths of a circuit, and since P_{i_0} satisfies (2) it follows that Q contains a circuit $C_0 = R_0 \cup R_1 \cup \ldots \cup R_t$, where $t \leqq q$, $R_0 \subset Q_0$, $R_k \subset Q_{j(k)}$, $1 \leqq j(k) \leqq q$, $k = 1, \ldots, t$, and no two distinct R_k's are contained in the same Q_j. (This is most easily seen by observing that $E(Q_0 \cap Q_j) = \emptyset$ for all $j = 1, \ldots, q$, and that $Q_1 \cup \ldots \cup Q_q$ is connected). Thus it follows that $C_0 \in \mathfrak{A}_{r,t}$.

It follows that $R_0 \sim^{(r,t)} R_k$, $k = 1, \ldots, t$, hence $R_0 \sim_{r,t} R_k$, $k = 1, \ldots, t$, and therefore we deduce from (2.6) that given any k, $1 \leqq k \leqq t$, there is an $e_0 \in E(P_0)$ and an $e_k \in E(P_{i_{j(k)}})$ such that

$$e_0 \sim_{r,t} e_k. \tag{11}$$

But (11) contradicts (2). Hence $a_m = a_0$.

(2.8) LEMMA. *Given a connected graph X let $x \in V(X)$, and let E be any equivalence class of $E(X)$ modulo $\sim$. Then there is an $e \in E$ which is incident with x.*

PROOF. Suppose there is no edge $e \in E$ which is incident with x. Let x_0 be a vertex of X such that (i) x_0 is incident with some $e_0 \in E$, and (ii) among all vertices having property (i), x_0 has minimal distance from x. Let P be a path of X joining x and x_0, and having exactly $\varrho(x, x_0)$ edges. Let $[x_0, x_1]$ be that edge of P which is incident with x_0. Note that $[x_0, x_1] \notin E$, for otherwise x_1 would be incident with an edge of E, but $\varrho(x, x_1) = \varrho(x, x_0) - 1$, contradicting the minimality of $\varrho(x, x_0)$. $[x_0, x_1] \notin E$ implies $e_0 \dashv^{(1)} [x_0, x_1]$; hence there is a 4-circuit without diagonals which contains both e_0 and $[x_0, x_1]$. Let e_0' be the edge of C opposite e_0. Then $e_0' \sim^{(0)} e_0$, hence $e_0' \in E$. Also x_1 is incident with e_0', but this contradicts the minimality of $\varrho(x, x_0)$.

(2.9) COROLLARY. *Let X be a connected graph containing a vertex of finite degree. Then $E(X)$ consists of only finitely many equivalence classes modulo $\sim$.*

(2.10) LEMMA. *Let X be a connected graph, and let s be a positive integer. Then X contains no circuit C with the following property $\mathfrak{B}_s$: There exist $s+1$ paths $P_0, \ldots, P_s$ of X such that* (i) $C = P_0 \cup \ldots \cup P_s$; (ii) $P_i \sim P_j$, $0 \leqq i \leqq s$; (iii) $P_0 \dashv P_i$, $1 \leqq i \leqq s$.

PROOF. Assume the contrary. Since C is finite the fact that the relations $\sim_r$ form a tower implies the existence of a positive integer r_0 such that for all $e, e' \in E(C)$, $e \sim e'$ if and only if $e \sim_{r_0} e'$. Thus condition (ii) becomes $P_i \sim_{r_0} P_j$. (iii) implies $P_0 \dashv_{r_0, s-1} P_i$, $1 \leqq i \leqq s$, hence by (1) and (2), $P_0 \sim^{(r_0, s)} P_i$, and therefore $P_0 \sim P_i$, $1 \leqq i \leqq s$, contradicting (iii).

(2.11) LEMMA. *Let X be a connected prime graph such that* (i) *X is of finite type, or* (ii) *X contains a vertex of finite degree. Then $X \sim X$.*

PROOF. Let X_0 be a maximal connected subgraph of X such that $X_0 \sim X_0$, and suppose that $X_0 \neq X$. We shall produce a sequence $X_0, X_1, \ldots$ of subgraphs of X such that X_i is a product of $i+1$ non-trivial factors, $X_i \subset X_{i+1}$, and $E(X_i)$ meets exactly $i+1$ distinct equivalence classes of $E(X)$ modulo $\sim$, $i = 0, 1, \ldots$, thus establishing a contradiction against the assumption that X is of finite type or that X has a vertex of finite degree.

Since $X_0 \neq X$ there is an equivalence class E_1 of $E(X)$ mod $\sim$ such that $E(X_0) \cap E_1 = \bigcirc$. Let x_0 be an arbitrary but fixed vertex of X_0. Put $E_1(x_0) = \cup E(P)$, the union taken over all paths $P \subset X$ with $x_0 \in V(P)$ and $E(P) \subset E_1$, and let Y_1 be the minimal subgraph of X with $E(Y_1) = E_1(x_0)$. By (2.8), $E(Y_1) \neq \bigcirc$. Clearly Y_1 is connected, and $Y_1 \sim Y_1$.

We will show that given any $x \in V(X_0)$ and $y \in V(Y_1)$ there is a unique vertex $z_{xy} \in V(X)$ such that (i) if $x \neq x_0$ or $y \neq x_0$, then $z_{xy} \notin V(Y_1)$ or $\notin V(X_0)$, respectively; (ii) for all $x \in V(X_0)$ and all $y \in V(Y_1)$, $z_{xx_0} = x$, $z_{x_0 y} = y$; (iii) if $(x, y) \neq (x', y')$, then $z_{xy} \neq z_{x'y'}$; (iv) $[z_{xy}, z_{x'y'}] \in E(X)$ if and only if $x = x'$ and $[y, y'] \in E(Y_1)$, or $y = y'$ and $[x, x'] \in E(X_0)$; (v) $[z_{xy}, z_{xy'}] \sim_1 [y, y']$ provided $[y, y'] \in E(Y_1)$, $[z_{xy}, z_{x'y}] \sim_1 [x, x']$ provided $[x, x'] \in E(X_0)$. Note that (v) is an immediate consequence of (i) ... (iv).

We begin by showing that $V(X_0 \cap Y_1) = \{x_0\}$. Assuming the contrary let x_1 be a vertex of $X_0 \cap Y_1$ distinct from x_0 such that $\varrho_0(x_0, x_1)$ is minimal, where ϱ_0 denotes distance in X_0. Let P_0, P_1 be paths of X_0 and Y_1 respectively,

joining x_0 and x_1, and suppose that P_0 has exactly $\varrho_0(x_0, x_1)$ edges. Then P_0 and P_1 have exactly x_0 and x_1 in common, and therefore $P_0 \cup P_1$ is a circuit of X with property $\mathfrak{B}_1$, a contradiction against (2.10).

Given $(x, y) \in V(X_0) \times V(Y_1)$ we shall define z_{xy} by induction on $\sigma(x, y) = \varrho_0(x, x_0) + \varrho_1(y, x_0)$, where ϱ_0 and ϱ_1 denote distance in X_0 and Y_1, respectively. If $\sigma(x, y) = 0$, i.e. if $x = x_0$, $y = x_0$, we put $z_{xy} = x_0$. If $\sigma(x, y) = 1$, then either (1) $x = x_0$, $[y, x_0] \in E(Y_1)$, or (2) $y = x_0$, $[x, x_0] \in E(X_0)$. In case (1) put $z_{xy} = y$, in case (2), $z_{xy} = x$. Since $V(X_0 \cap Y_1) = \{x_0\}$ it follows that the z_{xy}'s thus defined satisfy condition (iii). To see that condition (iv) is satisfied let $\sigma(x, y) = \sigma(x', y') = 1$ and $[z_{xy}, z_{x'y'}] \in E(X)$. If $x \neq x'$ and $y \neq y'$, then z_{xy}, $z_{x'y'}$ and x_0 form a 3-circuit, and hence $[x_0, z_{xy}] \sim_1 [x_0, z_{x'y'}]$, a contradiction. Hence either $x = x'$ or $y = y'$, i.e. (iv) is satisfied.

Suppose z_{uv} has been defined for all $(u, v) \in V(X_0) \times V(Y_1)$ with $\sigma(u, v) \leqq m$. Let $(x, y) \in V(X_0) \times V(Y_1)$ be such that $\sigma(x, y) = m + 1$. Then there is a $(u, v) \in V(X_0) \times V(Y_1)$ with $\sigma(u, v) = m$ such that either (1) $u = x$, $[v, y] \in E(Y_1)$, or (2) $v = y$, $[u, x] \in E(X_0)$. It suffices to consider case (1). Either $x = x_0$ or $\varrho_0(x, x_0) \geqq 1$. In the first case put $z_{xy} = y$; in the second let $w \in V(X_0)$ be such that $[x, w] \in E(X_0)$ and $\varrho_0(w, x_0) = \varrho_0(x, x_0) - 1$. Then $\sigma(w, v) = m - 1$, $\sigma(w, y) = m$, hence both z_{wv} and z_{wy} are already defined, and by (iv) and (v), $[z_{wv}, z_{wy}] \in E(X)$, $[z_{xv}, z_{wv}] \in E(X)$, and $[z_{wv}, z_{wy}] \sim_1 [v, y]$, $[z_{xv}, z_{wv}] \sim_1 [x, w]$. Thus $[z_{xv}, z_{wv}] \nsim [z_{wv}, z_{wy}]$, hence in particular $[z_{xv}, z_{wv}] \nsim^{(1)} [z_{wv}, z_{wy}]$, and therefore X contains a 4-circuit C without diagonals such that $[z_{xv}, z_{wv}]$ and $[z_{wv}, z_{wy}]$ belong to $E(C)$. Define z_{xy} to be the fourth vertex of C.

z_{xy} thus defined is unique. If $x = x_0$ this is obvious. Assume therefore that $\varrho_0(x, x_0) \geqq 1$. Let $v' \in V(Y_1)$ be such that $[v', y] \in E(Y_1)$ and $\varrho_1(v', x_0) = \varrho_1(y, x_0) - 1$; similarly let $w' \in V(X_0)$ be such that $[x, w'] \in E(X_0)$ and $\varrho_0(w', x_0) = \varrho_0(x, x_0) - 1$. Let z'_{xy} be the fourth vertex of a 4-circuit without diagonals containing $[z_{xv'}, z_{w'v'}]$ and $[z_{w'v'}, z_{w'y}]$, and suppose that $z'_{xy} \neq z_{xy}$. Let Q_0 be a path of X with $V(Q_0) = \{z_{wy}, z_{w_1y}, \ldots, z_{w_ry}, z_{w'y}\}$, where $\sigma(w_i, y) \leqq m$, $i = 1, \ldots, r$, $r \geqq 0$. Such a path exists because $\varrho_0(w, x_0) = \varrho_0(w', x_0)$. Similarly, let Q_1 be a path of X with $V(Q_1) = \{z_{xv}, z_{xv_1}, \ldots, z_{xv_s}, z_{xv'}\}$, where $\sigma(x, v_j) \leqq m$, $j = 1, \ldots, s$, $s \geqq 0$. Note that $Q_0 \sim X_0$, $Q_1 \sim Y_1$. Let P_0, P_1 be the paths formed by $[z_{xy}, z_{wy}]$, Q_0, $[z_{w'y}, z'_{xy}]$, and $[z_{xy}, z_{xv}]$, Q_1 $[z_{xv'}, z'_{xy}]$, respectively. Then $P_0 \cup P_1$ is a circuit of X with property $\mathfrak{B}_1$, a contradiction. Hence $z'_{xy} = z_{xy}$.

We show next that if $x \neq x_0$, then $z_{xy} \notin V(Y_1)$, if $y \neq x_0$, then $z_{xy} \notin V(X_0)$, and that $z_{xy} \neq z_{uv}$ for all (u, v) with $\sigma(u, v) \leqq m$. Suppose $x \neq x_0$, and $z_{xy} \in V(Y_1)$. Let w be as in the preceding paragraph, let R_0 be a path of X with $V(R_0) = \{z_{x_0y}, z_{x_1y}, \ldots, z_{x_ry}, z_{wy}\}$ such that $\sigma(x_i, y) \leqq m$, and let P_1 be a path of Y_1 joining y and z_{xy}. Let P_0 be the path formed by $[z_{wy}, z_{xy}]$ and R_0. Then $P_0 \cup P_1$ is a circuit with property $\mathfrak{B}_1$. A similar argument proves the other two statements.

It remains to prove (iv). That $[z_{xy}, z_{x'y'}] \in E(X)$ if $x = x'$ and $[y, y'] \in E(Y_1)$, or $y = y'$ and $[x, x'] \in E(X_0)$ is obvious from the construction and uniqueness of z_{xy}. Now assume $[z_{xy}, z_{x'y'}] \in E(X)$, $\sigma(x', y') < \sigma(x, y) = m + 1$. Assume that $x \neq x'$, $y \neq y'$. Let P_0 be a path of X joining $z_{x'y}$ and $z_{xy'}$ such that

$P_0 \sim X_0$, and let P_1 be a path of X joining $z_{xy'}$ and z_{xy} such that $P_1 \sim Y_1$. Then P_0, P_1 and $[z_{xy}, z_{x'y'}]$ form a circuit with property $\mathfrak{B}_1$, a contradiction. Hence either $x = x'$ or $y = y'$, and accordingly $[y, y'] \in E(Y_1)$ or $[x, x'] \in E(X_0)$.

(i) ... (iv) imply that X contains a subgraph $X_1 \cong X_0 \times Y_1$. Since X is prime, and X_1 is non-prime, X_1 is a proper subgraph of X. It follows from the construction of X_1 that no edge of $E_1 - E(X_1)$ is incident with any vertex of X_1. Let $E_2 \neq E_1$ be an equivalence class of $E(X)$, and repeat the above construction replacing X_0 by X_1, Y_1 by Y_2, etc., obtaining $X_2 \cong X_0 \times Y_1 \times Y_2$, etc.

(2.12) LEMMA. *Let $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, where $X_1, \ldots, X_n$ are connected graphs, and let $e, e' \in E(X_a)$, $1 \leqq a \leqq n$. Then $e \sim e'$ (in X_a) implies $i_a^x e \sim i_a^x e'$ (in X) for all $x \in V(X)$.*

PROOF. It suffices to show that i_a^x preserves $\sim^{(1)}$. Let $e, e' \in E(X_a)$, and suppose that $e \sim^{(1)} e'$ (in X_a). Assume that $e_x \not\sim^{(1)} e'_x$ (in X), where $e_x = i_a^x e$, $e'_x = i_a^x e'$. Then X contains a 4-circuit C without diagonals such that $e_x, e'_x \in E(C)$. Since the remaining two edges of C are in relation $\sim^{(0)}$ with e_x and e'_x, respectively, it follows from Lemma (2.5) that C is a subgraph of X_a^x. Hence $p_a C$ is a 4-circuit without diagonals of X_a such that $e, e' \in E(p_a C)$. Therefore $e \not\sim^{(1)} e'$ (in X_a), a contradiction.

(2.13) THEOREM. *Let X be a connected graph of finite type, or a connected graph containing a vertex of finite degree, and suppose that $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, where $X_1, \ldots, X_n$ are prime graphs. Let $e, e' \in E(X)$. Then a n.a.s.c. that $e \sim e'$ is that $e \in E(X_a^x)$, $e' \in E(X_a^{x'})$ for some $x, x' \in V(X)$, and some a, $1 \leqq a \leqq n$.*

PROOF. Necessity: (2.5), (2.7). Sufficiency: (2.11), (2.12).

(2.14) COROLLARY. *Let X be as in (2.13), and let $x \in V(X)$. By E_a denote that equivalence class of $E(X)$ modulo $\sim$ for which $E_a \cap E(X_a^x) \neq \bigcirc$. Then X_a^x is the maximal connected subgraph of X such that $x \in V(X_a^x)$, and $E(X_a^x) \subset E_a$.*

(2.15) COROLLARY. *If X is a connected graph of finite type or if X is a connected graph containing a vertex of finite degree, and if X has a prime factor decomposition, then the prime factor decomposition of X is unique to within isomorphisms.*

(2.16) THEOREM. *Let $\{X_a \mid a \in A\}$ be an infinite set of connected prime graphs of finite type. Then $\prod_{a \in A} (X_a, x_a^{(0)})$ has no prime factor decomposition in the cartesian sense.*

PROOF. Assume the contrary. Then there exist connected prime graphs $Y_1, \ldots, Y_n$ such that $X = \prod_{a \in A} (X_a, x_a^{(0)}) \cong \prod_{i=1}^{n} Y_i$. Let $x^{(0)} \in V(X)$ be given by $p_a x^{(0)} = x_a^{(0)}$, $a \in A$. Examination of the proofs of (2.5), (2.7), and (2.12) shows that (2.13) also holds for weak cartesian products of connected prime graphs of finite type. It follows that two edges e, e' of X are equivalent if and only if $e \in E(X_a^x)$, $e' \in E(X_a^{x'})$ for some $a \in A$. Applying this fact and Lemma (2.14) to the graphs $Y_i^{x^{(0)}}$ (defined in analogy to the $X_a^{x'}$s) we obtain that if $E(X_a^x) \cap Y_i^{x^{(0)}}) \neq \bigcirc$, then $X_a^x \subset Y_i^{x^{(0)}}$. Consequently $Y_i^{x^{(0)}} = \cup \{X_a^x \mid a \in A_i, x \in V(Y_i^{x^{(0)}})\}$, where $A_i = \{a \in A \mid E(X_a^x \cap Y_i^{x^{(0)}}) \neq \bigcirc \text{ for some } x \in V(X)\}$, and therefore $Y_i \cong Y_i^{x^{(0)}}$

$\cong \prod_{a\in A_i}(X_a, x_a^{(0)})$. Since A is infinite, there is an i for which A_i is infinite. But then $\prod_{a\in A_i}(X_a, x_a^{(0)})$ is not prime [cf. (1.6) (iii)], and therefore Y_i is not prime, a contradiction.

3. The automorphism group of connected graphs of finite type

We recall that given a set $\{X_a | a\in A\}$ of graphs the *sum* $X^+=\sum_{a\in A} X_a$ is defined as follows.

$$V(X^+) = \bigcup_{a\in A}(V(X_a)\times\{a\}), \tag{1}$$

$$E(X^+) = \bigcup_{a\in A}\{[(x_a, a), (x_a', a)] | [x_a, x_a'] \in E(X_a)\}. \tag{2}$$

If the graphs X_a are mutually disjoint, then $X^+\cong X_0^+$, where

$$V(X_0^+) = \bigcup_{a\in A} V(X_a), \quad E(X_0^+) = \bigcup_{a\in A} E(X_a).$$

We shall then identify X^+ with X_0^+.

(3.1) THEOREM. *Let X be as in* (2.13). *Then $G(X)\cong G(X^+)$, where $X^+=\sum_{a=1}^{n} X_a$, and $X_1, \ldots, X_n$ are the prime factors of X with respect to cartesian multiplication.*

PROOF. Without loss of generality we can identify X with $X_1\times\cdots\times X_n$. Also, we can assume that the graphs X_a are mutually disjoint. Since X is connected, the prime factors $X_1, \ldots, X_n$ are likewise connected; hence every $\psi\in G(X^+)$ induces a permutation $\varrho\in S_n$ (= symmetric group of degree n) given by

$$\psi X_a = X_{\varrho a}, \qquad a = 1, \ldots, n,$$

and $\psi\to\varrho$ is a homomorphism of $G(X^+)$ into S_n.

Given $\psi\in G(X^+)$ define $\varphi: V(X)\to V(X)$ by

$$p_{\varrho a}\varphi x = \psi p_a x, \qquad x\in V(X), \qquad a = 1, \ldots, n,$$

where $\varrho\in S_n$ is the permutation induced by ψ. Let $[x, x']\in E(X)$. Then $[p_a x, p_a x']\in E(X_a)$ for exactly one a, $1\leqq a\leqq n$. Therefore

$$[\psi p_a x, \psi p_a x'] = [p_{\varrho a}\varphi x, p_{\varrho a}\varphi x'] \in E(X_{\varrho a}),$$

and

$$i_{\varrho a}^{\varphi x}[p_{\varrho a}\varphi x, p_{\varrho a}\varphi x'] = [\varphi x, \varphi x'] \in E(X_{\varrho a}^{\varphi x}) < E(X).$$

Hence $\varphi\in G(X)$. It also follows that

$$\varphi X_a^x = X_{\varrho a}^{\varphi x}.$$

Consider the function $j: G(X^+)\to G(X)$ given by $j\psi=\varphi$. Clearly j is a homomorphism. Let $\psi\in\operatorname{Ker} j$. Then

$$X_a^x = X_{\varrho a}^x, \qquad a = 1, \ldots, n, \qquad x\in V(X).$$

Hence $\varrho = 1$, and $\psi p_a x = p_a x$, i.e. $\psi = 1$. Hence j is a monomorphism.

Let $x \in V(X)$. By (2.14), X_a^x is the maximal connected subgraph of X with $x \in V(X_a^x)$ and $E(X_a^x) \subset E_a$. Since $\sim$ is invariant under automorphisms [cf. (2.3)], every $\varphi \in G(X)$ induces a $\pi \in S_n$ given by

$$\varphi E_a = E_{\pi a}, \qquad a = 1, \ldots, n.$$

Consequently

$$\varphi X_a^x = X_{\pi a}^{\varphi x}, \qquad a = 1, \ldots, n, \qquad x \in V(X).$$

Clearly $\varphi \to \pi$ is a homomorphism of $G(X)$ into S_n.

Given $\varphi \in G(X)$ define $\psi: V(X^*) \to V(X^*)$ by

$$i_{\pi a}^{\varphi x} \psi x_a = \varphi i_a^x x_a, \qquad x_a \in V(X_a), \qquad a = 1, \ldots, n,$$

where x is an arbitrary vertex of X, and $\pi \in S_n$ is the permutation induced by φ. ψ does not depend on the choice of x. Since X is connected, it suffices to show that

$$p_{\pi a} \varphi i_a^x x_a = p_{\pi a} \varphi i_a^{x'} x_a$$

whenever $[x, x'] \in E(X)$. We have $[x, x'] \in E(X_b^x)$ for exactly one b, $1 \leqq b \leqq n$. Hence $p_c x = p_c x'$, if $c \neq b$, and $[p_b x, p_b x'] \in E(X_b)$. We can assume that $b \neq a$ for otherwise it follows trivially that $i_a^x x_a = i_a^{x'} x_a$. Put

$$y = i_a^x x_a, \qquad y' = i_a^{x'} x_a.$$

Then

$$p_c y = p_c x, \quad \text{if} \quad c \neq a, \qquad p_a y = x_a,$$

and

$$p_c y' = p_c x', \quad \text{if} \quad c \neq a, \qquad p_a y' = x_a.$$

Hence $[y, y'] \in E(X_b^\gamma)$. It follows that $[\varphi y, \varphi y'] \in E(X_{\pi b}^{\varphi \gamma})$, hence $p_c \varphi y = p_c \varphi y'$ for all $c \neq \pi b$; in particular, $p_{\pi a} \varphi y = p_{\pi a} \varphi y'$, i.e. $p_{\pi a} \varphi i_a^x x_a = p_{\pi a} \varphi i_a^{x'} x_a$.

The proof that $\psi \in G(X^*)$, and that the function $j^*: G(X) \to G(X^*)$ given by $j^* \varphi = \psi$ is a monomorphism, is dual to the proof for j, and is therefore left to the reader. It remains to show that $j j^* = 1$, and $j^* j = 1$. Let $\varphi \in G(X)$, $x \in V(X)$. Note that φ and $j^* \varphi$ induce the same $\pi \in S_n$. Hence $p_{\pi a}(j j^* \varphi) x = (j^* \varphi) p_a x = p_{\pi a} \varphi i_a^x p_a x = p_{\pi a} \varphi x$, and therefore $j j^* = 1$. Similarly for $j^* j$. It follows that $G(X) \cong G(X^*)$.

(3.2) COROLLARY. *Let $X_1, \ldots, X_n$ be connected graphs of finite type which are pairwise relatively prime with respect to cartesian multiplication. Then* $G(X_1 \times \cdots \times X_n) \cong G(X_1) \times \cdots \times G(X_n)$.

Reference

[1] ČULIK, K.: Zur Theorie der Graphen. Časopis Pro Pěstování Matematiky **83**, 133–155 (1958).

College of Arts and Sciences, Tulane University, New Orleans, La. (U.S.A.)

(Eingegangen am 8. Mai 1959)

THOMPSON, J. G.
Math. Zeitschr. 72, 458–462 (1960)

A Special Class of Non-Solvable Groups

By
JOHN G. THOMPSON

The object of this note is to prove a theorem which was only stated in [4].

THEOREM. *If a maximal subgroup $M = P \times M_1$ of the non-solvable finite group G is nilpotent, and if the 2-Sylow subgroup P of M is generalized quaternion or dihedral, then G possesses a normal series*

$$G \geqq G_0 > T \geqq 1,$$

where $[G:G_0] \leqq 2$, T is nilpotent, and $G_0/T \cong LF(2, q)$, where

i. *q is a prime greater than 7 of the form $2^n \pm 1$,*

or ii. *$q = 9$,*

or iii. *$q = 7$, in which case $[G:G_0] = 2$.*

REMARK. It appears likely that the assumption regarding the structure of P is unnecessary, and that the conclusion of the theorem follows with no assumptions on P whatsoever.

We first prove three easy lemmas.

LEMMA 1. *If D is a dihedral group of order 2^{n+1},*

$$D = \{a, b \mid a^2 = b^{2^n} = 1,\ a\,b\,a = b^{-1}\},$$

then any proper non-cyclic normal subgroup of D has index 2 in D.

PROOF. Since $a\,b\,a^{-1} = b^{-1}$, $B = \{b\}$ is a normal subgroup of D. Since all subgroups of B are cyclic, it suffices to show that any proper normal subgroup E of D not contained in B has index 2. Now $D/E \cap B$ is a dihedral 2-group, with generators $\bar{a} = a(E \cap B)$ and $\bar{b} = b(E \cap B)$, and $E/E \cap B \lhd D/E\,B$. Hence it suffices to consider the case when $E \cap B = 1$. But then $[E:1] = [D:B] = 2$. On the other hand, E must contain an element $t = a\,b^r$ not in B and its conjugate $b^{-1}tb = a\,b^{r+2}$. Thus, E contains at least three elements unless $n = 1$, in which case $[D:E] = 2$, as asserted.

LEMMA 2. *Suppose X is a finite group of even order which possesses no normal subgroups of index 2, and suppose that a 2-Sylow subgroup of X is dihedral, and is its own normalizer in X. Then any two elements of order 2 in X are conjugate in X.*

PROOF. Let the group D of lemma 1 be a 2-Sylow subgroup of X. The elements of order 2 in D split into three conjugate classes in D, namely $C_1 = [b^{2^{n-1}}]$,

$C_2=[ab^{2t}, t=0, 1, \ldots, 2^{n-1}-1]$, and $C_3=[ab^{2t+1}, t=0, 1, \ldots, 2^{n-1}-1]$. Since any element of order 2 in X is conjugate to an element of order 2 in D, we must show that C_1, C_2, and C_3 lie in the same conjugate class of X.

Since by assumption $D=N_X(D)$, Grün's second theorem states that the 2-factor commutator group of X is isomorphic to D/D^*, where

$$D^*=\prod_x D\cap(D^x)',$$

x ranging through the elements of X. Since we are also assuming that X has no normal subgroups of index 2, we must have $D^*=D$.

Since $(D^x)'$ is cyclic for each x in X, so is $D\cap(D^x)'$. If $D\cap(D^x)'$ has order at least four, then it is contained in $\{b^2\}$, which is itself contained in the Frattini subgroup of D and is superfluous to any generating set. Hence, we only need to consider those x such that $D\cap(D^x)'$ has order 2.

An element of order 2 in $(D^x)'$ is necessarily a generator for $Z(D^x)$, and is thus conjugate to $b^{2^{n-1}}$ in X. On the other hand, if $D\cap(D^x)'$ has order 2 and is not contained in D', then it is necessarily of the form $\{ab^{2s}\}$ or $\{ab^{2t+1}\}$, for suitable s or t. Since the elements in D of the form ab^{2s} generate a proper normal subgroup of D, as do the elements of the form ab^{2t+1}, we see that $b^{2^{n-1}}$ is conjugate in X to both ab^{2s} and ab^{2t+1}, and the proof is complete.

LEMMA 3. *If p is an odd prime, and $p^m=1+2^n$, then either $m=1$ or else $m=2$ and $p=3$. If $p^m=2^n-1$, then $m=1$.*

PROOF. Suppose $p^m=1+2^n$ and $m>1$. We find that $p^m-1=(p-1)\times(p^{m-1}+\cdots p+1)=2^n$. If m were odd, then $p^{m-1}+\cdots p+1$ would also be odd. Since it is a power of 2, this would force $m=1$. Hence $m=2t$. But then $p^{2t}-1=(p^t-1)(p^t+1)=2^n$, so that p^t-1 and p^t+1 are both powers of 2. Hence $p^t=3$, $t=1$, $m=2$, as desired.

If $p^m=2^n-1$ and m is even, then $p^m\equiv 1 \pmod 8$, which is not possible unless $m=0$. Hence m is odd. But then

$$p^m+1=(p+1)(p^{m-1}-p^{m-2}+\cdots-p+1)=2^n,$$

and $p^{m-1}-p^{m-2}+\cdots-p+1$ is both odd and a power of 2, hence is equal to 1. This forces $m=1$.

PROOF OF THE THEOREM. Let N be the maximal solvable normal subgroup of G. If N were not contained in M, then $G=MN$ by maximality of M, so that G is an extension of the solvable group N by the nilpotent group $G/N\cong M/M\cap N$, and is solvable. Since we are assuming that G is non-solvable we conclude

$$N\leqq M. \tag{1}$$

$N=M$ is not possible since M would then have prime index in G, and G would be solvable.

Now $\overline{G}=G/N$ is non-solvable and $M/N=\overline{M}$ is a maximal subgroup of G. If $\overline{M}$ were of odd order, then by a previous result [4], G would be solvable. Hence $\overline{M}$ is of even order and the 2-Sylow subgroup of $\overline{M}$ is $PN/N \cong P/P\cap N$ and is generalized quaternion or dihedral or of order 2. In any case, from (1) we conclude that if $\overline{H}\neq 1$ is any normal subgroup of $\overline{M}$, then

$$N_{\overline{G}}(\overline{H})=\overline{M}. \tag{2}$$

Suppose $\overline{M}$ has a normal complement, say $\overline{K}$. In this case, an element x in $Z(\overline{M})$, $x\neq 1$, x of prime order, would induce an automorphism of $\overline{K}$ which, by virtue of (2), would have no fixed-points. By [4], we would find that $\overline{K}$ is nilpotent, so that $\overline{G}$ would be an extension of a nilpotent group by a nilpotent group, hence solvable, contrary to assumption. Thus, $\overline{M}$ does not have a normal complement.

Let $\overline{Q}$ be a q-Sylow subgroup of $\overline{M}_1$, where $\overline{M}_1=M_1/NN''$. By (2), if $\overline{T}$ is any normalsubgroup of $\overline{Q}$, then elements of order prime to q which normalize $\overline{T}$ centralize $\overline{T}$. By Theorem A [4], $\overline{Q}$ has a normal complement. The intersection of these normal complements for the Sylow subgroups of $\overline{M}_1$ is a normal complement for $\overline{M}_1$. If $\overline{P}$ were of order 2, then $\overline{P}$ would have a normal complement [1, p. 163]. The intersection of the normal complement for $\overline{M}_1$ with the normal complement for $\overline{P}$ is thus a normal complement for $\overline{M}$, contrary to the previous paragraph. Hence, $\overline{P}$ is not of order 2.

CASE 1. $N\neq 1$. We conclude by the induction hypothesis that $\overline{G}$ has a normal series $\overline{G}\geqq\overline{G}_0>\overline{T}\geqq 1$ satisfying the demands of the theorem with $\overline{G}$ replacing G. The complete inverse image in G of this normal series gives rise to a normal series for G,

$$G\geqq G_0>T\geqq N>1.$$

T is solvable since T is an extension of the nilpotent group N by the nilpotent group $\overline{T}=T/N$. By a previous remark, $T\leqq M$, so that T is nilpotent, and we are finished.

CASE 2. $N=1$, but $M_1\neq 1$. We can now remove the bars from (2). Since G does not have a normal 2-complement, G is not 2-normal by [2, p. 216], together with (2). Since G is not 2-normal, we can find an element x in G such that $Z(P)^x\leqq P$ but $Z(P)^x\neq Z(P)$. This implies that $Z(P)$ is contained in $P^{x^{-1}}$ and hence in $M^{x^{-1}}$, so in particular is centralized by $M_1^{x^{-1}}$. By (2), we conclude that $M_1^{x^{-1}}\leqq M$. Since M is nilpotent, we must have $M_1^{x^{-1}}=M_1$. Since $M_1\neq 1$, again by (2) we conclude that $x\in M$. But then $Z(P)^x=Z(P)$, contrary to our choice of x. We are left with one more possibility.

CASE 3. $N=1$, $M_1=1$, that is, M is a 2-group which is either generalized quaternion or dihedral. Since $N_G(M)=M$, M is a 2-Sylow subgroup of G.

Suppose M is generalized quaternion and that Z is the unique subgroup of order 2 in M. G is necessarily 2-normal, so that by [2, p. 216] $G/G_2\cong\tilde{N}/\tilde{N}_2$, where $\tilde{N}=N_G(Z)$. Since we are assuming that $N=1$, we conclude that $\tilde{N}=M$ and this says that G_2 is a normal 2-complement in G. But then the generator

z for Z induces a fixed-point-free automorphism of G_2, which forces G_2 to be abelian, and G to be solvable. We conclude that M is dihedral.

Let us consider the group $G_2 \leqq G$, so that G_2 has no non-trivial quotient groups which are 2-groups. By a theorem of BURNSIDE [*1*, p. 163], a 2-Sylow subgroup of G_2 is not cyclic. Since $G_2 \cap M \lhd M$, and $G_2 \cap M$ is a 2-Sylow subgroup of G_2, it is non-cyclic. We apply lemma 1 to conclude that $[M : M \cap G_2] \leqq 2$. Application of lemma 2 tells us that G_2 possesses just one conjugate class of elements of order 2. Since $G_2 \cap M \lhd M$ and M is a 2-group, we can choose an element $z \neq 1$ of order 2 such that $z \in G_2 \cap M \cap Z(M) = G_2 \cap Z(M)$. We conclude that every element of order 2 in G_2 is conjugate to z. Also, since $z \in Z(M)$ and $Z(M)$ has order 2, we have $\{z\} = Z(M)$. [(2) implies that M cannot be dihedral of order 4.] Since $C_G(z) = M$, we conclude from this that the cyclic subgroups of G_2 are either of odd order or of order a power of 2.

Next, we see that G_2 is characteristically simple, since if $C \neq 1$ is any characteristic subgroup of G_2, then $C \lhd G$, and since $N = 1$, we have $G = CM$, so that G/C is a 2-group. By the definition of G_2, $C \leqq G_2$ and C characteristic in G_2 imply that $C = G_2$.

Since G_2 is characteristically simple, $G_2 = H_1 \times \cdots \times H_r$ is a direct product of r pairwise isomorphic simple groups of composite even order. If $r \geqq 2$, then there would be at least r conjugate classes of elements of order 2, contrary to the fact that G_2 has just one conjugate class of elements of order 2. Hence, $r = 1$, and G_2 is simple, and of even order.

Let U and V be two cyclic subgroups of G_2 with $U \cap V \neq 1$, and U of even order. By the preceding comments, U and V must both have order a power of 2. Since the elements of order 2 in G_2 form a single conjugate class we can suppose that $z \in U \cap V$. Since U and V both centralize z, we have $\{U, V\} \leqq M$. Since M is dihedral, $M = \{a, b \mid a^2 = b^{2^n} = 1, aba = b^{-1}\}$, so that $z = b^{2^{n-1}}$. A typical element of M either lies in $\{b\}$, or is of order 2 and is different from z. Since $U \cap V \geqq \{z\}$, we conclude that $\{U, V\} \leqq \{b\}$, so that $\{U, V\}$ is cyclic. By a result of BRAUER [*3*, p. 664], $G_2 \cong LF(2, q)$ for some prime power q.

Suppose $q = 2^t$. This is not possible since the 2-Sylow subgroups of $LF(2, 2^t)$ do not equal their normalizers, in contradiction with (2), since $G_2 \cap M \lhd M$, and $G_2 \cap M$ is a 2-Sylow subgroup of G_2. Hence, q is odd. Now the order of $LF(2, q)$ is $\frac{1}{2}q(q-1)(q+1)$, and it is known that $LF(2, q)$ has elements of orders $\frac{1}{2}(q-1)$ and $\frac{1}{2}(q+1)$. Since q is odd, precisely one of these numbers is even. As observed earlier, the cyclic subgroups of G_2 have odd order or order a power of two. Hence, if $\frac{1}{2}(q-1)$ is even, then $\frac{1}{2}(q-1)$ is a power of 2, so that $q = 1 + 2^n$, while if $\frac{1}{2}(q+1)$ is even, then $q = 2^n - 1$. We apply lemma 3 to conclude that if $q = 9$ or q is a prime greater than 7, we are finished, since $[G : G_2] = [M : M \cap G_2] \leqq 2$, as derived earlier.

It remains to treat the possibilities $q = 3$, 5, or 7. $q = 3$ is not a possibility since $LF(2, 3)$ is solvable. Also, $q = 5$ is not possible, since $LF(2, 5) \cong A_5$,

from which we conclude that $G = A_5$ or S_5. But neither A_5 nor S_5 possesses 2-Sylow subgroups which are maximal, since A_5 contains A_4 and S_5 contains S_4.

Finally, suppose $q = 7$. The group $LF(2, 7)$ has order $168 = 8 \cdot 3 \cdot 7$, and it possesses a subgroup of order 24, so that the 2-Sylow subgroups are not maximal. Hence $G_2 \cong LF(2, 7)$ must be of index 2 in G.

The verification that $LF(2, q)$ possesses 2-Sylow subgroups which are maximal for the relevant values of q is straightforward and is omitted.

Bibliography

[1] BURNSIDE, W.: Theory of Groups of Finite Order. New York: Dover 1957. — [2] HALL, M.: The Theory of Groups. New York: MacMillan 1959. — [3] SUZUKI, M.: On Finite Groups with Cyclic Sylow Subgroups For all Odd Primes. Amer. J. Math. **77**, no. 4, 657—691 (1955). — [4] THOMPSON, J.: Finite Groups With Fixed-Point-Free Automorphisms of Prime Order. Proc. Nat. Acad. Sci. **45**, no. 4, 578—581 (1959).

Dept. of Math., University of Chicago, Chicago 37, Ill. (U.S.A.)

(Eingegangen am 22. Mai 1959)

RHOADES, B. E.
Math. Zeitschr. 72, 463–466 (1960)

Total Comparison among some totally Regular Hausdorff Methods

By
B. E. RHOADES

BASU in [2] compares totally the Cesàro methods (C^α) and the Hölder methods (H^α). Among the results of [4] is a total comparison of the H^α and the Γ_β^α methods, where Γ_β^α has $[\beta/(n+\beta)]^\alpha$ as a generating sequence, $\alpha, \beta > 0$. The present paper compares totally the C^α and Γ_β^α methods. For definitions of terms used in this paper, the reader can consult [4] and the references cited there. Since results of [2] and [4] are to be utilized, I shall state them here to make this paper somewhat self-contained.

Let x denote a sequence, A an infinite matrix for which $A_n(x) = \Sigma a_{nk} x_k$ is defined. For two matrix methods A and B, B is said to be totally stronger than A (B *t.s.* A) if, for each sequence x for which $A_n(x) \to l$, $B_n(x) \to l$, $|l| \leqq \infty$. B is not totally stronger than A (B *n.t.s.* A) if $A_n(x) \to l$ implies $B_n(x) \to l$ for l finite, but that there exists a sequence x for which $A_n(x) \to +\infty$ and $B_n(x) \not\to +\infty$. If A possesses a two-sided inverse, the statement B *t.s.* A is equivalent to the statement that BA^{-1} is totally regular. That is, the matrix method defined by BA^{-1} preserves convergence ($x_n \to l$ implies $BA_n^{-1}(x) \to l$) and that, for every sequence x with $x_n \to +\infty$, $BA_n^{-1}(x) \to +\infty$.

THEOREM B 2.

(i) *For* $-1 < \alpha < 0$, H^α *t.s.* C^α; *but the converse is false.*

(ii) *For* $0 < \alpha < 1$, C^α *t.s.* H^α; *but the converse is false.*

(iii) *For* $a > 1$, H^α *t.s.* C^α; *but the converse is false.*

(iv) *For* $-1 < \alpha < \beta < 0$, C^β *n.t.s.* H^α.

(v) *For* $0 < \alpha < \beta < 1$, H^β *n.t.s.* C^α.

(vi) *For* $1 < \alpha < \beta$, C^β *n.t.s.* H^α.

THEOREM B 4.1.

(i) *For* $\alpha < \beta$, $c > 0$, Γ_c^β *t.s.* Γ_c^α.

(ii) *Let* $0 < a < b$, $\alpha > 0$. *Then* Γ_a^α *t.s.* Γ_b^α.

THEOREM B 4.2. *If* $\alpha > 0$,

(i) *for* $0 < a < 1$, Γ_a^α *t.s.* H^α, *but* H^α *n.t.s.* Γ_a^α,

(ii) *for* $b > 1$, H^α *t.s.* Γ_b^α *but* Γ_b^α *n.t.s.* H^α.

In [4], B 4.1 (i) has the restriction that $\alpha > 0$, but this restriction is not needed in the proof. The important item is that $\beta - \alpha$ be positive. The analogous result of B 4.1 (ii) for $\alpha < 0$ will now be stated. The proof is the same as that of B 4.2 (ii) and will be omitted.

THEOREM 1. *Let $\alpha<0$. If $0<a<b$, then Γ_b^α t.s. Γ_a^α, but Γ_a^α n.t.s. Γ_b^α.*

Since $\Gamma_1^\alpha=H^\alpha$, Theorem 1 also says that, for $\alpha<0$, $0<a<1$, $b>1$, Γ_b^α *t.s.* H^α *t.s.* Γ_a^α.

THEOREM 2. *Let $0<1+\alpha\leqq a<1$. Then Γ_a^α t.s. C^α, but not conversely.*

THEOREM 3. *Let $-1<\alpha<0$, $0<a\leqq\frac{1}{2}(\alpha+1)$. Then C^α t.s. Γ_a^α, but not conversely.*

THEOREM 4. *Let $0<a\leqq\frac{1}{2}(\alpha+1)<1$. Then Γ_a^α t.s. C^α, but not conversely.*

THEOREM 5. *Let $0<a<1$, $b>1$. Then Γ_a^1 t.s. C^1 t.s. Γ^1, but not conversely.*

THEOREM 6. *If $\alpha>1$, $b\geqq\frac{1}{2}(\alpha+1)$, then C^α t.s. Γ_b^α, but not conversely.*

To prove Theorems 2, 3, 4, and 6, let

$$\mu_n=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha+1)}\cdot\frac{a^\alpha}{(n+a)^\alpha}.$$

Let $\mu(t)=e^{\sigma(t)}$, where $\sigma(t)=\log\Gamma(t+\alpha+1)+\alpha\log a-\log\Gamma(\alpha+1)-$ $-\log\Gamma(t+1)-\alpha\log(t+a)$. For $t<0$,

$$\sigma'(t)=\frac{\Gamma'(t+\alpha+1)}{\Gamma(t+\alpha+1)}-\frac{\Gamma'(t+1)}{\Gamma(t+1)}-\frac{\alpha}{t+a},$$

$$\sigma'(t)=\frac{-\alpha}{t+a}+\sum_{m=0}^{\infty}\{(m+t+1)^{-1}-(m+t+\alpha+1)^{-1}\}. \tag{1}$$

The form of the logarithmic derivative of the Gamma function can be derived from [1], p. 161, (34). Since

$$(t+a)^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\{(m+t+a)^{-1}-(m+t+a+1)^{-1}\},$$

$$\begin{cases}(-1)\,\sigma'(t)=\alpha\sum\limits_{m=0}^{\infty}\{[(m+t+a)(m+t+a+1)]^{-1}\\ \qquad\qquad -[(m+t+1)(m+t+\alpha+1)]^{-1}\}.\end{cases} \tag{2}$$

If, for a given a, α,

$$(-1)^n\sigma^{(n)}(t)\geqq 0 \qquad (t>0;\ n=1,2,3,\ldots), \tag{3}$$

then Γ_a^α *t.s.* C^α. On the other hand, since the moment function corresponding to the transformation from Γ_a^α to C^α is $1/\mu(t)=e^{-\sigma(t)}$, if

$$(-1)^{n+1}\sigma^{(n)}(t)\geqq 0 \qquad (t>0;\ n=1,2,3,\ldots), \tag{4}$$

then C^α *t.s.* Γ_a^α.

Replacing a in (2) by $c=\frac{1}{2}(\alpha+1)$, the quantity in braces becomes $\frac{1}{4}(1-\alpha^2)\,f_m(t)$, where $f_m(t)=1/(m+t+c)(m+t+c+1)(m+t+1)(m+t+\alpha+1)$, and $(-1)\,\sigma'(t)=\frac{1}{4}\alpha(1-\alpha^2)\sum_{m=0}^{\infty}f_m(t)$. Since $\alpha>-1$, $\operatorname{sgn} f_m^{(n)}(t)=(-1)^n$ for $n, m\geqq 0$, $t>0$. Hence (3) is satisfied for $\alpha(1-\alpha^2)>0$ and (4) is satisfied for $\alpha(1-\alpha^2)<0$.

Thus far we have shown that Theorems 3, 4, and 6 are true for $a=b=c$. To complete the proofs, consider that of Theorem 3. From Theorem 1, for $-1<\alpha<0$, Γ_c^α *t.s.* Γ_a^α for $0<a<c$. Since t.s. is a transitive relation, Theorem 3 is now complete. Theorems 4 and 6 are completed in a similar manner.

To prove Theorem 2, repeat the above argument with a in (2) replaced by $\alpha+1$.

Theorem 5 is merely a restatement of Theorem 1, since H^1 and C^1 are identical. Theorem 5 is a known result. Observing that $\Gamma_a^1=(H, a, 1, a+1)$, where $(H, \alpha, \beta, \gamma)$ denotes the hypergeometric summability method (see [3]), Theorem 5 merely combines relations (iii) and (iv) of [3], p. 228.

To show that the converses of Theorems 2 to 6 do not hold, use [2], p. 452.

The next five theorems are negative results, obtained in attempts to further compare the Γ_c^α, C^α, and H^α methods for $c>0$. They are listed here in succession for easy reference.

THEOREM 7. *Let* $-1<\alpha<0$, $\frac{1}{2}(\alpha+1)<a<1$. *Then* C^α *n.t.s.* Γ_a^α.

THEOREM 8. *Let* $0<\alpha<1$, $2a>\alpha+1$. *Then* Γ_a^α *n.t.s.* C^α.

THEOREM 9. *Let* $0<\alpha<\beta\leqq 1$, $0<a<1$. *Then* C^β *n.t.s.* Γ_a^α.

THEOREM 10. *Let* $1\leqq\alpha<\beta$, $b>1$. *Then* Γ_b^β *n.t.s.* C^α.

THEOREM 11. *For* $1\leqq b<(\alpha+1)/2$, C^α *n.t.s.* Γ_b^α.

Theorems 7, 8, and 11 are proved similarly, so I shall group their proofs together.

Using (2),

$$(-1)\,\sigma'(t)=\alpha\sum_{m=0}^{\infty}\{[(m+t+a)(m+t+a+1)]^{-1}-$$
$$-[(m+t+1)(m+t+\alpha+1)]^{-1}\}.$$

Let

$$f(m,t,a,\alpha)=(m+t+1)(m+t+\alpha+1)-(m+t+a)(m+t+a+1)$$
$$=(\alpha+1-2a)(m+t)+\alpha+1-a(a+1).$$

Proof of Theorems 7 and 8. Since $2a>1+\alpha$, it is true that $f(m, t, a, \alpha)<0$ for $m+t$ sufficiently large.

Proof of Theorem 11. Replace a by b. Since $2b<\alpha+1$, $f(m, t, b, \alpha)>0$ for t sufficiently large, $m=0, 1, 2, \ldots$.

The technique used in the remaining two theorems will be to show that there exists an integer $k>0$ for which $(-1)^k\mu^{(k)}(t)<0$ for the moment function $\mu(t)$ under consideration. This will be accomplished by examining the coefficient of t^k in an infinite series expansion for t which is valid for some subset of $0<t<1$, and taking advantage of the fact that the sign of the kth derivative of $\mu(t)$ is determined by the sign of the coefficient of t^k for sufficiently small values of t.

Proof of Theorem 9. It is sufficient to consider the case for $\beta=1$. Let $\mu(t)=(t+a)^\alpha/a^\alpha(t+1)$. Then

$$\mu(t)=(1-t+t^2-t^3+\cdots)\left(1+\frac{\alpha\cdot 1}{a}-\frac{\alpha(1-\alpha)\,t^2}{2!\,a^2}+\cdots\right),$$

and the coefficient of t^k in the power series for $\mu(t)$ is

$$(-1)^k\left[1-\sum_{r=1}^{k}\frac{\alpha(1-\alpha)\ldots(r-1-\alpha)}{r!}\right].$$

But the above series is a part of the series $\sum_{r=1}^{\infty} \alpha(1-\alpha)\dots(r-1-\alpha)a^{-r}(r!)^{-1}$, which is divergent since $0<a<1$. Therefore, the coefficient of t^k is negative for k sufficiently large, and $\mu(t)$ is not totally monotone.

Proof of Theorem 10.

Case I. I shall first show that Γ_b^β *n.t.s.* C^1, for $\beta>1$, $b>1$. Let $\mu_n=(n+1)\,b^\beta/(n+b)^\beta$. Let

$$\mu(t)=(t+1)\,b^\beta/(t+b)^\beta=(t+1)\,(1+t/b)^{-\beta}$$
$$=(t+1)\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{k!\,b^k}\,t^k\right],\qquad 0<t<b.$$

The coefficient of t^k for $k>1$ is

$$(-1)^k\left\{\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{k!\,b^k}-\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-2)}{(k-1)!\,b^{k-1}}\right\}$$
$$=(-1)^k\,\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-2)}{k!\,b^k}\,\vartheta_k(\beta),$$

where $\vartheta_k(\beta)=\beta+k-1-kb=k(1-b)+\beta-1$. Since $b>1$, $\beta>1$, $\vartheta_k(\beta)<0$ for k sufficiently large. Therefore $\mu(t)$ is not totally monotone.

Case II. Let $1<\alpha<\beta$, $b>1$, and assume that Γ_b^β *t.s.* C^α. Since C^α *t.s.* C^1, we have Γ_b^β *t.s.* C^1, contradicting Case I.

Note that Theorem B 2 (i) can be proved directly from Theorems 1 and 2.

Proof of B 2 (i). Let $0<1+\alpha\leqq a<1$, $b=1$ in Theorem 1. Then H^α *t.s.* Γ_a^α. From Theorem 2, Γ_a^α *t.s.* C^α. Therefore H^α *t.s.* C^α.

Below is listed a table of results obtained by combining the results of Theorems 1 to 6 with B 2 (i) to (iii). Let $0<a<1$, $b>1$.

For $-1<\alpha<0$, $0<a<\frac{1}{2}(\alpha+1)<\alpha+1\leqq a'<1$, $b>1$, Γ_b^α *t.s.* H^α *t.s.* $\Gamma_{a'}^\alpha$ *t.s.* C^α *t.s.* Γ_a^α, but not conversely.

For $0<\alpha<1$, $0<a\leqq\frac{1}{2}(\alpha+1)<1$, Γ_a^α *t.s.* C^α *t.s.* H^α *t.s.* Γ_b^α, but not conversely.

For $\alpha=1$, Γ_a^1 *t.s.* $C^1=H^1$ *t.s.* Γ_b^1, but not conversely.

For $\alpha>1$, $0<a<1$, $2b\geqq\alpha+1$, Γ_a^α *t.s.* H^α *t.s.* C^α *t.s.* Γ_b^α, but not conversely.

I wish to express my thanks to Dr. B. KUTTNER of the University of Birmingham, England, and to Dr. A. WILANSKY of Lehigh University for their helpful suggestions in the preparation of this manuscript.

References

[1] AHLFORS, L. V.: Complex Analysis. New York 1953. — [2] BASU, S. K.: On the total relative strength of the Hölder and Cesàro methods. Proc. London Math. Soc. (2) **50**, 447–462 (1949). — [3] BASU, S. K.: On hypergeometric summability involving infinite limits. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 226–238 (1954). — [4] BASU, S. K.: On comparison of the total strength of some Hausdorff methods. Math. Z. **67**, 303–309 (1957).

Dept. of Math., Lafayette College, Easton, Pennsylvania (USA)

(Eingegangen am 9. Juni 1959)